Uwaga: wywieszam te notatki z dobrodziejstwem inwentarza – w szeregu miejsc odwołania do wcześniejszych wyników czy zadań są niewypełnione, by wymienić tylko ewidentne braki. Wywieszane tu wcześniej zadania są skopiowane na końcu.

§ 1. Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe

1. Definicje i zadania wstępne.

Niech V będzie rzeczywistą lub zespoloną przestrzenią wektorową (=liniową).

Definicja. **Odcinkiem** (domkniętym) w V, o końcach $x_1, x_2 \in V$, nazywamy zbiór $[x_1, x_2] = \{tx_1 + (1 - t)x_2 : t \in [0, 1]\}$.

Zadanie 1. Udowodnić następujący **aksjomat Pascha**: gdy $b' \in [a, v]$ i $a' \in [b, v]$, to $[a, a'] \cap [b, b'] \neq \emptyset$.

Definicja. Zbiór $X \subset V$ nazywamy **wypukłym**, gdy $[x_1, x_2] \subset X$ dla każdych $x_1, x_2 \in X$. Spośród wszystkich wypukłych nadzbiorów danego zbioru $A \subset V$ istnieje najmniejszy (dlaczego?); nazywamy go **uwypukleniem** lub **powłoką wypukłą** zbioru A i oznaczamy $\operatorname{conv}(A)$.

Zadanie 2. a) $\operatorname{conv}(A) = \{t_1a_1 + \dots t_na_n : n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in A, t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ oraz $\sum_i t_i = 1\}$.

b) Gdy zbiory $X, Y \subset V$ są wypukłe i niepuste, to $\operatorname{conv}(X \cup Y) = \bigcup\{[x, y] : x \in X, y \in Y\}$.

Definicja. Funkcję $p : X \to [-\infty, \infty)$, gdzie $X \subset V$, nazywamy **wypukłą**, jeśli X jest zbiorem wypukłym i $p(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq tp(x_1) + (1 - t)p(x_2)$ dla $x_1, x_2 \in X$ i $t \in (0, 1)$. (Przyjmujemy $t \cdot (-\infty) = -\infty = (-\infty) + s = (-\infty) + (-\infty)$ dla $s \in \mathbb{R}, t \in (0, 1)$. Wartość $-\infty$ dopuszczamy ze względu na poniższe zadanie.)

Zadanie 3. Niech $A \subset V \times \mathbb{R}$ będzie zbiorem wypukłym, którego rzut na V oznaczmy przez X. Wówczas funkcja $p : X \to [-\infty, \infty)$, określona wzorem $p(x) = \inf\{c : (x, c) \in A\}$, jest wypukła.

Zadanie 4. a) Jeśli funkcja $p : X \to [-\infty, \infty)$ jest wypukła i zbiór X jest symetryczny względem 0_V (tzn. $-X = X$), to $p(0_V) = \{-\infty\}$ lub $p(X) \subset \mathbb{R}$.

b) Gdy funkcje $p : X \to \mathbb{R}$ i $-p$ obie są wypukłe, to p jest **funkcją $\mathbb{R}$–afiniczną**, tzn. $p(ty + (1 - t)z) = tp(y) + (1 - t)p(z)$ dla $x, y \in X$ i $t \in [0, 1]$.

Uwaga 1. Przy $A = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : t > p(x)\}$ i $\widetilde{A} = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : t \geq p(x)\}$, wypukłość funkcji $p : X \to \mathbb{R}$ jest równoważna wypukłości któregokolwiek ze zbiorów A lub $\widetilde{A}$, a także temu by $\operatorname{conv}(A) \subset \widetilde{A}$, czy też by $\operatorname{conv}(\{(x, p(x)) : x \in X\}) \subset \widetilde{A}$. Dowód jest polecany jako ćwiczenie, choć z uwagi dalej nie korzystamy.

Zadanie 5. Niech $X \subset V$ będzie zbiorem wypukłym, takim, że $0_V \in X$. Wówczas:

a) Zbiór $V_0 = \{sx - ty : x, y \in X, s, t \in [0, \infty)\}$ jest powłoką liniową zbioru X.

b) Każdą funkcję $\mathbb{R}$–afiniczną $\varphi_0 : X \to \mathbb{R}$ taką, że $\varphi_0(0_V) = 0_{\mathbb{R}}$, można przedłużyć do funkcji $\mathbb{R}$–liniowej $\varphi : V \to \mathbb{R}$. (Wskazówka: sprawdzić, że wzór $sx - ty \mapsto s\varphi_0(x) - t\varphi_0(y)$ poprawnie określa przedłużenie na V_0. Rozszerzenie na V uzyskać korzystając z twierdzenia z GALu: $V = V_0 \oplus V_1$ dla pewnej podprzestrzeni V.)

2. Twierdzenia Kakutaniego, Mazura–Orlicza oraz wersja Mazura tw. Hahna–Banacha.

Twierdzenie 1 (Kakutaniego). *Rozłączne, wypukłe podzbiory A i B rzeczywistej lub zespolonej przestrzeni wektorowej V można powiększyć do zbiorów $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$, które nadal są rozłączne i wypukłe, lecz których suma mnogościowa jest całą przestrzenią: $\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = V$.*

Dowód. W zbiorze wszystkich par (P, Q) wypukłych podzbiorów przestrzeni V takich, że $P \supset A$ i $Q \supset B$, wprowadźmy relację $(P, Q) \succ (P', Q') \Leftrightarrow P \supset P'$ i $Q \supset Q'$. Wśród par, dla których ponadto $P \cap Q = \emptyset$, istnieje na mocy lematu Kuratowskiego–Zorna para maksymalna $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$. Pozostaje dowieść, że $\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = V$.

Przypuśćmy, że jest przeciwnie i niech $v \notin \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$. Ponieważ $(\mathrm{conv}(\widetilde{A} \cup \{v\}), \widetilde{B}) \succ (\widetilde{A}, \widetilde{B})$, więc z maksymalności pary $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ wynika, że $\mathrm{conv}(\widetilde{A} \cup \{v\}) \cap \widetilde{B} \neq \emptyset$, a tym samym $[a, v] \cap \widetilde{B} \neq \emptyset$ dla pewnego $a \in \widetilde{A}$. (Korzystamy z zadania 2 b).) Tak samo, $[b, v] \cap \widetilde{A} \neq \emptyset$ dla pewnego $b \in \widetilde{B}$. Istnieją więc $a, a' \in \widetilde{A}$ i $b, b' \in \widetilde{B}$ takie, że $a' \in [b, v]$ i $b' \in [a, v]$. Ale wtedy $[a, a'] \subset \widetilde{A}$ i $[b, b'] \subset \widetilde{B}$ wobec wypukłości zbiorów $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$, a także $[a, a'] \cap [b, b'] \neq \emptyset$ na mocy zadania 1. Otrzymaliśmy sprzeczność, bo $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \emptyset$, i to kończy dowód twierdzenia.□

Twierdzenie 2 (wersja twierdzenia S. Mazura i W. Orlicza). *Gdy $S \subset V \times \mathbb{R}$ jest zbiorem, którego rzut na V jest symetryczny względem 0_V, to równoważne są warunki:*
a) istnieje funkcja $\mathbb{R}$–liniowa $\varphi : V \to \mathbb{R}$, której **wykres leży pod zbiorem** *S, tzn. $\varphi(x) \leq c$ dla każdych $(x, c) \in S$,*
b) $\sum_\gamma t_\gamma c_\gamma \geq 0$ dla każdych skończonych układów $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset (0, \infty)$ i $\{(x_\gamma, c_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma} \subset S$ takich, że $\sum_\gamma t_\gamma x_\gamma = 0$,
c) zbiór $\{c \in \mathbb{R} : (0_V, c) \in \mathrm{conv} S\}$ jest rozłączny z $(-\infty, 0)$.

Dowód. Gdy φ zaświadcza o prawdziwości a), to $\sum_\gamma t_\gamma c_\gamma \geq \sum_\gamma t_\gamma \varphi(x_\gamma) = \varphi(\sum_\gamma t_\gamma x_\gamma) = 0$ dla każdych układów $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ i $\{(x_\gamma, c_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ opisanych w b). Zatem a)⇒b), a dowód implikacji b)⇒c) jest równie prosty.

Niech teraz spełniony będzie warunek c) i przyjmijmy $A = \mathrm{conv}(S \cup \{(0_V, 0_{\mathbb{R}})\})$, $B = \{0_V\} \times (-\infty, 0)$. Zbiory te są rozłączne na mocy założenia i zadania 2. (Wykorzystujemy to, że $A \subset \mathrm{conv}(\{0, 0\} \cup \mathrm{conv} S)$.) Z twierdzenia Kakutaniego wynika więc istnienie rozłącznych zbiorów wypukłych $\widetilde{A}, \widetilde{B} \subset V \times \mathbb{R}$ takich, że $A \subset \widetilde{A}, B \subset \widetilde{B}$ i $\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = V \times \mathbb{R}$.

Oznaczmy przez X uwypuklenie rzutu zbioru S na V, a przez $\varphi_0 : X \to [-\infty, \infty)$ funkcję $x \mapsto \inf\{c : (x,c) \in \widetilde{A}\}$. Zbiór X jest wypukły i symetryczny względem 0_V; ponadto $\varphi_0(0_V) = 0$ i wykres funkcji φ_0 leży pod zbiorem S. Z zadań 3 i 4a) wnosimy, że funkcja ta jest wypukła i nie przyjmuje wartości $-\infty$. Ponieważ $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$ przecinają prostą $\{x\}\times\mathbb{R}$ wzdłuż dopełniających się zbiorów wypukłych, więc zachodzi też $\varphi_0(x) = \sup\{c \in \mathbb{R} : (x,c) \in \widetilde{B}\}$, skąd wynika jak wyżej wypukłość funkcji $-\varphi_0$. Na podstawie zadań 4b) i 5b) funkcja $\varphi_0 : X \to \mathbb{R}$ jest $\mathbb{R}$–afiniczna i daje się rozszerzyć do szukanej w a) funkcji $\mathbb{R}$–liniowej $\varphi : V \to \mathbb{R}$.□

Twierdzenie 3 (wzmocnienie Mazura tw. Hahna–Banacha)**.** *Niech V_0 będzie podprzestrzenią rzeczywistej lub zespolonej przestrzeni liniowej V, a funkcje $\mathbb{R}$–liniowa $\varphi_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ i wypukła $p : V \to \mathbb{R}$ niech spełniają warunek $\varphi_0 \leq p_{|V_0}$. Wówczas φ_0 można przedłużyć do $\mathbb{R}$–liniowej funkcji $\varphi : V \to \mathbb{R}$ takiej, że $\varphi \leq p$.*

<u>Dowód.</u> Niech $q(v) = p(v)$ dla $v \in V \setminus V_0$ i $q(v) = \varphi(v)$ dla $v \in V_0$. Wystarczy dowieść, że wykres funkcji q spełnia warunek b) twierdzenia 2. Istotnie, funkcjonał $\varphi \leq q$, istniejący na mocy tego twierdzenia, spełni warunki $\varphi(v) \leq p(v)$ gdy $v \notin V_0$ oraz $\varphi(v) \leq \varphi_0(v) \leq p(v)$ gdy $v \in V_0$. Da to $\varphi \leq p$ i $\varphi_{|V_0} \leq \varphi_0$, a więc i $\varphi_{|V_0} = \varphi_0$ na podstawie antysymetrii funkcjonałów $\varphi_{|V_0}$ i φ_0.

Sprawdzenie warunku b) jest treścią zadania 10.⊟

3. Przedłużanie funkcjonałów zespolonych

Lemat 1. *Gdy $\psi : V \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem $\mathbb{R}$–liniowym na zespolonej przestrzeni wektorowej V, to istnieje dokładnie jeden $\mathbb{C}$–liniowy funkcjonał $\varphi : V \to \mathbb{C}$ taki, że $\psi = \mathrm{Re}\varphi$; jest on zadany wzorem*

$$\varphi(v) = \psi(v) - i\psi(iv) \quad dla\ v \in V. \tag{1}$$

Ponadto, gdy $p : V \to \mathbb{R}$ jest funkcją spełniającą warunek

$$p(\lambda \mathbf{v}) = p(v)\ \ dla\ wszystkich\ \ v \in V\ \ i\ \ \lambda \in \mathbb{C}\ takich,\ że\ |\lambda| = 1, \tag{2}$$

to $(|\varphi| \leq p) \Leftrightarrow (\psi \leq p)$.

<u>Dowód.</u> Jedyność φ i poprawność wzoru (1) udowodniono na AF I. Gdy spełniony jet warunek (2) i $\psi \leq p$, to dla danego $v \in V$ przyjmijmy $\lambda = |\varphi(v)|/\varphi(v)$ jeśli $\varphi(v) \neq 0$, zaś $\lambda = 1$ jeśli $\varphi(v) = 0$. Wówczas $|\varphi(v)| = \varphi(\lambda v) = \psi(\lambda v) \leq p(\lambda v)$ (druga równość wynika stąd, że $\varphi(\lambda v) \in \mathbb{R}$). Ponieważ $|\lambda| = 1$, więc $p(\lambda v) = p(v)$, skąd $|\varphi(v)| \leq p(v)$.□

Wniosek 1 (Sobczyk, Bohnenblust). *Niech V_0 będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, zaś funkcje wypukła $p : V \to \mathbb{R}$ i liniowa $\varphi_0 : V_0 \to \mathbb{F}$ niech spełniają warunek $\mathrm{Re}\varphi_0 \le p_{|V_0}$. Wówczas φ_0 można przedłużyć do funkcji liniowej $\varphi : V \to \mathbb{F}$ takiej, że $\mathrm{Re}\varphi \le p$. Jeśli funkcja p spełnia warunek (2), to przedłużona funkcja φ spełnia warunek $|\varphi| \le p$.*$\square$

4. Zadania i problemy

Zadanie 6. (Przypomnienie GALu.) Dowieść, że gdy ψ i φ są funkcjonałami liniowymi na przestrzeni wektorowej V i $\ker(\psi) \supset \ker(\varphi)$, to $\psi = \lambda \cdot \varphi$ dla pewnego skalara λ. Ogólniej, gdy $\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ są funkcjonałami liniowymi i $\ker(\psi) \supset \bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i)$, to ψ jest kombinacją liniową pozostałych funkcjonałów.

