Zad. 5

20

Wojciech Górny
320323
(gr. dr Kościński)

a) Ze stwierdzenia z wykładu, dla $g(p) \neq 0$, $\operatorname{res}_p\left(\frac{f'}{f}g\right) = k_f(p)\cdot g(p)$,
gdzie $k_f(p)$ to rząd bieguna funkcji f w p.

Z tw. o residuach (wszystkie zera P leżą wewnątrz D):

$$\int_{\partial D} \frac{zP'(z)}{P(z)} = 2\pi i\left(\sum_{s\in S} \operatorname{res}_s \frac{zP'(z)}{P(z)}\cdot 1\right) = 2\pi i\left(\sum_{s\in S} k_f(s)\cdot s\right).$$

S – zbiór miejsc, gdzie P się zeruje

Zapiszmy wielomian P jako $P = c_n(z-z_1)\dots(z-z_n)$, być może z_i się powtarzają.

Zatem w sumie $\sum_{s\in S} k_f(s)\cdot s$ s oznacza zero (jedno z $z_1 \dots z_n$) wielomianu s, a $k_f(s)$ to jego krotność.

Zatem $P = c_n(z-z_1)\dots(z-z_n) = c_n z^n - c_n(z_1+\dots+z_n)z^{n-1} + \dots$

Ale $z_1+\dots+z_n$ to suma pierwiastków wielomianu uwzględniająca krotności, zatem to dokładnie $\sum_{s\in S} k_f(s)\cdot s$.

Zatem $\sum_{s\in S} k_f(s)\cdot s = z_1+\dots+z_n = -\frac{c_{n-1}}{c_n}$. $\int_{\partial D} \frac{zP'(z)}{P(z)} = -2\pi i\frac{c_{n-1}}{c_n}$.

b) $P = c_n z^n - c_n(z_1+\dots+z_n)z^{n-1} + \underbrace{\left(c_n\sum_{i<j} z_i z_j\right)}_{c_{n-2}} z^{n-2} + \dots$

Z tw. o residuach

$$\int_{\partial D} \frac{z^2P'(z)}{P(z)} = 2\pi i\left(\sum_{s\in S} \operatorname{res}_s \frac{z^2P'(z)}{P(z)}\cdot 1\right) = 2\pi i\left(\sum_{s\in S} k_f(s)\cdot s^2\right)$$

$$\sum_{s\in S} k_f(s)\cdot s^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = (z_1+\dots+z_n)^2 - 2\sum_{i<j} z_i z_j = \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^2 - 2\frac{c_{n-2}}{c_n}.$$

Zatem $$\int_{\partial D} \frac{z^2P'(z)}{P(z)} = 2\pi i\left(\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^2 - 2\frac{c_{n-2}}{c_n}\right).$$

□

20