Zadanie 1.

1. a) Niech $f(z) = -\frac{1}{6}z^3\sin(z) + e^{z^2} - \cos^2(z^2)$ i $g(z) = z\mathrm{Log}(z^2+1) - z^3$. Znaleźć współczynniki $c_0, \ldots, c_4$ rozwinięcia Maclaurina $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ oraz część główną rozwinięcia Laurenta funkcji f/g wokół zera.

Rozwiązanie

Mamy

$$-\frac{1}{6}z^3\sin(z) = -\frac{1}{6}z^3(z+o(z)) = -\frac{z^4}{6} + o(z^4) \quad (1)$$

$$e^{z^2} == 1 + z^2 + \frac{z^4}{2} + o(z^4) \quad (2)$$

$$\cos^2(z^2) == \left(1 - \frac{z^4}{2} + o(z^4)\right)\left(1 - \frac{z^4}{2} + o(z^4)\right) = 1 - z^4 + o(z^4) \quad (3)$$

$$f(z) == (1) + (2) - (3) = z^2 + \left(\frac{-1}{6} + \frac{1}{2} + 1\right) z^4 + o(z^4) = z^2 + \frac{4}{3} z^4 + o(z^4)$$

Dalej

$$g(z) = z\log(z^2+1) - z^3 = z\left(z^2 - \frac{z^4}{4} + \frac{z^6}{3} + o(z^6)\right) = -\frac{z^5}{2} + \frac{z^7}{3} + o(z^7)$$

Stąd

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{z^2 + \frac{4}{4}z^4 + o(z^4)}{-\frac{z^5}{2} + \frac{z^7}{3} + o(z^7)} = -\frac{2}{z^3}\,\frac{1 + \frac{4z^2}{3} + o(z^2)}{1 - \frac{2z^2}{3} + o(z^2)} =$$

$$\left(-\frac{2}{z^3}\right)\left(1 + \frac{4z^2}{3} + o\, z^2\right)\left(1 - \frac{2z^2}{3} + o(z^2)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{-2}{z^3}\left(1 + \frac{4z^2}{3} + o(z^2)\right)\left(1 + \frac{2}{3}z^2 + o(z^2)\right) = -\frac{2}{z^3} - \frac{4}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

b) Obliczyć $\int_{[0,1+\mathbf{i}]} z\sin(\pi z^2)dz$

Rozwiązanie

Funkcja $f(z) = z\sin(\pi z^2)$ jest całkowita z funkcją pierwotną $F(z) = -\frac{\cos(\pi z^2)}{2\pi} + c$ (to łatwo sprawdzić różniczkując funkcję F, jako że reguły różniczkowania w dziedzinie zespolonej są takie same jak w rzeczywistej). W związku z czym całka jest równa $F(1+i) - F(0) = -\frac{\sinh^2(\pi)}{\pi}$. Odpowiedź można podać także w wielu innych formach, np. $-\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}{4\pi}$.

c) Obliczyć $\int_{|z|=2} \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z} dz$

Rozwiązanie

Metoda I.

Funkcja $f(z) = \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}$ ma osobliwości w punktach -1 i 0 wewnątrz koła $|z| = 2$. Obliczamy residua w tych punktach. Odpowiedź będzie $2\pi i$ (suma residuów).

residuum w 1

osobliwiść jest biegunem prostym, więc residuum jest $(-1)^3 e^{-1} = \frac{-1}{e}$.

residuum w 0

Znajdujemy szereg Laurenta w 0:

$$\frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1} = z^3\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + 1 + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \cdots\right)(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots)$$

(osobliwość istotna). Szukamy współczynnnika $\frac{1}{z}$. Wynosi on:

$$\frac{1}{4\,!} - \frac{1}{5\,!} + \frac{1}{6\,!} - \cdots$$

co można zapisać jako

$$e^{-1} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$$

Czyli suma residuów wynosi $\frac{-1}{e} + \frac{1}{e} - \frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$ a całka $-2\pi\frac{i}{3}$.

Metoda II.

Obliczamy residuum w nieskończoności funkcji $f(z)$. Residuum wynosi $-c_{-1}$ gdzie c_{-1}jest współczynnikiem $\frac{1}{z}$ w szeregu Laurenta $f(z)$ w nieskończoności. Ten szereg obliczmy tak zamo jak powyżej, z tą różnicą że szereg $(1+z)^{-1}$ piszemy dla $|z| > 1$. Czyli:

$$\frac{z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\cdots\right)}{\left(1+\frac{1}{z}\right)} == z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}\cdots\right)\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\cdots\right)$$

Z tąd widzimy że współczynnik $\frac{1}{z}$ wynosi $\frac{1}{3!}-1+1-\frac{1}{2}=\frac{-1}{3}$ a residuum w nieskóńczoności $\frac{1}{3}$. Sama całka wynosi $-2\pi i$ (residuum w nieskończoności) czyli $-2\pi\frac{i}{3}$, jak powyżej.