Zadanie 7. a) (Przypomnienie GALu.) Dla danej rzeczywistej przestrzeni liniowej wskazać przestrzeń zespoloną, zawierającą ją jako podprzestrzeń rzeczywistą.

b) To samo dla unormowanych przestrzeni liniowych. (Należy zdefiniować normę na otrzymanej przestrzeni zespolonej.)

Zadanie 8. Niech G będzie wypukłym podzbiorem przestrzeni V takim, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nG = V$. Zdefiniujmy **funkcjonał Minkowskiego** zbioru G wzorem $p(v) = \inf\{t \ge 0 : v \in tG\}$. Dowieść, że:

a) Zbiór $S = \bigcup_{t\ge 0} tG \times \{t\}$ jest wypukły i $p(v) = \inf\{t : (v,t) \in S\}$.

b) $p(tv) = tp(v)$ oraz $p(v+w) \le p(v) + p(w)$ dla $v, w \in V$ i $t \ge 0$. (Czy ma to związek z zadaniem 3?)

c) Jeśli $\bigcap_n (1/n)G = \{0\}$, to $p(v) \ne 0$ dla $v \ne 0$.

d) Gdy zbiór G jest zbalansowany (tzn. $\lambda G \subset G$ gdy $|\lambda| = 1$), to $p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$ dla $\lambda \in \mathbb{F}, v \in V$).

9. Udowodnić następujące twierdzenie Mazura i Orlicza: Gdy p jest funkcją wypukłą na rzeczywistej przestrzeni liniowej V, zaś S podzbiorem przestrzeni $V \times \mathbb{R}$, to do istnienia funkcji liniowej $\varphi : V \to \mathbb{R}$, której wykres leży nad zbiorem S i pod wykresem funkcji p potrzeba i wystarcza, by dla każdych skończonych układów $\{(x_\gamma, c_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \subset S$ i $\{t_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset (0, \infty)$ spełniona była nierówność $\sum_\gamma t_\gamma c_\gamma \le p(\sum_\gamma t_\gamma x_\gamma)$.

10. W oparciu o tw. Mazura i Orlicza z zadania 9 dowieść następujących „twierdzeń o momentach":

a) Niech S będzie podzbiorem przestrzeni $V \times \mathbb{R}$, gdzie V jest rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Wówczas do istnienia funkcjonału $\varphi \in V^*$, którego wykres leży nad zbiorem S i który spełnia warunek $||\varphi|| \le M$, potrzeba i wystarcza, by dla każdych skończonych układów $\{(x_\gamma, c_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \subset S$ i $\{t_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset (0, \infty)$ spełniona była nierówność $\sum_\gamma t_\gamma c_\gamma \le M|| \sum_\gamma t_\gamma x_\gamma||$.

b) Przy powyższych oznaczeniach, funkcjonał $\varphi \in V^*$ o wykresie leżącym nad zbiorem S istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy ostatni warunek jest spełniony dla pewnej stałej $M < \infty$.

c) Jakie warunki otrzymamy w a) i b), gdy „wykres leży nad zbiorem" zamienić na „wykres zawiera zbiór"?

11. Niech podprzestrzeń liniowa V przestrzeni $\ell_\infty^{\mathbb{R}}(T)$ i rodzina G przekształceń zbioru T będą takie, że $1_T \in V$ i $f \circ g \in V$ dla wszystkich $f \in V$ i $g \in G$. (Elementy $\ell_\infty^{\mathbb{R}}(T)$ traktujemy jako ograniczone funkcje rzeczywiste na T, zaś 1_T to funkcja stała, równa 1.) Dowieść równoważności warunków:

a) Na przestrzeni V istnieje nieujemny funkcjonał liniowy φ taki, że $\varphi(1_T) = 1$ i $\varphi(f \circ g) = \varphi(f)$ dla wszystkich $f \in V$ i $g \in G$. („Nieujemny" oznacza, że $\varphi(f) \geq 0$ dla nieujemnych funkcji $f \in V$.)

b) Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $f_1, \ldots, f_n \in V, g_1, \ldots, g_n \in G$ zachodzi $\sup \sum_{i=1}^n (f_i \circ g_i - f_i) \geq 0$. (Ostatnia suma jest funkcją na zbiorze T i chodzi o jej kres górny.)

Problem 1. Dowieść, że warunek b) w ostatnim zadaniu jest spełniony jeśli rodzina G jest przemienna i zamknięta ze względu na składanie. Wywnioskować, że każda grupa przemienna G jest **średniowalna** (ang. „amenable"), tzn. na $\ell_\infty(G)$ istnieje nieujemny funkcjonał liniowy $\varphi \neq 0$ taki, że $\varphi(f) = \varphi(f_g)$ dla wszystkich $f \in \ell_\infty(G)$ i $g \in G$, gdzie $f_g(x) = f(x + g)$ dla $x \in G$.

Problem 2. Dowieść następującego twierdzenia Banacha: na przestrzeni $\ell_\infty^{\mathbb{R}}([0, \infty))$ istnieje funkcjonał liniowy φ taki, że $\underline{\lim}_{t\to\infty} f(t) \leq \varphi(f) \leq \overline{\lim}_{t\to\infty} f(t)$ oraz $\varphi(f) = \varphi(t \mapsto f(t + s))$ dla każdej funkcji $f \in \ell_\infty([0, \infty))$ i każdej liczby $s \geq 0$.

Problem 3. Udowodnić kolejne twierdzenia Banacha:

a) Na przestrzeni $V = \ell_\infty(T)$, gdzie T to okrąg $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, istnieje nieujemny funkcjonał liniowy φ taki, że $\varphi(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt$ dla funkcji mierzalnych $f \in V$ i $\varphi(f) = \varphi(f_g)$ dla $g \in T$ i $f \in V$. (Oznaczenia jak w problemie 1; T jest grupą względem mnożenia.)

b) Wywnioskować, że miarę Lebesgue'a na prostej $\mathbb{R}$ można rozszerzyć do nieujemnej miary addytywnej, określonej na wszystkich podzbiorach prostej $\mathbb{R}$ i niezmienniczej względem dowolnej izometrii tejże. (Miara taka przyjmuje m.in. wartość ∞; nie może ona być przeliczalnie addytywna. Banach udowodnił też, że można w b) zastąpić prostą $\mathbb{R}$ przez płaszczyznę $\mathbb{R}^2$, lecz – wraz z Tarskim – nie przez przestrzeń $\mathbb{R}^3$.)

§ 2. Przestrzenie liniowo–topologiczne.

1. Podstawowe pojęcia i wyniki

Definicja. **Przestrzenią liniowo-topologiczną** nazywamy przestrzeń wektorową nad cialem $\mathbb{F} \in \{R, \mathbb{C}\}$, na której wyróżniono topologię $\mathcal{T}$ taką, że
1) $\{0_X\}$ jest zbiorem domkniętym
2) działania liniowe

$$X \times X \ni (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \in X \quad \text{i} \quad \mathbb{F} \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in X$$

są ciągłe, gdy X rozpatrywać z topologią $\mathcal{T}$, $\mathbb{F}$ z naturalną topologią, a $X \times X$ i $\mathbb{F} \times X$ z topologią produktową.

Uwaga 1. Gdy X jest przestrzenią liniowo-topologiczną (PLT), to przekształcenia $m_\lambda : X \to X$ i $S_a : X \to X$, zadane wzorami

$$m_\lambda(x) = \lambda x \quad \text{i} \quad S_a(x) = a + x$$

są homemorfizmami, dla każdych $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ i $a \in X$. Wobec tego gdy zbiór $U \subset X$ jest otwarty, to zbiór λU i $a + U$ też, dla każdych $a \in X$ i $\lambda \neq 0$.

Ze względu na niezmienniczość topologii $\mathcal{T}$ względem przesunięć, jest ona wyznaczona przez bazę $\mathcal{B}_0$ otoczeń zera. Baza ta ma następujące własności:
i) $\bigcap \mathcal{B}_0 = \{0\}$;
ii) Dla każdego $U \in \mathcal{B}_0$ istnieją $V \in \mathcal{B}_0$ i $\varepsilon > 0$ takie, że $D_\varepsilon \cdot V \subset U$, gdzie

$$D_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda| \leq \varepsilon\}$$

iii) Dla każdego $U \in \mathcal{B}_0$ zachodzi $\bigcup_n nU = X$;
iv) Dla każdego $U \in \mathcal{B}_0$ istnieje $V \in \mathcal{B}_0$ takie, że $V + V \subset U$;
v) Dla każdych $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ istnieje $V \in \mathcal{T}$ takie, że $V \subset U_1 \cap U_2$;
Powyżej, i) wynika z domkniętości zbioru $\{0\}$ i uwagi 1, v) – z definicji bazy otoczeń, iv)–z ciągłości w $(0, 0)$ operacji dodawania wektorów, z zaś ii) oraz iii) – z ciągłości w punktach $(0_\mathbb{F}, 0_V)$ i $(0_\mathbb{F}, x)$ operacji mnożenia wektorów przez skalary.

Definicja. Podzbiór A przestrzeni wektorowej nazywamy **zaokrąglonym** (odp. **zbalansowanym**, gdy $\lambda A \subset A$ dla wszystkich skalarów takich, że $|\lambda| = 1$ (odp. takich, że $|\lambda| \leq 1$). Zbiór A nazywamy **absolutnie wypukłym**, gdy jest zbalansowany i wypukły.

Uwaga 2. Dla każdego zbioru $V \subset X$ i każdego $\varepsilon > 0$, zbiór $D_\varepsilon \cdot V$ jest zbalansowany, a jego uwypuklenie jest zbiorem absolutnie wypukłym.

Wniosek 1. *W przestrzeni LT,*
a) Każde otoczenie zera zawiera zbalansowane otoczenie zera,
b) Każde wypukłe otoczenie zera zawiera absolutnie wypukle otoczenie zera.

Dowód. Wynika to z uwagi i własności ii).□

Twierdzenie 1. *Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, zaś $\mathcal{B}_0$ rodziną jej podzbiorów, spełniającą warunki od i) do v). Wówczas na X określić można topologię $\mathcal{T}$ taką, że $\mathcal{B}_0$ jest w niej (pewną) bazą otoczeń zera i $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią LT.*

Dowód. Nazwijmy zbiór $G \subset X$ otwartym, gdy dla każdego $x \in G$ zachodzi $x+U \subset G$ dla pewnego $U \in \mathcal{B}_0$. Rodzina $\mathcal{T}$ wszystkich takich zbiorów U jest zamknięta ze względu na skończone przecięcia (to wynika z iv)) i dowolne sumy; a że $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, więc $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią topologiczną. Z definicji, topologia $\mathcal{T}$ jest translacyjnie niezmiennicza (tzn. $x + U \in \mathcal{T}$ dla $U \in \mathcal{T}$ i $x \in X$); ponadto, operacja dodawania wektorów jest ciągła w $(0, 0)$ na podstawie iv). Stąd już wynika ciągłość tej operacji w dowolnym punkcie $(x_1, x_2) \in X \times X$ oraz (na podstawie i)) domkniętość zbioru $\{0\}$. Podobnie, z ii) wynika ciągłość w $(0_\mathbb{F}, 0_X)$ operacji mnożenia skalarów przez wektory.

Dowiedziemy teraz, że dla danego $x \in X$ funkcja $\mathbb{F} \ni \lambda \mapsto \lambda x \in X$ jest ciągła w $0_\mathbb{F}$. Istotnie, dla danego $U \in \mathcal{B}_0$ możemy obrać $V \in \mathcal{B}_0$ i $\varepsilon > 0$ tak, by $D_\varepsilon \cdot V \subset U$. Gdy przez $n \in \mathbb{N}$ oznaczyć liczbę taką, że $\frac{1}{n}x \in V$, istniejącą na podstawie ...., to stwierdzamy, że dla $\lambda \in D_{\varepsilon/n}$ zachodzi $\lambda x \in U$, jak żądano.

Kolejnym krokiem jest udowodnienie ciągłości w 0_X funkcji $x \mapsto \lambda x$, dla ustalonego $\lambda \in \mathbb{F}$. W tym celu ustalmy $U \in \mathcal{B}_0$ i dobierzmy $W_0 \in \mathcal{B}_0$ oraz $k, l \in \mathbb{N}$ tak, by $D_{2^{-k}} \cdot W_0 \subset U$ i $2^l > |\lambda|$. Następnie wykorzystajmy .... do znalezienia zbioru $W_1 \in \mathcal{B}_0$ takiego, by $W_1 + \cdots + W_1 \subset W_0$, gdzie składników jest 2^{k+l}. Wówczas $W_1 \subset W := D_{1/2^{k+l}} \cdot W_0$, wobec czego tak zdefiniowany zbiór W jest abslolutnie wypukłym otoczeniem zera w topologii $\mathcal{T}$, i to zawartym w $2^{-l}U$. (Korzystamy z Uwagi.) Gdy więc $x \in W$, to $\lambda x = 2^l(\frac{\lambda}{2^l}x) \in 2^l W \subset U$, jak żądano.

Ponieważ

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda_0(x - x_0)$$

więc z ostatnich trzech stwierdzeń wynika ciągłość funkcji $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ w dowolnym punkcie (λ_0, x_0). (Istotnie, gdy punkt ten oraz zbiór $U \in \mathcal{B}_0$ są dane, to stwierdzamy, że $W + W + W \subset U$ dla pewnego $W \in \mathcal{B}_0$, i można obrać $\varepsilon > 0$ oraz $V \in \mathcal{B}_0$ tak, by dla $\mu \in D_\varepsilon$ i $y \in V$ zachodziło $\{\mu y, \mu x_0, \lambda_0 y\} \subset W$ – co daje $\lambda x - \lambda_0 x_0 \in U$ gdy $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ i $x - x_0 \in V$.) Zatem $(X, \mathcal{T})$ jest PLT.

