Bartosz Chrot
305089
gr. ćw. P. Kosztowskiego

Σ 20

Zad. 4

$f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$

a) liczba pierwiastków wielomianu na pierścieniu $1 < |z| < 2$ to liczba pierw. w $D(0,2)$ minus liczba pierwiastków w $D(0,1)$

- w $D(0,2)$

~~[illegible]~~ $= 2,$

Korzystamy z tw. Rouché'go

$h(z) = z^7$
$g(z) = -5z^3 + 12$ holomorficzne na $\mathbb{C}$

1p

dla $z \in C(0,2)$: $|z^7| = 2^7 = 128$

$|g(z)| = |12 - 5z^3| \leq 12 + 5|z^3| = 52$

Zatem $|h(z)| > |g(z)|$ na $C(0,2)$, więc z tw. Rouche

$f = h + g$ ma tyle samo zer w $D(0,2)$ co h, czyli 7.

- w $D(0,1)$

$h(z) = 12$

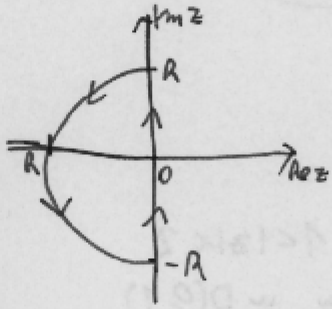
$g(z) = z^7 - 5z^3$

na $C(0,1)$ $|g(z)| = |z^7 - 5z^3| \leq |z^7| + 5|z^3| = 6 < 12 = |h(z)|$

Zatem z tw. Rouche $f(z)$ ma zero zer na $D(0,1)$ (bo $h(z)$ ma zero).

Łącznie, $f(z)$ ma $7 - 0 = \underline{\underline{7}}$ zer na pierścieniu $1 < |z| < 2$

b) Liczba pierwiastków wielomianu w półpłaszczyźnie $Re(z)<0$



Oznaczmy przez C_R półokrąg o parametryzacji $\gamma(t)=Re^{it}$
$t\in[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]$

Zauważmy, że dla dużych R

$$f(z)\sim z^7$$

Stąd przyrost argumentu $f(z)$ na C_R wynosi 7π

Na odcinku $[-iR,iR]$: $f(iy) = -iy^7+5iy^3+12$

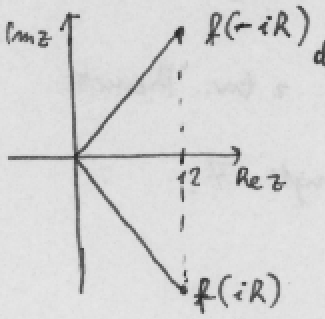
$Re(f(iy))=12$

$Im(f(iy)) = 5y^3-y^7$

gdy $y=R$ to $Im(f(iR)) = 5R^3-R^7 \xrightarrow[R\to\infty]{} -\infty$

gdy $y=-R$ to $Im(f(-iR)) = -5R^3+R^7 \xrightarrow[R\to\infty]{} \infty$

Natomiast część rzeczywista jest stała.



Zatem przyrost argumentu $f(z)$ na odcinku $[-iR,iR]$ to, gdy $R\to\infty$, $-\pi$

A więc przyrost argumentu $f(z)$ na całym półokręgu to 6π, gdy $R\to\infty$, czyli na całym $Re\,z<0$

Korzystając z zasady argumentu, liczba pierwiastków $f(z)$ w półpłaszczyźnie $Re\,z<0$ wynosi $\frac{6\pi}{2\pi} = \underline{\underline{3}}$

10

Piotr Gorbuliński
305125
Agnieszka Kałamajska

Σ 19

Zadanie 4

$f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ ~~[illegible]~~

a) W kole $\overline{D(0,1)}$ f nie ma pierwiastków, bo $|z^7 - 5z^3| \leq |z|^7 + 5|z|^3 \leq 6$, więc po dodaniu 12 nie da się otrzymać 0. Na mocy jakiego twierdzenia?

