Niech $f(z) = \frac{1}{z^4-1}$. Osobliwościami f są 4 pkty: $\{1, -1, i, -i\} = S$

Zauważmy, że dla d.d. R i $|z| > R$, zachodzi: $|f(z)| < \frac{1}{|z|^2}$.
Stąd, z tw. z wykładu mamy, że

$$\sum_{\mathbb{Z}-\{-1,1\}} f(z) = -\pi \sum_{S} \mathrm{res}_s \left(f(z)\cdot \mathrm{ctg}(\pi z)\right).$$

Dla $n \in \mathbb{Z}$ $f(n) = f(-n)$, stąd $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S} f(n) - f(0)\right)$.

Obliczmy teraz: $\mathrm{res}_i\, f(z)\mathrm{ctg}(\pi z) = \lim_{z\to i} (z-i)\, f(z)\cdot \mathrm{ctg}(\pi z) =$

(w i oraz $-i$ są bieguny rz. 1)

$$= \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(z^2-1)} \mathrm{ctg}(\pi z) = \frac{1}{-4i} \mathrm{ctg}(\pi i) \quad \left(= \frac{\mathrm{ctgh}\,\pi}{4}, \text{ ok}\right)$$

$$\mathrm{res}_{-i}\, f(z)\,\mathrm{ctg}(\pi z) = \lim_{z\to -i} (z+i)\, f(z)\,\mathrm{ctg}(\pi z) = \lim_{z\to -i} \frac{1}{(z-i)(z^2-1)} \mathrm{ctg}(\pi z) = \frac{1}{4i}\mathrm{ctg}(\pi i)$$

$-i$ $-i$ $-i$

(w 1 oraz -1 są bieguny rz. 2)

$$\mathrm{res}_1 = \lim_{z\to 1} \left((z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z-1)(z+1)(z^2+1)}\cdot \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}\right)' = \lim_{z\to 1}\left(\frac{\cos\pi z}{(z+1)(z^2+1)}\cdot\frac{(z-1)}{\sin \pi z}\right)' =$$

pochodną błąd, bo skróciłem ważny składnik

$$= \lim_{z\to 1} \frac{-\pi \sin\pi z\,(z+1)(z^2+1) - \cos\pi z\,(3z^2+2z+1)}{((z+1)(z^2+1))^2}\cdot\frac{(z-1)}{\sin\pi z} +$$

$$\lim_{z\to 1} \frac{\cos \pi z}{(z+1)(z^2+1)}\cdot \frac{\sin\pi z - \pi(z-1)\cos\pi z}{\sin^2 \pi z} =$$

$$= \frac{-6}{16}\cdot \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{\sin\pi z} + \frac{1}{4}\lim_{z\to 1}\frac{\sin \pi z - \pi(z-1)\cos\pi z}{\sin^2\pi z} \quad \underline{\text{l'Hospital}}$$

$$= \frac{-6}{16}\cdot\frac{1}{\pi \cos\pi} + \frac{1}{4}\cdot \lim_{z\to 1}\frac{\pi\cos\pi z - \pi\cos\pi z + \pi^2 (z-1)\sin\pi z}{2\sin\pi z\cdot\pi\cos\pi z} =$$

$$= \frac{-6}{16}\cdot\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\lim_{z\to 1}\frac{\pi^2(z-1)}{2\pi\cos\pi z} = -\frac{6}{16}\cdot\frac{1}{\pi} \quad (\text{tak})$$

$$\mathrm{res}_{-1} = \lim_{z\to -1}\left((z+1)^2\cdot\frac{1}{(z-1)(z+1)(z^2+1)}\,\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}\right)' = \lim_{z\to -1}\left(\frac{\cos\pi z}{(z-1)(z^2+1)}\cdot\frac{(z+1)}{\sin\pi z}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{-\pi\sin\pi z\,(z-1)(z^2+1) - \cos\pi z\,(3z^2-2z+1)}{(z-1)^2(z^2+1)^2}\cdot\frac{(z+1)}{\sin\pi z} +$$

$$+\lim_{z\to -1}\frac{\cos\pi z}{(z-1)(z^2+1)}\cdot\frac{\sin\pi z - \pi(z+1)\cos\pi z}{\sin^2\pi z} \quad \underline{\text{analog. jak w } 1} \quad \frac{-6}{16}\cdot\frac{1}{\pi}$$

tak!

$$\text{stąd } \sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{12}{16} + 1\right) = \boxed{\frac{7}{8}} \quad -\frac{\pi}{4}\mathrm{ctgh}\,\pi \approx 0.086663$$

$-\frac{\pi}{4}\mathrm{ctgh}\,\pi$

Uwaga. Powyżej widzicie Państwo najwyżej ocenione rozwiązanie zadania 3.. Pechowe wstawienie i zamiast $-i$ zepsuło cały rachunek i odpowiedź.

Były też inne prawie dobre rozwiązania, np. takie, które opierało się o rozkład funkcji wymiernej $\frac{1}{z^4-1}$ na ułamki proste $\frac{1}{4}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{i}{4}\frac{1}{z-i} - \frac{i}{4}\frac{1}{z+i}$:

$$\operatorname{res}_1 \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{z^4-1} = 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{1+1} + \frac{i}{4}\frac{1}{1-i} - \frac{i}{4}\frac{1}{1+i}\right) = -\frac{3}{8},$$

$$\operatorname{res}_{-1} \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{z^4-1} = 1\cdot\left(\frac{1}{4}\frac{1}{-1-1} + \frac{i}{4}\frac{1}{-1-i} - \frac{i}{4}\frac{1}{-1+i}\right) = -\frac{3}{8}.$$

Nie można jednak zapominać, że też

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{4}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{7}{8} - \frac{1}{4}\left(-\operatorname{res}_{-i}\frac{\pi \operatorname{ctg}\pi z}{z^2+1} - \operatorname{res}_{i}\frac{\pi \operatorname{ctg}\pi z}{z^2+1}\right)$$

$$= \frac{7}{8} - \frac{1}{4}\left(-\left(-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctgh}\pi\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctgh}\pi\right)\right)$$

$$= \frac{7}{8} - \frac{\pi}{4}\operatorname{ctgh}\pi.$$

(Jedna osoba tak liczyła, coś tylko gubiąc po drodze, a potem źle licząc $\cos(\pi i)$, $\sin(\pi i)$.)

P. M.