Pozostaje dowieść, że $0 \in \mathrm{Int}_\mathcal{T}\mathrm{U}$ dla każdego zbioru $U \in \mathcal{B}_0$. Gdy jednak ustalimy U i obierzemy $V \in \mathcal{B}_0$ tak, by $V + V \subset U$, to dla $x \in V$ mamy $x + V \subset U$, wobec czego $x \in \mathrm{Int}_\mathcal{T}\mathrm{U}$.□

Uwaga 3. Z fragmentów dowodu wynika, że istnieje tylko jedna topologia $\mathcal{T}$ o wymienionych w twierdzeniu 1 własnościach.

Twierdzenie 2 (Birkhoff, Kakutani)**.** *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią LT, w której 0 ma (pewną) przeliczalną bazę otoczeń. Wówczas istnieje metryka d na przestrzeni X, która jest* **translacyjnie niezmiennicza** *(tzn. $d(x, y) = d(x + a, y + a)$ dla $x, y, a \in X$) i zadaje topologię tej przestrzeni.*

Uwaga 4. a) Translacyjnie niezmiennicza metryka d na X jest jednoznacznie wyznaczona przez funkcję $p : X \to [0, \infty)$, zadaną wzorem $p(x) = d(x, 0)$. Funkcja ta ma następujące własności

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ i } \ p(x + y) \leq p(x) + p(y) \ \text{ dla } x, y \in X$$

Przeciwnie, gdy p ma powyższe własności, to wzór $d(x, y) = p(x - y)$ zadaje translacyjnie niezmienniczą metrykę na X.

b) Translacyjnie niezmienniczą metrykę na X można zawsze zmienić tak, by odpowiadająca jej funkcja p spełniała dodatkowy warunek

$$p(\lambda x) \leq p(\mu x) \text{ dla } x \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ takich, że } |\lambda| \leq |\mu|$$

i by zmieniona metryka wyznaczała tą samą co poprzednia topologię. W tym celu wystarczy przyjąć $p_1(x) = \sup\{d(\lambda x, 0) : |\lambda| \leq 1\}$ i $d_1(x, y) = p_1(x, y)$. Nierówność trójkąta dla d_1 wynika łatwo z tej nierówności dla d. Ponadto, dla zadanej liczby $r > 0$ można obrać zbalansowane otoczenie zera $W \subset B_d(0, r)$ oraz kulę $B_d(0, \varepsilon) \subset W$; wtedy dla $x \in B_d(0, \varepsilon)$ mamy $d_1(x, 0) \leq r$ i wobec tego kula $B_{d_1}(0, r)$ jest też otoczeniem zera w metryce d (bo zawiera kulę $B_d(0, \varepsilon)$). Wraz z dowolnościa liczby $r > 0$ i przesuwalnością obu metryk dowodzi to, że identyczność $(X, d) \to (X, d_1)$ jest przekształceniem ciągłym. Jest ona też ciągła jako przekształcenie z (X, d_1) do (X, d), bo $d \leq d_1$, wobec czego metryki d i d_1 wyznaczają tę samą topologię.$\square$

Odnotujmy, że bez dodatkowych założeń nie można w twierdzeniu 2 uzyskać, by funkcja p była normą. (Zajmiemy się tym w tw. ....Dowód twierdzenia 2 pominiemy (znaleźć go można w .....). Rozważymy tylko najważniejszy przypadek przestrzeni lokalnie wypukłych.

Definicja. a) Przestrzeń LT nazwiemy **lokalnie wypukłą**, gdy każde otoczenie zera w tej przestrzeni zawiera wypukłe otoczenie zera. (Z wniosku 1 wynika, że zawiera ono wtedy też absolutnie wypukłe otoczenie zera.)

b) Funkcję $p : X \to [0, \infty)$, określoną na przestrzeni wektorowej X, nazywamy **pseudonormą** lub **półnormą**, jeśli

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \ \text{ i } \ p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \ \text{ dla } \ x, y \in X, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Jeśli ponadto $p(x) \neq 0$ dla $x \neq 0$, to p nazywamy normą.

Twierdzenie 3. *Niech U będzie wypukłym podzbiorem przestrzeni wektorowej X, zawierającym 0 i pochłaniającym (tzn. takim, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nU = X$). Wówczas* **funkcjonał Minkowskiego** *zbioru U, zdefiniowany wzorem*

$$p_U(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in tU\} \quad dla \quad x \in X$$

jest dodatnio jednorodny (tzn. $p_U(tx) = tp_U(x)$ dla $x \in X$ i $t \geq 0$) i spełnia warunek trójkąta $p_U(x+y) \leq p_U(x) + p_U(y)$ dla $x, y \in X$. ⊟

Uwaga 5. a) Przy oznaczeniach twierdzenia ..., gdy ponadto zbiór U jest zbalansowany, to p_U jest pseudonormą, a gdy do tego $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}U = \{0\}$, to p_U jest normą.

b) Gdy X jest PLT, to zbiór $\{x : p_U(x) < 1\}$ zawiera wnętrze zbioru U.

c) Gdy p jest pseudonormą na X i $U = \{x \in X : p(x) < 1\}$, to $p_U = p$.

Twierdzenie 4. *Gdy X jest lokalnie wypukłą przestrzenią LT, to istnieje rodzina pseudonorm $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ taka, że rodzina kul jednostkowych $B_\gamma = \{x \in X : p_\gamma(x) < 1\}$ jest bazą otoczeń zera.*

Dodatek: Gdy ponadto 0 *ma w topologii przestrzeni X przeliczalną bazę otoczeń, to można przyjąć, że $\Gamma = \mathbb{N}$.*

Dowód. Obierzmy bazę $\mathcal{B}_0 = \{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ otoczeń zera, która w przypadku „dodatku" jest przeliczalna. Możemy zakładać, że baza ta składa się wyłącznie ze zbiorów absolutnie wypukłych (inaczej zastępujemy każdy zbiór $U \in \mathcal{B}_0$ przez mniejsze otoczenie absolutnie wypukłe) i jest zamknięta ze względu na skończone przecięcia (inaczej dorzucamy do niej te przecięcia). Niech p_γ oznacza fukcjonał Minkowskiego zbiory U_γ. Twierdzimy, że $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ jest szukaną rodziną pseudonorm. Istotnie, z części c) uwagi .... wynika, że rozważana rodzina kul skład się z otoczeń zera; a że ponadto $B_\gamma \subset U_\gamma$ dla każdego γ, więc $(B_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ jest bazą otoczeń zera.□

Twierdzenie 5. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie PLT, psiadającą przeliczalną bazę otoczeń zera. Wówczas na X istnieje przesuwalna metryka d, zadajaca topologię $\mathcal{T}$ i taka, że każda kula $B_d(0, r) = \{x \in X : d(x, 0) < r\}$ jest zbiorem wypuklym.*

Dowód. Niech $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rodziną pseudonorm, o której mowa w dodatku do twierdzenia .... Przyjmujemy

$$p(x) = \max_n \min(\frac{1}{n}, p_n(x)) \quad \text{dla } x \in X$$

Ponieważ pseudonormy p_n spełniają nierówność trójkąta, wiec p też ją spełnia. Ponadto $p(x) < r \Leftrightarrow p_n(x) < r$ gdy $\frac{1}{n} > r$, skąd dla wyznaczonej przez p metryki $d(x, y) = p(x - y)$ zachodzi $B_d(0, r) = \bigcap_{n<1/r}\{x : p(x) < r\}$. Kula $B_d(0, r)$ jest więc absolutnie wypukłym otoczeniem zera, jako skończone przecięcie takich.

Kule te tworzą też bazę otoczeń zera, bo kula o promieniu $1/2n$ jest zawarta w $U_n = \{x \in X : p_n(x) < 1\}$, a rodzina (U_n) jest bazą. Wynika stąd, że metryka d zadaje wyjściową topologię $\mathcal{T}$ przestrzeni X.$\square$

By wyjaśnić, kiedy metryka d w twierdzeniu .... może być wyznaczona przez normę, potrzebna jest następująca definicja. Niech X będzie PLT. Powiemy, że podzbiór $A \subset X$ jest **pochłaniany** przez zbiór $U \subset X$, gdy $A \subset nU$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Powiemy dalej, że zbiór A jest **ograniczony**, gdy jest pochłaniany przez każde otoczenie zera w przestrzeni X.

Twierdzenie 6 (Kołmogorowa)**.** *Na to, by PLT była normowalna (tzn., by jej topologia była wyznaczona przez pewna normę), potrzeba i wystarcza, by istniało w niej ograniczone i wypukłe otoczenie zera.*

Dowód. Wymieniony warunek jest konieczny, bo kula jednostkowa względem dowolnej normy jest zbiorem ograniczonym w topologii, wyznaczonej przez tą normę. Jest on też wystarczający, bo gdy opisane otoczenie U istnieje, to można zakładać, że jest ono zbiorem absolutnie wypukłym (patrz .....), a wtedy jego funkcjonał Minkowskiego p_U jest normą na rozważanej przestrzeni X. Kula jednostkowa B względem tej normy jest otoczeniem zera w X (bo zawiera IntU), więc podobnie jest dla kul $\frac{1}{n}B$ o promieniach $1/n$. Ponadto, każde otoczenie zera w X zawiera pewną krotność kuli (bo tę kulę pochłania) i wobec tego kule $\frac{1}{n}B$ tworzą bazę otoczeń zera w wyjściowej topologii $\mathcal{T}$. Oznacza to, że norma p_U zadaje tę topologię.$\square$

2. Niezwartość zbiorów otwartych i całkowanie borelowskich przekształceń w przestrzenie lokalnie wypukłe

Twierdzenie 1. *Niech μ będzie miarą regularną na przestrzeni zwartej K, niech X będzie lok. wyp. PLT i niech $f : K \to X$ będzie funkcją borelowską. Jeśli $f(K)$ jest podzbiorem zwartego i wypukłego zbioru $K' \subset X$, to istnieje dokładnie jeden punkt $x \in X$ taki, że dla każdego funkcjonału $\varphi \in X^*$ zachodzi $\int (\varphi \circ f)\ d\mu = \varphi(x)$.*

Punkt, o którym mówi teza, nazywamy całką funkcji f względem miary μ i oznaczamy $\int f\ \mathrm{d}\mu$.

§ 3. Twierdzenia Choqueta i Kreina–Milmana

Twierdzenie 1 (G. Choqueta, wersja dla kompaktów metryzowalnych)**.** *Niech K będzie zwartym wypukłym podzbiorem przestrzeni lokalnie wypukłej V. Jeśli zbiór ten jest metryzowalny, to dla każdego punktu $x_0 \in K$ istnieje regularna, borelowska miara probabilistyczna μ_0 na zbiorze E punktów ekstremalnych w K, dla której $x_0 = \int_E x d\mu_0$.*

W dowodzie wykorzystamy (por. zadania 4.2 i 6.5):

Lemat 1. *a) Przy założeniach twierdzenia istnieje ciągły operator liniowy $T : V \to \ell_2$, który jest różnowartościowy na K.*

b) Kwadrat normy $|| \ ||$ przestrzeni ℓ_2 jest funkcją ściśle wypukłą, tzn. $||ty + (1-t)z||^2 < t||y||^2 + (1-t)||z||^2$ dla $t \in (0,1)$ i $y, z \in \ell_2, x \neq y$.

Dowód twierdzenia (zaproponowany przez Bonsella). Ciągłe funkcje afiniczne z K do $\mathbb{R}$ oznaczać będziemy literami a, a_1 etc., zaś zbiór wszystkich tych funkcji – literą A. Ustalmy punkt $x_0 \in K$ i przyjmijmy

$$q(f) = \inf\{a(x_0) : a \in A \text{ i } \ a \geq f\} \qquad\qquad (f \in C^{\mathbb{R}}(K)\ )$$

Latwo stwierdzamy, że $q(c \cdot f_1 + f_2) \leq c \cdot q(f_1) + q(f_2)$ dla $f_1, f_2 \in C(K)$ i $c \geq 0$, wobec czego funkcja q jest wypukła. Ponadto zachodzi $q(f) \leq q(g)$ jeśli $f \leq g$, oraz $q(a) = a(x_0)$ dla $a \in A$.

Z lematu wynika istnienie ściśle wypukłej funkcji $f_0 \in C(K)$; jest nią np. funkcja $x \mapsto ||Tx||^2$, gdzie $T : K \to \ell_2$ to operator, o którym mowa w części a) lematu. Na podstawie twierdzenia 1.3 istnieje funkcjonał liniowy $\varphi : C(K) \to \mathbb{R}$ taki, że $\varphi \leq q$ i $\varphi(f_0) = q(f_0)$. Z monotoniczności q wynika, że gdy $f \leq 0$, to $\varphi(f) \leq q(f) \leq q(0) = 0$. Zatem funkcjonał φ jest nieujemny (tzn. $\varphi(f) \geq 0$ dla $f \geq 0$) i spełnia warunek $\varphi(a) = a(x_0)$ dla $a \in A$ (bo $\varphi(-a) \leq -a(x_0)$ i $\varphi(a) \leq a(x_0)$). W szczególności, $\varphi(1_K) = 1$.

Na podstawie twierdzenia reprezentacyjnego Riesza, φ jest całkowaniem względem pewnej regularnej, borelowskiej miary probabilistycznej μ na K (tzn. $\varphi(f) = \int_K f \mathrm{d}\mu$, gdzie miara μ ma wymienione własności). Zmierzać będziemy do wykazania, że $\int_K x \mathrm{d}\mu = x_0$ i $\mu(K \setminus E) = 0$. To zakończy dowód, gdyż za μ_0 będziemy mogli przyjąć obcięcie miary μ do zbioru E. Miara μ_0 będzie borelowska, probabilistyczna, regularna i spełni warunek $\int_E x \mathrm{d}\mu_0 = x_0$, bo μ ma takie własności, zaś zbiór E jest borelowski i pełnej miary.