~~Z tw. Rouche wyznaczę liczbę pierwiastków f w kole $D(0,2)$.~~

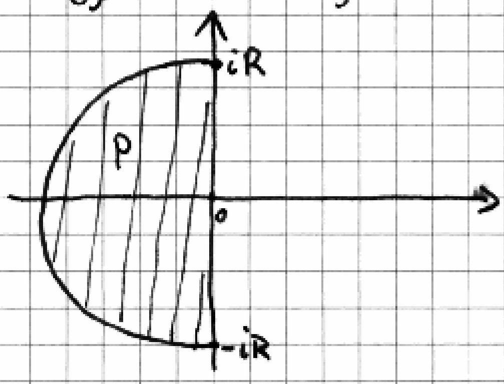
Na brzegu koła $D(0,2)$ nie ma pierwiastków, bo gdy $|z|=2$ to $|z^7| = 128$, $|5z^3| = 40$, więc $z^7 - 5z^3$ ma moduł conajmniej 88, więc po dodaniu 12 nie da się otrzymać 0. Warto było podać odpowiednie twierdzenie

9

~~Niech $h(z) = z^7$, $g(z) = -5z^3 + 12$. Wtedy $f = h + g$, a z poprzednich rachunków wynika, że na $\partial D(0,2)$ $|h(z) - g(z)| < |h(z)|$~~

Analogicznie można uzasadnić, że gdy $|z_0| > 2$ to $f(z_0) \neq 0$. Zatem w pierścieniu $1 < |z| < 2$ f ma wszystkie siedem pierwiastków

b) Użyję zasady argumentu:

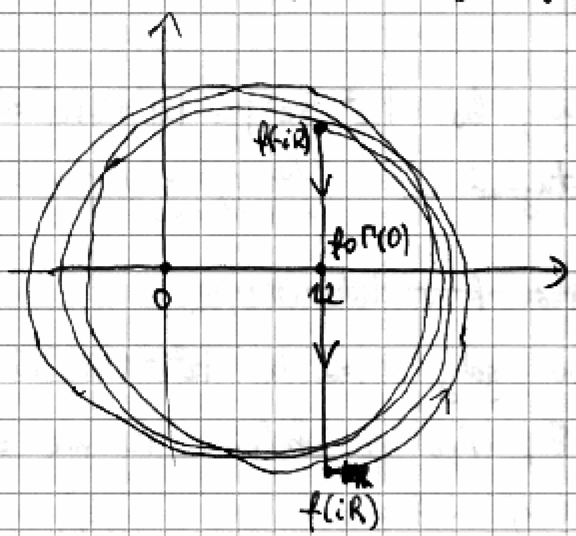


Niech zakreskowany obszar P będzie półkolem o środku w zerze i promieniu R.
Na osi urojonej f nie ma pierwiastków, bo wartości mają część rzeczywistą 12, zatem dla dostatecznie dużego R ($R>2$ z poprzedniego podpunktu) na brzegu półkola nie ma pierwiastków.

$f(ai) = -ia^7 - 5a^3 i + 12 = 12 + i(-a^7 - 5a^3)$

Niech Γ będzie parametryzacją brzegu P, dla ustalenia uwagi niech parametryzacja będzie z odcinka $(0,1)$, $\Gamma(0) = 0 = \Gamma(1)$, orientacja przeciwna do ruchu wskazówek zegara. Wtedy f ma w P pierwiastków tyle, co $\operatorname{ind}(f \circ \Gamma, 0)$.

Gdy $|R|$ jest bardzo duże to na łuku brzegu Γ f zachowuje się podobnie jak z^7, zatem badany indeks wynosi 3, gdyż obraz funkcji $f \circ \Gamma(t)$ wygląda mniej więcej tak:



Ładnie rozwiązane

10

Na osi urojonej f ma wartości na prostej $\mathrm{Re}\, z = 12$, a poruszając się po łuku f obiegnie 0 „trzy i pół" razy, startując poniżej osi rzeczywistej w $f(iR)$ i kończąc w $f(-iR)$.

Zatem f ma 3 pierwiastki w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(z) < 0$.