Równość $\int_K x \mathrm{d}\mu = x_0$ wynika stąd, że dla każdej funkcji $a \in A$ zachodzi $\int_K a \mathrm{d}\mu = \varphi(a) = a(x_0)$; patrz .... By dowieść pozostałej własności obierzmy dla $n \in \mathbb{N}$ funkcje $a_n \in A$ spełniające warunki $a_n \geq f_0$ i $q(a_n) \leq 2^{-n} + q(f_0)$. Ponieważ $q(a_n) = a_n(x_0) = \varphi(a_n)$ i $q(f_0) = \varphi(f_0)$, więc

$$\int_K (a_n - f_0) \mathrm{d}\mu = \varphi(a_n - f_0) = q(a_n) - q(f_0) \leq 2^{-n} \qquad\qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o całkowaniu szeregów nieujemnych wynika więc, że zbiór tych punktów $x \in K$, dla których szereg $\sum_n (a_n - f_0)(x)$ jest rozbieżny, ma miarę 0. Pozostaje dowieść, że zbiór ten zawiera $K \setminus E$.

Niech więc punkt x nie będzie ekstremalny w K. Wówczas $x = (y+z)/2$, gdzie $y, z \in K$ i $y \neq z$. Wobec ścisłej wypukłości funkcji f_0 zachodzi $f_0(x) = (f_0(y) + f_0(z))/2 - \varepsilon$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Zatem

$$a_n(x) - f_0(x) = \varepsilon + \frac{1}{2}\big((a_n(y) - f_0(y)) + (a_n(z) - f_0(z))\big) \geq \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

bo $a_n \geq f_0$. Tym samym szereg $\sum_n (a_n - f_0)(x)$ jest rozbieżny gdy $x \in K \setminus E$, co kończy dowód.□

Twierdzenie 2 (Kreina–Milmana). *Każdy zwarty, wypukły podzbiór przestrzeni lokalnie wypukłej jest domknięciem uwypuklenia zbioru swych punktów ekstremalnych.*

Dowód. Udowodnimy to twierdzenie tylko dla metryzowalnych kompaktów wypukłych K. Niech E oznacza zbiór punktów ekstremalnych w K i niech $x_0 \in X$. Na mocy twierdzenia Choqueta istnieje miara probabilistyczna μ na E taka, że $x_0 = \int_E x d\mu_0$. Tym samym $x_0 \in \overline{\mathrm{conv}}(E)$ (patrz ....) i teza wynika z dowolności punktu $x_0 \in K$.□

Odmienny dowód twierdzenia (bez założenia metryzowalności) jest w zadaniu 5.4.

§ 4. Miara Haara

Definicja. Niech G będzie rodziną przekształceń zbioru X w X.

a) Mówimy, że funkcja φ, określona na pewnym zbiorze V funkcji $X \to \mathbb{F}$, jest G–**niezmiennicza**, jeśli

$$\text{dla } f \in V \text{ i } g \in G \text{ zachodzi } f \circ g \in V \text{ i } \varphi(f \circ g) = \varphi(f)$$

b) Mówimy, że funkcja μ, określona na rodzinie $\mathcal{M}$ podzbiorów zbioru X, jest G–niezmiennicza, jeśli

$$\text{dla } S \in \mathcal{M} \text{ i } g \in G \text{ zachodzi } g^{-1}(S) \in \mathcal{M} \text{ i } \mu(g^{-1}(S)) = \mu(S)$$

(Równoważnie: jest tak wtedy, gdy funkcja $1_S \mapsto \mu(S)$ jest niezmiennicza na zbiorze $V = \{1_S : S \in M\}$ funkcji charakterystycznych elementów rodziny $\mathcal{M}$.)

c) Gdy X jest grupą, to powyższe funkcje nazywamy **lewostronnie niezmienniczymi**, gdy są one niezmiennicze względem każdego przekształcenia $x \mapsto x_0 x$, gdzie $x_0 \in X$. Analogicznie definiujemy **prawostronną niezmienniczość**, zaś przez **obustronną niezmienniczość** rozumiemy koniunkcję tych własności.

d) Przypomnijmy, że przez $C_c(X)$ oznaczamy zbiór tych ciągłych funkcji skalarnych na X, które zerują się poza zbiorem zwartym; rozpatrujemy $C_c(X)$ jako popdrzestrzeń przestrzeni unormowanej $(l_\infty(X), \|\ \|_{\sup})$. (Dla zwartej przestrzeni X mamy więc

$C_c(X) = C(X)$.) Poniżej skalarami są liczby rzeczywiste. Przez $C_c^+(X)$ oznaczamy zbiór nieujemnych funkcji $f \in C_c(X) \setminus \{0\}$, zaś funkcjonał $\varphi : C_c(X) \to \mathbb{R}$ nazywamy **nieujemnym**, jeśli $\varphi(f) \geq 0$ dla wszystkich $f \in C_c^+(X)$.

Twierdzenie 1 (o istnieniu lewej całki Haara)**.** *Gdy X jest lokalnie zwartą grupą topologiczną, to na przestrzeni $C_c(X)$ istnieje niezerowy, lewostronnie niezmienniczy, nieujemny funkcjonał liniowy.*

Uwaga 1. a) Funkcjonał ten jest, na mocy twierdzenia Riesza (–Banacha–Kakutaniego–Markova), całkowaniem względem jednoznacznie przez φ wyznaczonej σ-addytywnej miary borelowskiej μ, spełniającej wymienione w tym twierdzeniu warunki regularności. Miara jest niezerowa oraz lewostronnie niezmiennicza (jako funkcja na rodzinie zbiorów borelowskich), co łatwo wynika z niezmienniczości funkcjonału. To prowadzi do równoważnego sformułowania twierdzenia 1, orzekającego istnienie **lewej miary Haara** na grupie X –czyli miary, posiadającej wszystkie wymienione własności.

b) Rozważając grupę $(X, *)$ z przestawionym mnożeniem (tzn. takim, że $g_1 * g_2 := g_2 \cdot g_1$) stwierdzamy, że lewostronna niezmienniczość może być zastąpiona przez niezmienniczość prawostronną; tak więc na X istnieją też **prawa całka Haara** i **prawa miara Haara**. W przypadku grupy zwartej, lewostronna niezmienniczość całki czy miary Haara implikuje niezmienniczość prawostronną (i vice versa); dla grup lokalnie zwartych tak jednak być nie musi.(Dowody są treścią zadań 7.5 i 6.4).

c) Miara Haara nie znika na żadnym zbiorze otwartym i wobec tego funkcjonał, o którym mowa w twierdzeniu, nie znika na żadnej różnej od 0 i nieujemnej funkcji $f \in C_c(X)$; patrz zadanie 7.4.

Twierdzenie 2. *Przy założeniu twierdzenia 1, jeśli funkcjonały φ_1 i φ_2 spełniają jego tezę, to $\varphi_1 = c\varphi_2$ dla pewnej stałej $c > 0$. (Równoważnie: dwie lewe miary Haara na grupie lokalnie zwartej są proporcjonalne.)*

A. Dowód istnienia miary Haara. Dowód twierdzenia 1 wykorzystuje dwa lematy, w zasadzie pochodzące od Haara. Oznaczmy przez G zbiór wszystkich „lewostronnych przesunięć” grupy X, czyli przekształceń $X \to X$ postaci $x \mapsto x_0 x$, gdzie $x_0 \in X$.

Lemat 1. *Niech $v \in C_c^+(X)$. Wówczas:*

a) Gdy $f \in C_c^+(X)$, to $v \circ g_1 + \cdots + v \circ g_k \geq f$ dla pewnych $g_1, \ldots g_k \in G$.

b) Funkcji v odpowiada G–niezmienniczy, monotoniczny, dodatnio jednorodny i podaddytywny funkcjonał $p_v : C_c^+(X) \to (0, \infty)$ określony wzorem

$$p_v(f) = \inf\{\sum_{j=1}^{k} c_j : k \in \mathbb{N},\ c_1, \ldots, c_k \geq 0 \quad i \quad \sum_j c_j(v \circ g_j) \geq f \quad dla\ pewnych\ g_1, \ldots, g_k \in G\} \tag{3}$$

Dowód. Ad a). Obierzmy zbiór zwarty K tak, by $f(x) = 0$ dla $x \notin K$, oraz zbiór otwarty U i liczbę naturalną l tak, by $v(x) > 1/l$ dla $x \in U$. Ponieważ działanie G na X jest tranzytywne (tzn. $Gx = X$ dla każdego punktu $x \in X$), więc rodzina $\{g(U) : g \in G\}$ jest otwartym pokryciem przestrzeni X i można z niej wybrać skończone pokrycie $\{g(U) : g \in G_0\}$ zbioru zwartego K. Wówczas dla każdego punktu $x \in K$ zachodzi $g^{-1}(x) \in U$ dla pewnego $g \in G_0$, wobec czego $\sum_{g \in G_0} v \circ g^{-1}(x) \geq 1/$. Powtarzając każdy element $g^{-1}, g \in G_0$, nie więcej niż $(||f|| + 1) \cdot l$ razy, otrzymujemy skończenie wiele $g_1, \dots g_k$ takich, że $\sum_i v \circ g_i(x) \geq ||f||$ dla każdego $x \in K$.

Ad b). Mamy $p_v(f) < \infty$ ze względu a). Ponadto, $p_v(f) \geq ||f||/||v|| > 0$ dla $f \in C_c^+$, bo gdy $\sum_j c_j(v \circ g_j) \geq f$, to $||f|| \leq \sum_j c_j ||v \circ g_j|| = (\sum_j c_j)||v||$. Pozostałe żądane własności (G-niezmienniczość etc.) funkcjonału p_v są oczywiste.□

Lemat 2. *Dla danych $\varepsilon > 0$ i funkcji $f_1, \dots, f_n \in C_c^+(X)$ istnieją niezerowe funkcje $v, h \in C_c^+(X)$ takie, że $h \leq 1_X$ i funkcjonał $p = p_v$ spełnia poniższą nierówność:*

$$\sum_{i=1}^n p(f_i) + \varepsilon p(h) \leq p(\sum_{i=1}^n f_i + 2\varepsilon h). \tag{4}$$

Udowodnimy obecnie twierdzenie, zakładając prawdziwość lematu 2.

a) Wpierw wykażemy, że dla każdych $n \in \mathbb{N}, g_1, \dots g_n \in G$ i $f_1, \dots, f_n \in C_c^+(X)$ zachodzi

$$\inf \sum_{i=1}^n (f_i \circ g_i - f_i) \leq 0 \tag{5}$$

Przypuśćmy bowiem, że liczba $\varepsilon = \frac{1}{2} \inf \sum_{i=1}^n (f_i \circ g_i - f_i)$ jest dodatnia, i obierzmy $p = p_v$ i h zgodnie z lematem 2. Ponieważ $\sum_{i=1}^n f_i \circ g_i \geq 2\varepsilon h + \sum_{i=1}^n f_i$, więc otrzymujemy sprzeczny ciąg nierówności

$$\varepsilon p(h) + \sum_{i=1}^n p(f_i) \leq p(2\varepsilon h + \sum_{i=1}^n f_i) \leq p(\sum_{i=1}^n f_i \circ g_i) \leq \sum_{i=1}^n p(f_i \circ g_i) = \sum_{i=1}^n p(f_i).$$

b) Dla prostoty ograniczymy się teraz do przypadku zwartego. (Można wtedy też wykorzystać zadanie 12 ze str. 3, czego nie zrobimy.) Niech A oznacza zbiór wszystkich skończonych sum funkcji postaci $f \circ g - f$, gdzie $f \in C(X)$ i $g \in G$. Zbiór ten jest wypukły, a na mocy a) jest też rozłączny z wypukłym zbiorem U wszystkich funkcji ściśle dodatnich. Na mocy twierdzenia Mazura o oddzielaniu istnieją funkcjonał liniowy $\varphi \in C(X)^*$ i stała c takie, że $\varphi(f_1) > c \geq \varphi(f_2)$ dla $f_1 \in U$ i $f_2 \in A$. Ponieważ $0 \in A$ oraz $n^{-1} \cdot 1_X \in U$ dla $n \in \mathbb{N}$, przy czym $\varphi(n^{-1} \cdot 1_X) \to 0 = \varphi(0)$, więc $c = 0$ i $\varphi(f \circ g) \leq \varphi(f)$ dla wszystkich $g \in G$ i $f \in C^+(X)$. Zastępując f przez $f \circ g$, zaś g przez g^{-1}, otrzymujemy równość w miejsce nierówności, i to dla dowolnej funkcji

$f \in C(X)$ (bo jest ona różnicą dwóch funkcji nieujemnych.) Funkcjonał φ jest też nieujemny, patrz zadanie 7. 1□

Dowód lematu 2. Niech $f_1, \dots, f_n \in C_c^+(X)$ i $\varepsilon > 0$ będą dane. Ograniczymy się niżej do przypadku zwartego, w którym przyjmujemy $h = 1_X$.

Ustalmy zbiór otwarty $U \subset X$, na który nałożymy później pewne warunki, zaś za v przyjmijmy dowolną niezerową funkcję $v : X \to [0, 1]$, zerującą się poza U i przyjmującą w pewnym punkcie x_0 wartość 1. By dowieść, że przy odpowiednim doborze zbioru otwartego U zachodzi (4), przyjmijmy

$$N = n + 1, \ f_N = 2\varepsilon h, \ f = \sum_{i=1}^{N} f_i \ \text{ oraz } \ h_i = f_i / f \ \text{ dla } i = 1, \dots, N \tag{6}$$

i zażądajmy, by zbiór U był tak mały, aby dla pewnej dostatecznie małej liczby $\delta > 0$ zachodziło

$$\operatorname{diam}(h_i \circ g(U)) < \delta \text{ dla wszystkich } \ g \in G \ \text{ oraz } i = 1, \dots, N. \tag{7}$$

(Istnienie zbioru U omówimy w dodatkowej uwadze, zaś na δ warunek nałożymy niżej.) Gdy $\sum_j c_j(v \circ g_j) \geq f$, gdzie $c_1, \dots, c_k > 0$ i $g_1, \dots g_k \in G$, to dla każdego $j \leq k$ obierzmy punkt $x_j \in X$ taki, że $(v \circ g_j)(x_j) \neq 0$; wówczas

$$v \circ g_j(x) \neq 0 \Rightarrow \big(x, x_j \in g_j^{-1}(U)\big) \Rightarrow \big(|h_i(x) - h_i(x_j)| < \delta \text{ dla } \ i = 1, \dots, N\big).$$

Zatem dla $i \leq N$:

$$f_i(x) = h_i(x) f(x) \leq \sum_j h_i(x) c_j v_j(x) \leq \sum_j (h_i(x_j) + \delta) c_j v_j(x),$$

skąd $p(f_i) \leq \sum_j (h_i(x_j) + \delta) c_j$. Ponieważ $\sum_i h_i = 1$, daje to:

$$\sum_{i=1}^{N} p(f_i) \leq \sum_j c_j (N\delta + \sum_i h_i(x_j)) = \sum_j c_j (N\delta + 1),$$

czyli $\sum_{i=1}^{N} p(f_i) \leq (1 + N\delta) p(f)$ (bo $\sum_j c_j$ może być dowolnie bliskie $p(f)$). Ponadto $f = \sum_{i=1}^{N} f_i \leq (2\varepsilon + || \sum_{i=1}^{n} f_i ||) h$, skąd zmieniając liczbę $N\delta p(f)$ na większą otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} p(f_i) + 2\varepsilon p(h) \leq p(\sum_{i=1}^{n} f_i + 2\varepsilon h) + N\delta(2\varepsilon + || \sum_{i=1}^{n} f_i ||) p(h).$$

By otrzymać (4) wystarczy więc zażądać uprzednio, by liczba δ spełniała warunek $N\delta(2\varepsilon + || \sum_{i=1}^{n} f_i ||) < \varepsilon$.□

Uwaga 2. Gdy silniejsze założenie zwartości przestrzeni X nie jest spełnione, to zamiast przyjąć $h = 1_X$, obieramy $h : X \to [0,1]$ tak, by $h|_K = 1$ i $h(x) = 0$ dla $x \notin L$, gdzie $K = \{x : \sum_{i=1}^n f_i(x) > 0\}$ i L jest pewnym zwartym otoczeniem zbioru $\mathrm{cl}K$. (Dlaczego taka funkcja h istnieje?) Uzupełnienia wymaga wtedy tylko definicja $h_i(x)$ w (6): przyjmujemy $h_i(x) = f_i(x)/f(x)$ gdy $x \in K$, oraz $h_0(x) = 1$ i $h_1(x) = \cdots = h_k(x) = 0$ gdy $x \notin K$.

Powróćmy do uzasadnienia istnienia zbioru otwartego U, spełniającego warunek (7). Otrzymać go można przecinając otoczenia $U_0, \ldots, U_n$ zadanego punktu $x_0 \in X$. Ponieważ funkcje $h_1, \ldots, h_n$, jak również funkcja $h_0 - 1$, zerują się poza zbiorem zwartym, zaś średnica zbioru $h_0 \circ g(U)$ nie zmieni się przy zastąpieniu h_0 przez $h_0 - 1$, więc istnienie potrzebnych otoczeń U_i wynika z następującego lematu:

Lemat 3. *Dla danych $h \in C_c(X), \delta > 0$ i $x_0 \in X$ istnieje otoczenie U punktu x_0 takie, że $\mathrm{diam}(h \circ g(U)) < \delta$ dla wszystkich $g \in G$.*

<u>Dowód.</u> a) Załóżmy wpierw, że grupa X jest zwarta. Rozpatrzmy zbiór $\{(x, g) \in X \times X : |h(gx) - h(gx_0)| \geq \delta/2\}$, domknięty w $X \times X$ i rozłączny z $\{x_0\} \times X$. Jego rzut wzdłuż (zwartej!) drugiej osi jest domknięty w X, a za szukane otoczenie U punktu x_0 możemy wziąć dopełnienie tego rzutu: z definicji, $|h(gx) - h(gx_0)| < \delta/2$ dla $x \in U$ i $g \in X$.

b) W przypadku lokalnie zwartym zmieniamy nieco to rozumowanie. Niech V i K będą zwartymi otoczeniami punktu x_0 i zbioru $\{x \in X : h(x) \neq 0\}$, odpowiednio. Zbiór $T = \{(x, x', g) \in V \times V \times K \cdot V^{-1} : |h(gx) - h(gx')| \geq \delta\}$ jest domknięty w $V \times V \times K \cdot V^{-1}$, wobec czego jego rzut na $V \times V$, który oznaczmy przez T', jest domknięty w $V \times V$. (Wykorzystujemy to, że zbiór $K \cdot V^{-1}$ jest zwarty, jako obraz $K \times V$ przy ciągłym przekształceniu $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$.) Ponieważ $(x_0, x_0) \notin T'$, więc istnieje otoczenie $U \subset V$ punktu x_0 takie, że $(U \times U) \cap T' = \emptyset$. Dla $x, x' \in U$ i $g \in G$, jeśli $gx \notin K$ i $gx' \notin K$, to $h(gx) = 0 = h(gx')$. W przeciwnym razie $g \in K \cdot U^{-1} \subset K \cdot V^{-1}$; a że $(x, x') \in U \times U$, więc $(x, x') \notin T'$ – co daje $(x, x', g) \notin T$ i ostatecznie $|h(gx) - h(gx')| < \delta$. Tak więc otoczenie U ma żądaną własność. $\square$

Uwaga 3. Struktura grupy topologicznej w X odgrywa rolę dopiero w dowodzie lematu 3 (i twierdzenia 2). G–niezmienniczy funkcjonał na $C_c(X)$ istnieje więc zawsze, gdy G jest tranzytywną grupą przekształceń lokalnie zwartej przestrzeni X, być może nie będącej grupą, i prawdziwa jest teza tego lematu. (Z dowodu zaś wynika, że jest ona prawdziwa gdy pewna grupa <u>topologiczna</u> G działa na X tak, że dla każdego zbioru zwartego $K \subset X$, każdy punkt $x_0 \in X$ ma otoczenie W dla którego zbiór $\{g \in G : g(W) \cap K \neq \emptyset\}$ jest zwarty.)$\boxminus$

<u>B. Dowód jednoznaczności miary Haara.</u> Przez X oznaczamy ustaloną lokalnie zwartą grupę topologiczną.

Lemat 4. *Niech μ będzie lewą miara miarą Haara na X. Jeśli funkcje $u, v \in C(X)$ są takie, że $\int (uh) d\mu = \int (vh) d\mu$ dla każdej funkcji $h \in C_c^+(X)$, to $u = v$.*

Dowód twierdzenia 2.(Za Bourbakim) Ustalmy pomocniczo pewną prawą miarę Haara ν. Gdy φ jest lewą całką Haara, zaś μ odpowiadającą jej miarą, to dla $h, f \in C_c^+(X)$ otrzymujemy:

$\varphi(f) \int h \mathrm{d}\nu = \int \Big(\int f(x)h(y)\mathrm{d}\nu(y)\Big)\mathrm{d}\mu(x) = \int \Big(\int f(x)h(yx)\mathrm{d}\nu(y)\Big)\mathrm{d}\mu(x) =$
$\int \Big(\int f(x)h(yx)\mathrm{d}\mu(x)\Big)\mathrm{d}\nu(y) = \int \Big(\int f(y^{-1}x)h(x)\mathrm{d}\mu(x)\Big)\mathrm{d}\nu(y) =$
$\int \Big(\int f(y^{-1}x)\mathrm{d}\nu(y)\Big)h(x)\mathrm{d}\mu(x)$

(Parzyste równości wynikają z niezmienniczości całki Haara, a pozostałe – z twierdzenia Fubiniego.) Zatem

$$\int h\mathrm{d}\nu = \int (u_f \cdot h)\mathrm{d}\mu, \quad \text{gdzie } u_f(x) = \frac{1}{\varphi(f)} \int f(y^{-1}x)\mathrm{d}\nu(y) \text{ dla } \ x \in X.$$

Przy ustalonym f traktujmy pierwszą z tych równości jako tożsamość względem zmiennej h; odejmując dwie tożsamości, odpowiadające różnym f, stwierdzamy na podstawie lematu 4, że funkcje u_f nie zależą od f. (Pomijam sprawdzenie ciągłości tych funkcji.) Oznaczmy więc u_f przez u i w definicji funkcji u_f przyjmijmy $x = e$. Otrzymamy $\varphi(f)u(e) = \psi(f)$ dla wszystkich $f \in C_c^+(X)$, gdzie $\psi(f) = \int f(y^{-1})\mathrm{d}\nu(y)$. Oznacza to, że lewa całka Haara φ jest na $C_c^+(X)$ proporcjonalna do ustalonego (niezerowego!) funkcjonału ψ. Dwie takie całki też są więc proporcjonalne na $C_c^+(X)$, a stąd i na $C_c(X)$.$\square$

§ 5. Splot i transformata Fouriera

Na lokalnie zwartej grupie X ustalmy lewą miarę Haara μ. Piszemy $\int f(x)\, \mathrm{d}x$ lub $\int f$ zamiast $\int f(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$ oraz $L_p(X)$ lub L_p zamiast $L_p(X;\mu)$. Dla funkcji mierzalnych $f, g : X \to \mathbb{C}$ i $x \in X$ przyjmijmy

$$(f * g)(x) = \int f(xy)g(y^{-1})\, \mathrm{d}y = \int f(y)g(y^{-1}x)\, \mathrm{d}y$$

gdy pierwsza całka ma sens. (Ostatnia równość wynika stąd, że wtedy $\int u(y)\, \mathrm{d}y = \int u(x^{-1}y)\, \mathrm{d}y$, gdzie $u(y) = f(xy)g(y^{-1})$.) Piszemy $f * g \in L_p(X)$ gdy funkcja $x \mapsto (f*g)(x)$ należy do $L_p(X)$ (w szczególności, jest ona wtedy określona prawie wszędzie i mierzalna).

Lemat 1. *Gdy $f \in L_1(X), g \in L_q(X)$ i $q \geq 1$, to $f * g \in L_q(X)$ i $||f * g||_q \leq ||f||_1 \cdot ||g||_q$.*

Wniosek 1. *$(L_1(X), *, +)$ jest pierścieniem, przy czym $||f * g||_1 \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1$. Jeśli grupa X jest przemienna, to pierścień ten jest przemienny.*

Otrzymany pierścień nazywany jest **algebrą splotową** grupy lokalnie zwartej X lub jej **pierścieniem grupowym**. (Ostatni termin jest dwuznaczny, gdyż tę samą nazwę nosi zbliżone pojęcie czysto algebraiczne, definiowane niezależnie od możliwej topologii na grupie. Dla grup skończonych pojęcia te są tożsame.)

Uwaga 1. Algebra splotowa ma jedynkę wtedy i tylko wtedy, gdy grupa X jest dyskretna.

Uwaga 2. Mocniejsze od lematu 1 jest następujące **twierdzenie Younga**: gdy $f \in L_p(X), g \in L_q(X)$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ $(p, q, r > 0)$, to $f * g \in L_r(X)$ i $||f * g||_r \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$.

Od tej pory ograniczamy się do badania abelowych grup lokalnie zwartych, i by to zaznaczyć zamiast X piszemy A. Przez **charakter** na takiej grupie rozumiemy dowolny ciągły homomorfizm $A \to T$, gdzie T to grupa multyplikatywna liczb zespolonych o module 1. Zbiór wszystkich charakterów na grupie A oznaczamy przez $\widehat{A}$ lub $A\widehat{\ }$. Oczywiście, charaktery możemy mnożyć (jak każde funkcje $A \to \mathbb{C}$) i względem tego mnożenia $\widehat{A}$ jest grupą; jej jedynką jest charakter stale równy 1. Będziemy też traktować $\widehat{A}$ jako podprzestrzeń topologiczną przestrzeni wszystkich funkcji $A \to \mathbb{C}$, rozpatrywanej z topologią **zbieżności niemal jednostajnej**–tzn. z topologią wyznaczoną przez rodzinę pseudonorm $f \mapsto \sup\{|f(x)| : x \in K\}$, gdzie K przebiega wszystkie zwarte podzbiory grupy A. Gdy grupa A jest ośrodkowa i metryzowalna, to i grupa $\widehat{A}$ jest taka, patrz zadanie 8.5.

Lemat 2. *$\widehat{A}$ jest lokalnie zwartą grupą topologiczną.*

Przykład. a) Każdy charakter na grupie $\mathbb{Z}$ jest postaci $\mathbb{Z} \ni x \mapsto \exp(2\pi \mathbf{i} xy)$, gdzie $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Przyporządkowanie każdemu $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ takiego charakteru ustala izomorfizm algebraiczno–topologiczny grupy $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ na $\widehat{\mathbb{Z}}$.

b) Każdy charakter na addytywnej grupie $\mathbb{R}^n$ jest postaci $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \exp(2\pi \mathbf{i} xy)$, gdzie $y \in \mathbb{R}^n$ i $xy = \sum_{j=1}^n x_j y_j$. Przyporządkowanie każdemu $y \in \mathbb{R}^n$ takiego charakteru ustala izomorfizm algebraiczno–topologiczny grupy $\mathbb{R}^n$ na $(\mathbb{R}^n)\widehat{\ }$.

c) Każdy charakter na grupie addytywnej $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ jest postaci $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni [x] \mapsto \exp(2\pi \mathbf{i} xy)$, gdzie $y \in \mathbb{Z}$. Przyporządkowanie każdemu $y \in \mathbb{Z}$ takiego charakteru ustala izomorfizm algebraiczno–topologiczny grupy $\mathbb{Z}$ na $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})\widehat{\ }$. Równoważnie, zamiast o grupie $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ można myśleć o izomorficznej z nią grupie T; wtedy charaktery są postaci $T \ni z \mapsto z^y$, gdzie $y \in \mathbb{Z}$.

Uzasadnienie prawdziwości pierwszego zdania w b) jest takie. Niech $\chi : \mathbb{R}^n \to T$ będzie charakterem, zaś $p : \mathbb{R} \to T$ – „przekształceniem nakrywającym” $p(t) =$

$\exp(2\pi\mathbf{i}t)$. Ponieważ przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest ściągalna, a charakter χ ciągły, więc istnieje ciągłe przekształcenie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takie, że $\chi = p \circ f$. Ponieważ dalej $\chi(x + x') = \chi(x)\chi(x')$, więc $f(x+x') - f(x) - f(x') \in \mathbb{Z}$ dla każdych $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Wraz ze spójnością $\mathbb{R}^n$ prowadzi to do tożsamości $f(x + x') = f(x) + f(x')$, a następnie–do liniowości przekształcenia f. (Gra tu też rolę jego ciągłość.) Zatem $f(x) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ dla pewnych $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Uzasadnienie pierwszego zdania w a) jest podobne, a w c) wynika ono stąd, że charakter na $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ wyznacza zarazem charakter na $\mathbb{R}$, przekształcający 1 w 1; postać zaś tych charakterów już znamy.

Uzasadnienie drugiego zdania w a), b) czy c) składa się z dwóch części. Po pierwsze, podany wzór zadaje charakter (oznaczmy go przez χ_y) na rozważanej grupie, przy czym $\chi_{y+y'} = \chi_y\chi_{y'}$. Po drugie, trzeba dowieść, że ciąg charakterów χ_{y_n} zbiega niemal jednostajnie do charakteru χ_y wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (y_n) jest zbieżny do y (w przestrzeni $\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n$ czy $\mathbb{Z}$, zależnie od przypadku). Uzupełnienie szczegółów to zadanie 8.4.

Twierdzenie 1 (Pontriagina)**.** *Kanoniczny homomorfizm $J_A : A \to \widehat{\widehat{A}}$, zadany wzorem $J_A(x)(\chi) = \chi(x)$ dla $a \in A$ i $\chi \in \widehat{A}$, jest homeomorfizmem przestrzeni A na $\widehat{A}$.*

Dowód tego twierdzenia wykracza poza ramy wykładu. Zauważmy, że nieoczywiste jest nawet (wynikające z tezy) istnienie nietrywialnego charakteru na grupie A. Warto tezę twierdzenia sprawdzić dla grup pojawiających się w poprzedzającym przykładzie, a także dla grup skończonych. (Patrz zadanie 8.2 i problem 8.1.)

Dla $f \in L_1(A)$ i $\chi \in \widehat{A}$ przyjmijmy

$$\widehat{f}(\chi) = \int f \cdot \overline{\chi} \tag{8}$$

Jest widoczne, że ostatnia całka istnieje i $|\widehat{f}(\chi)| \leq ||f||_1$ dla wszystkich $\chi \in \widehat{A}$. Zatem $\widehat{f} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ jest dobrze określoną funkcją, nazywaną **transformatą Fouriera** danej funkcji $f \in L_1(A)$. Zamiast $\widehat{f}$ piszemy też Ff.

Uwaga 3. Z przykładu wynika, że transformatą Fouriera funkcji $f \in L_1(\mathbb{R}/Z) = L_1([0, 1])$ jest ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ jej współczynników Fouriera $c_n = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\, \mathrm{d}t$. Natomiast transformatą Fouriera ciągu $(d_n) \in l_1(\mathbb{Z})$ jest suma szeregu Fouriera: $y \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_ne^{-2\pi iny}$.$\square$

Twierdzenie 2. *Gdy $f \in L_1(A)$, to $\widehat{f}$ jest funkcją ciągłą na $\widehat{A}$.*

Dowód. Należy dla danych $\chi_0 \in \widehat{A}$ i $\varepsilon > 0$ wskazać otoczenie U charakteru χ_0 takie, że $|\widehat{f}(\chi) - \widehat{f}(\chi_0)| < \varepsilon$ dla wszystkich $\chi \in U$. W tym celu, korzystając z tego, że

$f \in L_1(A)$, ustalmy zbiór mierzalny $K \subset A$ taki, że $\mu(K) < \infty$ i $\int_{A\setminus K} |f| < \varepsilon/2$. Możemy zakładać że jest on zwarty, bo miara Haara jest regularna. Latwo zobaczyć, że zbiór $U = \{\chi \in \widehat{A} : \sup_{x\in K} |\chi(x) - \chi_0(x)| < \varepsilon/2\}$ ma żądane własności.$\square$

Twierdzenie 3. *Transformata Fouriera splotu $f * g$ funkcji $f, g \in L_1(A)$ jest równa $\widehat{f} \cdot \widehat{g}$.*

<u>Dowód.</u> Dla $\chi \in \widehat{A}$ zachodzi (równość 4 wynika z niezmienniczości całki, a 5 stąd, że χ jest charakterem):
$\widehat{f * g}(\chi) = \int (f*g)(x) \cdot \overline{\chi}(x) \text{ d}x = \int \Big(\int f(y)g(x-y) \text{ d}y\Big) \cdot \overline{\chi}(x) \text{ d}x = \int \int f(y)g(x-y) \cdot \overline{\chi}(x) \text{ d}x \text{ d}y = \int \int f(y)g(x) \cdot \overline{\chi}(x+y) \text{ d}x \text{ d}y = \int \int f(y)g(x) \cdot \overline{\chi}(x)\overline{\chi}(y) \text{ d}x \text{ d}y = \Big(\int f(y)\overline{\chi}(y) \text{ d}y\Big)\Big(\int g(x)\overline{\chi}(x) \text{ d}x\Big) = \widehat{f}(\chi) \cdot \widehat{g}(\chi)$.

Twierdzenie 4 (Plancherela, wersja abstrakcyjna)**.** *Dla $f \in L_1(A) \cap L_2(A)$ zachodzi $\widehat{f} \in L_2(\widehat{A})$. Ponadto, przekształcenie $L_1(A) \cap L_2(A) \ni f \mapsto \widehat{f} \in L_2(\widehat{A})$ przedłuża się jednoznacznie do podobieństwa liniowego $F_2 : L_2(A) \to L_2(\widehat{A})$. (Przy odpowiednim wyskalowaniu miary Haara na $\widehat{A}$ jest więc ono izometrią.)*

Funkcja $F_2 f$ (czy raczej jej klasa) nazywana jest **transformatą Fouriera–Plancherela** funkcji $f \in L_2(A)$. Często słowo „Plancherela" jest opuszczane, zaś zamiast $F_2 f$ pisze się nadal Ff lub $\widehat{f}$. Odnotujmy, że ogólnie $F_2 f$ <u>nie</u> wyraża się wzorem (8), bo całka w (8) może nie istnieć gdy $f \notin L_1(A)$. (Por. uwagi 2 i 5 niżej.)

§ 6. Transformata Fouriera w przypadku $A = \mathbb{R}^n$.

Dowód ostatniego twierdzenia ograniczymy do przypadku, gdy $A = \mathbb{R}^n$. Zmienimy przy tym izomorfizm $\mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)\widehat{}$ rozważany w przykładzie z §5: dla uproszczenia stałych utożsamimy każdy wektor $y \in \mathbb{R}^n$ nie z charakterem $x \mapsto \exp(2\pi \mathbf{i} xy)$, a z charakterem $x \mapsto \exp(\mathbf{i}xy)$. Z dokładnością do czynnika, wzór (8) sprowadza się wtedy do następującego:

$$\widehat{f}(y) = \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathbf{i}xy} \text{ d}x \quad \text{dla } y \in \mathbb{R}^n \tag{9}$$

Będziemy też nierzadko pisać $F(f)$ lub Ff zamiast $\widehat{f}$, oraz L_p zamiast $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Uwaga 1. Czynnik $C = (2\pi)^{-n/2}$ normuje miarę Lebesgue'a na przestrzeni $(\mathbb{R}^n)\widehat{} = \mathbb{R}^n$ tak, by transformata Fouriera–Plancherela $F_2 : L_2 \to L_2$ stała się izometrią. By zachować prawdziwość twierdzenia 2 z §5 należy wprowadzić ten sam czynnik (tzn. tak samo unormować miarę) w definicji splotu. Jeśli tego nie uczynić i przyjąć nadal $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\text{d}y$, to równość z twierdzenia 2 w §5 zamieni się na $C\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Twierdzenie 1 (Plancherela dla $\mathbb{R}^n$). *Przy tych oznaczeniach zachodzi $\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R}^n)$ dla $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$, i istnieje jednoznacznie wyznaczona izometria liniowa $F_2 : L_2 \to L_2$ taka, że $F_2(f) = \widehat{f}$ dla $f \in L_1 \cap L_2$.*

Uwaga 2. Dla całkowalnej funkcji f, $\widehat{f}$ jest poprawnie określoną funkcją; jednak gdy ponadto $\int |f|^2 < \infty$, zaś F_2 traktować –jak wyżej– jako przekształcenie do L_2, to $F_2 f$ jest klasą funkcji i równość $F_2 f = \widehat{f}$ oznacza tylko, że $\widehat{f}$ należy do tej klasy. Można jednak (co wygodne) nadać tezie twierdzenia i taki sens, że dla każdej całkowalnej z kwadratem funkcji f, $F_2 f$ jest funkcją mierzalną dla której $||F_2 f||_2 = ||f||_2$, przy czym przyporządkowanie $f \mapsto F_2 f$ jest $\mathbb{C}$–liniowe i spełnia warunek $F_2 f = \widehat{f}$ gdy $\int |f|^2 < \infty$ i $\int |f| < \infty$. (Przejść do tej wersji jest łatwo, wykorzystując bazę Hamela przestrzeni ilorazowej $L_2/\mathcal{L}_1 \cap L_2$.)

Dowód twierdzenia. Niech

$$\mathcal{P} = \{w \cdot \gamma : w \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\}, \quad \text{gdzie } \gamma(x) = e^{-x^2/2} \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Przyjmijmy też dla dostatecznie gładkiej funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ i $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ (zakładamy, że $0 \in \mathbb{N}$) :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \qquad D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}}, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

Traktujemy tu x^α jako funkcję na $\mathbb{R}^n$, co pozwala nam mówić o funkcji $x^\alpha \gamma$. Odnotowujemy kolejno, że:

1. Dla $\alpha \in \mathbb{N}^n$ zachodzi $F(D^\alpha \gamma) = \mathbf{i}^{|\alpha|} x^\alpha \gamma$ i $F(x^a \gamma) = \mathbf{i}^{|\alpha|} D^\alpha \gamma$; w szczególności, $F\gamma = \gamma$ oraz $F(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$. Dowód jest relegowany do zadania 9.2.

2. Zachodzi $F^2 f = f \circ \sigma$ dla $f \in \mathcal{P}$, gdzie $F^2 = F \circ F$, a σ to symetria środkowa $y \mapsto -y$. Istotnie, wystarcza rozpatrzeć przypadek, gdy $f = x^a \gamma$ dla pewnego α, a ten wynika z 1, bo $(x^\alpha \gamma) \circ \sigma = (-1)^{|a|} x^\alpha \gamma$.

3. Ponieważ σ^2 jest identycznością, więc $F^4 f = f$ dla $f \in \mathcal{P}$. A że ponadto $F(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$, to $F(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

4. Bezpośrednio z definicji splotu, dla $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ otrzymujemy równości:

$$\overline{Ff} = F(\overline{f} \circ \sigma), \quad F(f \circ \sigma) = (Ff) \circ \sigma, \quad \int Ff \cdot g = \int f \cdot Fg \tag{10}$$

(W ostatnim przypadku używamy tw. Fubiniego, by zmienić kolejność całkowania.)

5. Gdy $f \in \mathcal{P}$, to $F(\overline{Ff}) = \overline{f}$. Istotnie, $F(\overline{Ff}) = F(F(\overline{f} \circ \sigma)) = (\overline{f} \circ \sigma) \circ \sigma = \overline{f}$. (Korzystamy z 4 i 2.)

6. Dla $f, g \in \mathcal{P}$ zachodzi $\langle Ff, Fg \rangle_{L_2} = \langle f, g \rangle_{L_2}$. Z 4 i 5 wynika bowiem, że:

$$\langle Ff, Fg \rangle = \int Ff \cdot \overline{Fg} = \int f \cdot F(\overline{Fg}) = \int f\overline{g} = \langle f, g \rangle.$$

7. Ponieważ, na podstawie poniższego lematu, zbiór $\mathcal{P}$ jest gęsty w $L_2(\mathbb{R}^n)$, to izometryczne zanurzenie liniowe $F_{|\mathcal{P}} : \mathcal{P} \to L_2$ przedłuża się do izometrycznego zanurzenia liniowego $F_2 : L_2 \to L_2$. Jego obraz $F_2(L_2)$, izometryczny z przestrzenią zupełną, jest domknięty w L_2; a że zawiera on zbiór gęsty $\mathcal{P}$, więc jest całym L_2.

8. Gdy $f \in L_1 \cap L_2$, to istnieje ciąg funkcji $f_k \in \mathcal{P}$ taki, że $||f - f_k||_p \to 0$ dla $p = 1, 2$. (Znów korzystamy z lematu.) Wtedy $||Ff_k - F_2 f||_2 = ||F_2 f_k - F_2 f||_2 = ||f - f_k||_2 \to 0$. Ponieważ przy tym ciąg funkcji (Ff_k) zbiega punktowo (a nawet jednostajnie) do Ff, więc $F_2 f = Ff$. (Wykorzystaliśmy to, że $||Ff_k - Ff||_{\sup} \leq (2\pi)^{-n/2}||f - f_k||_1 \to 0$, por. oszacowanie po (8).) $\square$

Lemat 1 (wykorzystany w krokach 7 i 8). *a) Domknięcie $\overline{\mathcal{P}}$ zbioru $\mathcal{P}$, w normie $|| \, ||_\infty$, jest równe $C_0(\mathbb{R}^n)$.*

b) Gdy $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$, to istnieje ciąg funkcji $f_k \in \mathcal{P}$ taki, że $||f - f_k||_1 \to 0$ i $||f - f_k||_2 \to 0$.

Uwaga 3. (Ważna) a) Odnotowane w krokach od 2 do 6 tożsamości pozostają prawdziwe gdy założyć, że $f, g \in L_2(\mathbb{R}^n)$, zaś F zastąpić przez F_2. Wynika to stąd, że w każdej z otrzymanych tożsamości, obie jej strony są ciągłymi funkcjami zmiennej $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ (lub zmiennych f, g), równymi na zbiorze gęstym $\mathcal{P}$ (lub na $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$). Wszędzie poza odpowiednikiem ostatniej równości w (10) otrzymujemy równość w L_2, tzn. prawie wszędzie.

b) W szczególności, składając równość $F_2^2 f = f \circ \sigma$ z F_2^{-1} i zastępując f przez $f \circ \sigma$, otrzymujemy **wzór na odwrotną transformatę Fouriera–Plancherela**: $F_2^{-1} f = F_2(f \circ \sigma) = (F_2 f) \circ \sigma$ dla $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Stąd

$$\text{gdy } f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n) \text{ i } \widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n), \text{ to dla } g := \widehat{f} \circ \sigma \text{ zachodzi } Fg = f \text{ p.w.},$$

przy czym jawny wzór na g to $g(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mathbf{i}xy} \, \mathrm{d}x$ dla $y \in \mathbb{R}^n$. (Jeśli funkcja f jest ciągła, to równość $Fg = f$ zachodzi wszędzie, bo funkcja Fg też jest ciągła; patrz lemat 3 w §5.) Założenie, że $f \in L_1 \cap L_2$, można osłabić do $f \in L_1$; patrz zadania 9.4 i 9.5.

Uwaga 4. W badaniu transformaty Fouriera, a także w teorii dystrybucji, ważną rolę odgrywa klasa $\mathcal{S}$ funkcji Schwartza. Ma ona następujące własności: i) $\mathcal{S}$ jest podalgebrą algebry splotowej $L_1(\mathbb{R}^n)$, zawierającą $\mathcal{P}$ i zawartą w $L_2(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$; ii) zachodzi $F(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ i zbiór $\mathcal{S}$ jest zamknięty ze względu na mnożenie przez wielomiany, ze względu na operację sprzęgania zespolonego i ze względu na składanie z izometriami przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Definicję i dowód powyższych własności znaleźć można np. w podręczniku Rudina.

Uwaga 5. Transformaty F_2 nie umiemy zadać wzorem całkowym (całka (9) może nie istnieć dla $f \notin L_1(\mathbb{R}^n)$). Tym niemniej, $F_2 f = \lim_{R \to \infty} F(f \cdot 1_{B_R})$, gdzie $B_R =$

$\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq R\}$, zaś granica jest w normie przestrzeni $L_2(\mathbb{R}^n)$. (Zbieżność p.w. nie musi zachodzić!) Obserwacja ta wynika stąd, że $\lim_{R\to\infty} ||f - f \cdot 1_{B_R}||_2 = 0$ i $f \cdot 1_{B_R} \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ dla $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, wobec czego $||F_2 f - F(f \cdot 1_{B_R})||_2 = ||F_2 f - F_2(f \cdot 1_{B_R})||_2 = ||f - f \cdot 1_{B_R}||_2 \to 0$ gdy $R \to \infty$. Podobnie, $F_2^{-1} = \lim_{R\to\infty} F(f \cdot 1_{B_R}) \circ \sigma$ (zbieżność w L_2).

Dodatek: dowód lematu (za A. Pełczyńskim). Jest on w kilku krokach:

1) Gdy przez r_k oznaczyć k–tą resztę szeregu Taylora funkcji exp, to każdego wielomianu $w \in \mathbb{R}[t]$ zachodzi $\sup_{t\geq 0} |w(t) r_k(-t)| e^{-2t} \to 0$ przy $k \to \infty$. Można bowiem założyć, że $w = t^l$ jest jednomianem; a że $|r_k(-t)| \leq t^k/k!$, więc teza sprowadza się do tego, że $\sup_{t\geq 0} t^{k+l} e^{-2t}/k! \to 0$ przy $k \to \infty$. To zaś wynika stąd, że pochodna ostatniej funkcji zeruje się tylko w punkcie $t_0 = (k+l)/2$, w którym wartość funkcji można oszacować używając formuły Stirlinga: $(m/e)^m \sqrt{2\pi m}/(m+1)! \to 1$ gdy $m = k + l \to \infty$. Szczegóły są pozostawione jako ćwiczenie.

2) Dla każdej funkcji f z domknięcia $\overline{\mathcal{P}}$ zbioru $\mathcal{P}$, zachodzi $f\sqrt{\gamma} \in \overline{\mathcal{P}}$ i wobec tego $f\gamma \in \overline{\mathcal{P}}$.

Wystarczy dowieść pierwszej części, i to dla $f \in \mathcal{P}$ (bo wzór $Tf = f\sqrt{\gamma}$ zadaje ciągłe przekształcenie $T : C_0 \to C_0$, skąd $T(\overline{\mathcal{P}}) \subset \overline{\mathcal{P}}$ jeśli $T(\mathcal{P}) \subset \overline{\mathcal{P}}$.) Niech zatem $f = w\gamma$; wystarcza rozpatrzeć przypadek, gdy $w = x^\alpha$ jest jednomianem. Dla $x \in \mathbb{R}^n$ i $t = x^2/4$ mamy wtedy $\gamma(x) = e^{-2t}$, $\sqrt{\gamma}(x) = e^{-t}$ i $|x^\alpha| \leq (1+x^2)^{|\alpha|} = (1+4t)^{|\alpha|}$. (Korzystamy z tego, że $|x_i| \leq 1 + x_i^2 \leq 1 + x^2$.) Jeśli więc f_k oznacza k–tą sumę szeregu Taylora funkcji exp, zaś r_k jego k–tą resztę, to na podstawie 1):

$$||x^\alpha \gamma(x)\sqrt{\gamma}(x) - x^\alpha \gamma(x) f_k(-x^2/4)||_\infty \leq \sup_{t\geq 0} (1+4t)^{|\alpha|} e^{-2t} |r_k(-t)| \to 0 \text{ gdy } k \to \infty.$$

Ponieważ $x^\alpha f_k(-x^2/4)\gamma(x) \in \mathcal{P}$, więc $x^\alpha \gamma^{3/2} = f\sqrt{\gamma} \in \overline{\mathcal{P}}$.

3) Zbiór $\overline{\mathcal{P}}$ jest zamknięty względem mnożenia przez γ (na podstawie 2)), a także mnożenia przez wielomiany n zmiennych (bo $\mathcal{P}$ ma tę własność). Wobec tego jest on zamknięty ze względu na mnożenie przez funkcje z $\mathcal{P}$, a więc i z $\overline{\mathcal{P}}$. Tym samym $\overline{\mathcal{P}}$ jest pierścieniem; ponadto jest to domknięta podprzestrzeń liniowa w $C_0(\mathbb{R}^n)$, rozdzielająca punkty z $\mathbb{R}^n$ i zamknięta względem sprzężenia zespolonego. Z twierdzenia Stone'a–Weierstrassa wynika więc teza a) lematu: $\overline{\mathcal{P}} = C_0$.

4) Pozostaje dowieść, że dla danych $f \in L_1 \cap L_2$ i $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $g \in \mathcal{P}$ taka, że $||f - g||_p < \varepsilon$ dla $p = 1, 2$. Zaczniemy od tego, by funkcję spełniającą te nierówności znaleźć we większym zbiorze $C_c(\mathbb{R}^n)$.

W tym celu zauważmy, że można ją znaleźć w zbiorze skończonych kombinacji funkcji charakterystycznych pewnych zbiorów mierzalnych K_i. (Wynika to z definicji całki i przestrzeni L_p.) Ponieważ miara Lebesgue'a jest regularna, więc o każdym ze zbiorów K_i możemy założyć, że jest zwarty, a następnie zastąpić w kombinacji funkcję 1_{K_i} przez „funkcję Urysohna" $g_i : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, równą 1 na K_i i 0 poza pewnym jego otoczeniem U_i tak małym, by miara różnicy $U_i \setminus K_i$ była mniejsza niż δ. Otrzymana kombinacja $g = \sum_i c_i g_i$ ma żądane własności jeśli $\delta < \varepsilon / \sum_i |c_i|$. (Być może, w nierównościach otrzymamy 2ε w miejsce ε.)

5) Znalezienie żądanej funkcji $g \in \mathcal{P}$ zostało w ten sposób zredukowane do przypadku, gdy $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Wykorzystamy to, że zbiór $\{w\sqrt{\gamma} : w \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]\}$ jest gęsty w C_0 – co wynika stąd, że jest on obrazem zbioru gęstego $\mathcal{P}$ przy homeomorfiźmie przestrzeni C_0, przeprowadzającym każdą funkcję na jej złożenie z jednokładnością $x \mapsto x/\sqrt{2}$. Istnieje więc wielomian w taki, że $||f/\sqrt{\gamma} - w\sqrt{\gamma}||_\infty < \varepsilon/M$, gdzie $M = \max(||\sqrt{\gamma}||_1, ||\sqrt{\gamma}||_2) < \infty$, co daje $||f - w\gamma||_p < \varepsilon$ dla $p = 1, 2$. $\square$

§ 7. Elementy teorii spektralnej operatorów normalnych.

1. Dwa twierdzenia spektralne dla operatorów normalnych: sformułowania i wstępna dyskusja.

Przez H oznaczać będziemy ustaloną zespoloną przestrzeń Hilberta, a przez $\mathcal{L}(H)$ przestrzeń operatorów ograniczonych z H do H, wyposażoną w normę operatorową. Względem operacji składania i dodawania operatorów, $\mathcal{L}(H)$ jest pierścieniem z jedynką I. Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ nazywamy:

normalnym, gdy jest przemienny ze swym sprzężeniem hermitowskim A^*, tzn. gdy $A^*A = AA^*$.

samosprzężonym (inaczej: **hermitowskim**), gdy $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle \forall x \in H$;

unitarnym, gdy $AA^* = A^*A = I$;

(Operator samosprzężony bądź unitarny jest więc normalny.) Przypomnijmy też, że gdy X jest przestrzenią topologiczną, to funkcję $f : X \to \mathbb{C}$ nazywamy **borelowską**, jeśli dla każdego zbioru otwartego $U \subset \mathbb{C}$, zbiór $f^{-1}(U)$ jest borelowski w X. Zbiór wszystkich ograniczonych funkcji borelowskich oznaczmy przez $B_b(X)$.

Oto pierwsze z rozważanych przez nas „twierdzeń spektralnych” dla operatorów normalnych:

Twierdzenie 1 (o istnieniu borelowskiego rachunku funkcyjnego operatora normalnego)**.** *Dla każdego operatora normalnego $A \in B(H)$ istnieją niepusty, zwarty zbiór $\sigma \subset \mathbb{C}$ oraz przyporządkowanie każdej funkcji $f \in B_b(\sigma)$ operatora $f(A) \in \mathcal{L}(H)$, takie, że:*

o) $1(A) = I$ oraz $id(A) = A$, gdzie $1, id : \sigma \to \mathbb{C}$ to funkcje stale równa 1 i identycznościowa, odpowiednio;

h) przekształcenie $f \mapsto f(A)$ jest $\mathbb{C}$–liniowym homomorfizmem pierścienia $B_b(\sigma)$ w pierścień $\mathcal{L}(H)$, takim, że $\overline{f}(A) = (f(A))^*$ dla wszystkich $f \in C(\sigma)$ oraz $1(A) = I$ i $id(A) = A$. (Tu $id : \sigma \to \mathbb{C}$ to funkcja identycznościowa, a 1 – stale równa 1.)

n) $||f(A)|| \leq ||f||_{\sup}$, przy czym jeśli funkcja f jest ciągła, to $||f(A)|| = ||f||_{\sup}$.

σ) gdy ograniczony (w normie $|| \, ||_{\sup}$) ciąg funkcji $f_n \in B_b(\sigma)$ jest zbieżny punktowo do funkcji f, to ciąg operatorów $f_n(A)$ jest zbieżny punktowo do operatora $f(A)$,

Dodatek do tw.1. a) Zbiór σ i opisane przyporządkowanie są dla danego operatora normalnego A jedyne.
b) Przy oznaczeniach twierdzenia, operator $f(A)$ jest normalny i komutuje z każdym operatorem B, przemiennym z A i z A^*.

Przypomnijmy, że **ciąg funkcji** f_n na zbiorze σ jest **zbieżny punktowo** do f, gdy $f_n(t) \to f(t)$ dla każdego punktu $t \in \sigma$. Podobnie, **ciąg operatorów** B_n jest **zbieżny punktowo** do operatora B, gdy $||B_n x - Bx|| \to 0$ dla każdego $x \in H$. (Ta zbieżność operatorów jest nazywana „**silną**”, lecz nie będziemy tej nazwy stosować.)

W tym punkcie (ani nawet w tym paragrafie) nie podamy dowodu twierdzenia 1. Omówimy natomiast pewne jego uzupełnienia i sformułujemy drugie twierdzenie spektralne. Zaczniemy od częściowego dowiedzenia „dodatku” do twierdzenia (por. też poniższy wniosek 1).

Uwaga 1. Niech $f(x + y\mathbf{i}) = \sum_{k,l=0}^{n} c_{k,l} x^k y^l$ dla $x + y\mathbf{i} \in \sigma$; wówczas z własności o) i h) wynika, że $f(A) = \sum_{k,l=0}^{n} c_{k,l} K^k L^l$, gdzie $K = \frac{1}{2}(A + A^*), L = \frac{i}{2}(A^* - A)$. Wyznacza to jednoznacznie wartość $f(A)$ gdy f jest funkcją powyższej postaci; a że funkcje takie są gęste w $C(\sigma)$ na podstawie tw. Stone'a – Weierstrassa, więc wartość $f(A)$ jest jednoznaczna gdy funkcja f jest ciągła. Tak samo stwierdzamy, że $f(A)B = Bf(A)$ gdy operator B komutuje z A i z A^*, zaś funkcja f jest ciągła. Uzasadnienie jednoznaczności $f(A)$ i równości $f(A)B = Bf(A)$ dla funkcji borelowskiej f wygodnie jest odłożyć do p. 4. Natomiast normalność operatora $f(A)$ wynika stąd, że $f(A)(f(A))^* = |f|^2(A) = (f(A))^* f(A)$ na podstawie h).□

Twierdzenie 2. *Niech $A \in \mathcal{L}(H)$ i niech dla pewnej niepustej przestrzeni zwartej σ określony będzie homomorfizm $f \mapsto f(A)$ pierścienia $C(\sigma)$ w $\mathcal{L}(H)$, taki, że dla pewnych dodatnich stałych c, C zachodzi $c||f|| \leq ||f(A)|| \leq C||f||$ dla $f \in C(\sigma)$. Wówczas operator $f(A)$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest odwracalna w pierścieniu $C(\sigma)$ (a więc gdy $0 \notin f(\sigma)$).*

Dowód. Gdy funkcja f ma w $C(\sigma)$ odwrotność $g = 1/f$, to $g(A)$ jest odwrotnością operatora $f(A)$.

Przypuśćmy teraz, że $0 = f(t_0)$ dla pewnego $t_0 \in \sigma$, lecz operator $f(A)$ ma odwrotność B. Przyjmijmy $g(t) = \min((C||B|| + 1)/c, 1/|f(t)|)$ dla $t \in \sigma_A$. Wówczas $|fg| \leq 1$, skąd $||f(A)g(A)|| \leq C$ i wobec tego $||g(A)|| = ||B\big(f(A)g(A)\big)|| \leq C||B||$. Jest to sprzeczne z tym, że $||g(A)|| \geq c||g|| \geq c|g(t_0)| = C||B|| + 1$. □

Wniosek 1. *Przy oznaczeniach twierdzenia 1 zachodzi $\sigma = \sigma_A$, gdzie*

$$\sigma_A = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \textit{operator } A - \lambda I \quad \textit{nie jest odwracalny}\} \tag{11}$$

Dowód. Przy $f = id - \lambda$ stosujemy twierdzenie 2 i to, że $f(A) = A - \lambda I$.□

Przypomnijmy, że dla dowolnego operatora $A \in \mathcal{L}(H)$, zbiór σ_A zdefiniowany równością (11) nazywamy **spektrum** tego operatora. Będziemy korzystać z tego, że σ_A jest niepustym, domkniętym podzbiorem koła $|\lambda| \leq ||A||$ (co wiemy z AF1 i co będzie dalej dowiedzione w szerszym kontekście).

Uwaga 2. Wygodnie jest przyjąć $f(A) := (f_{|\sigma_A})(A)$ gdy tylko dziedzina funkcji zespolonej f zawiera spektrum σ_A operatora normalnego A i $f_{|\sigma_A} \in B_b(\sigma_A)$. Pozwala to m.in. określić wartość $f(A)$ dla dowolnej funkcji $f \in B_b(\mathbb{C})$.

Ważny dla nas jest poniższy przykład, ilustrujący użyte pojęcia:

Przykład 1. Na przestrzeni Hilberta $L_2(\mu)$ rozważmy **operator mnożenia przez funkcję** $u \in L_\infty(\mu)$, zadany wzorem $M_u h = u \cdot h$. Wówczas (patrz zadania 11.5.b) i ....):

a) Spektrum σ_{M_u} tego operatora jest równe **obrazowi istotnemu funkcji** u, zdefiniowanemu jako zbiór liczb zespolonych λ takich, że dla każdego otoczenia U liczby λ, zbiór $f^{-1}(U)$ jest dodatniej miary μ.

b) $M_u^* = M_{\overline{u}}$ i operator M_u jest normalny.

c) Gdy ciąg funkcji $u_n \in L_\infty(\mu)$, ograniczony w normie $|| \, ||_\infty$, jest zbieżny punktowo do funkcji u, to ciąg operatorów M_{u_n} jest zbieżny punktowo do operatora M_u.

d) Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{B}_b(\sigma_{M_u})$ funkcja $f \circ u$ jest określona μ–p.w. i przyporządkowanie $f \mapsto f(M_u) := M_{f \circ u}$ spełnia warunki tezy twierdzenia 1 dla operatora $A = M_u$. □

Przypomnijmy, że gdy H_1 i H_2 są przestrzeniami Hilberta, to operatory $A_i \in \mathcal{L}(H_i)$ nazwiemy **unitarnie podobnymi**, jeśli istnieje izometria liniowa S przestrzeni H_1 na H_2 taka, że $S \circ A_1 = A_2 \circ S$. O izometriach S i S^{-1} powiemy, że każda z nich ustala podobieństwo operatora A_1 do A_2. Znaczenie unitarnego podobieństwa zasadza się na tym, że zachowuje ono wiele własności operatorów. Oto przykład:

Przykład 2. Niech warunki powyższej definicji będą spełnione.

a) Gdy operator A_1 jest samosprzężony (odp. unitarny lub normalny), to A_2 też ma tę własność.

b) $\sigma_{A_1} = \sigma_{A_2}$.

c) Gdy operator A_1 jest normalny, to dla $f \in B_b(\sigma_{A_1}) = B_b(\sigma_{A_2})$ zachodzi $Sf(A_1)S^{-1} = f(A_2)$.

Uzasadnienie części a) i b) stanowi zadanie ...., zaś część c) wynika stąd, że rachunek funkcyjny $f \mapsto Sf(A_1)S^{-1}$ spełnia warunki tw. 1 dla operatora A_2, wobec czego $Sf(A_1)S^{-1} = f(A_2)$ na podstawie „Dodatku" do tego twierdzenia. (Korzystamy też z powyższych części a) i b).)⊟

Możemy obecnie sfomułować drugie rozważane tu twierdzenie spektralne:

Twierdzenie 3 (o podobieństwie do operatorów mnożenia)**.** *Każdy operator normalny na przestrzeni Hilberta jest unitarnie podobny do operatora $M_u \in \mathcal{L}(L_2(T;\mu))$ z przykładu 1, dla pewnej przestrzeni z miarą $(T;\mu)$ i pewnej funkcji $u \in L_\infty(\mu)$.*

Nasz obecny plan jest taki, by wpierw przyswoić sobie w p. 2 przykładowe zastosowania i uzupełnienia obu twierdzeń spektralnych, a następnie zmierzać ku dowodowi tych ostatnich, przyjmując jednak za prawdziwą osłabioną wersje twierdzenia 1 – a tę udowodnimy dopiero w §8.

2. Uzupełnienia i zastosowania twierdzeń spektralnych (przykłady).

Twierdzenie 3 z p. 1 sprowadza niejednokrotnie badanie własności operatorów normalnych do badania operatorów mnożenia. Oto przykład:

Definicja. Operator A na przestrzeni Hilberta H nazywamy **nieujemnym**, gdy jest on samosprzężony i $\langle Av, v\rangle \geq 0$ dla każdego wektora $v \in H$.

Twierdzenie 1. *Gdy operator A jest normalny, to:*

a) jest on unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy jego spektrum σ_A jest podzbiorem okręgu $|\lambda| = 1$;

b) jest on samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_A \subset \mathbb{R}$:

c) jest on nieujemny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_A \subset [0,\infty)$.

Dowód. Dla operatorów mnożenia tezy te wynikają z zadań .... W ogólnym przypadku pozostaje zastosować twierdzenie 3 i przykład 2 z p.1. □

Przykład 1. Niech operator $A \in \mathcal{L}(H)$ będzie normalny. Funkcja exp jest sumą szeregu $\sum_n \frac{1}{n!}t^n$, jednostajnie zbieżnego na zwartym zbiorze σ_A. Gdy przez f_k oznaczyć k–tą sumę częściową tego szeregu, a przez r_k jego n–tą resztę, to otrzymamy $f_k(A) = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!}A^n$ i $||r_k(A)|| = \sup\{|r_k(\lambda)| : \lambda \in \sigma_A\} \to 0$. Wynika stąd, że $e^A = \sum_n \frac{1}{n!}A^n$ (szereg zbieżny w normie operatorowej). Podobne rozwinięcia otrzymujemy dla $\cos A$ i $\sin A$, zaś z tożsamości $e^{it} = \cos t + \mathbf{i}\sin t$ wynika, że $e^{iA} = \cos A + \mathbf{i}\sin A$. Gdy operator A jest smosprzężony, to $\sigma_A \subset \mathbb{R}$, wobec czego e^{it} przyjmuje na σ_A wartości w okregu jednostkowym – co powoduje, że operator e^{iA} jest unitarny (dla samosprzężonego operatora A). □

Twierdzenie 2. *Gdy operator A jest normalny, to:*

a) Dla $f \in B_b(\sigma_A)$ zachodzi $\sigma_{f(A)} \subset \mathrm{cl}(f(\sigma_A))$, przy czym $\sigma_{f(A)} = f(\sigma_A)$ gdy $f \in C(\sigma_A)$.

b) Dla $f \in B_b(\sigma_A)$ i $g \in B_b(\mathrm{cl} f(\sigma_A))$ zachodzi równość $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$.

Dowód. Wystarcza dowieść tego, gdy A jest operatorem mnożenia – a wtedy stosują się zadania .....□

Wniosek 1. *Niech A będzie operatorem A normalnym i niech $f \in B_b(\sigma_A)$. Jeśli $f(\sigma_A)$ jest podzbiorem okręgu $|\lambda| = 1$ (odp. jeśli zachodzi $f(\sigma_A) \subset \mathbb{R}$ czy $f(\sigma_A) \subset [0, \infty)$), to operator $f(A)$ jest unitarny (odp. jest samosprzężony czy nieujemny). Gdy funkcja f jest ciągła, to prawdziwa jest też implikacja przeciwna.*⊟

Przykład 2. Niech operator A będzie normalny.

a) Funkcja charakterystyczna dowolnego zbioru borelowskiego $S \subset \mathbb{C}$ jest rzeczywista i spełnia warunek $(1_S)^2 = 1_S$. Operator $P = 1_S(A)$ jest więc samosprzężony i spełnia warunek $P \circ P = P$; jest on więc rzutem ortogonalnym na podstawie ....

b) Gdy $S = \{\lambda\}$ dla pewnej liczby zespolonej λ, to obraz H_λ powyższego rzutu P jest równy $\{v \in H : Av = \lambda v\}$. Ponownie, wystarcza tego dowieść gdy A jest operatorem mnożenia, który to przypadek jest treścią zadania .... □

???

3. Dwa wyniki o reprezentacjach pierścieni funkcyjnych na przestrzeni Hilberta.

Wygodnie jest zwięźle wyrazić i uogólnić własności przyporządkowania $f \mapsto f(A)$, rozważanego w twierdzeniu 1 z p. 1.

Definicja. Niech P będzie pewnym zawierającym wszystkie funkcje stałe pierścieniem ograniczonych funkcji zespolonych na danym zbiorze σ. Przez **reprezentację** pierścienia P na przestrzeni Hilberta H rozumiemy homomorfizm (w kategorii pierścieni z jedynką) $\pi : P \to \mathcal{L}(H)$ taki, że $||\pi(f)|| \leq ||f||$ dla wszystkich $f \in P$. Reprezentację tą nazwiemy $*$–**reprezentacją**, jeśli dla każdej funkcji $f \in P$ zachodzi $\overline{f} \in P$ i $\pi(\overline{f}) = (\pi(f))^*$. Zamiast o $*$–reprezentacji mówimy też o $*$–**homomorfiźmie** pierścienia P w $\mathcal{L}(H)$.

Przykład 1. Niech μ będzie pewną miarą na zbiorze σ, taką, że każda funkcja $f \in P$ jest μ–mierzalna. Wzór $\pi(f)h = f \cdot h$ dla $f \in P$ i $h \in L_2(\mu)$ zadaje wówczas reprezentację pierścienia P na przestrzeni $H = L_2(\mu)$. Istotnie, ponieważ $\pi(f)$ jest operatorem mnożenia przez funkcję f, więc $||\pi(f)|| \leq ||f||_{\text{sup}}$. Jeśli ponadto pierścień P jest zamknięty względem zespolonego sprzęgania funkcji, to π jest $*$–reprezentacją, bo $\pi(f)^*$ jest operatorem mnożenia przez funkcję $\overline{f}$.

Opisaną wyżej reprezentację pierścienia P nazwiemy **podstawową**. (Jest to termin prowizoryczny.) Reprezentacji podstawowych tego samego pierścienia P jest wiele, każda zależna od wyboru miary na zbiorze σ.

Definicja. Niech $\pi : P \to \mathcal{L}(H)$ będzie pewnym $*$–homomorfizmem.

a) Zbiór $X \subset H$ jest π–**niezmienniczy**, jeśli $\pi(f)(X) \subset X$ dla każdego $f \in P$.

b) Podprzestrzeń liniową $H_0 \subset H$ nazywamy π–**minimalną,** jeśli ma ona dokładnie dwie (różne) domknięte w H liniowe podprzestrzenie niezmiennicze, H_0 i $\{0\}$.

c) W nazwach możemy pomijać literę π, jeśli homomorfizm π jest znany lub nieistotny. Jeśli przestrzeń H jest minimialna, to mówimy też, że dana reprezentacja π jest **nieprzywiedlna**.

Uwaga 1. Niech $\pi : P \to \mathcal{L}(H)$ będzie $*$–homomorfizmem.

a) Gdy X jest π–niezmienniczym podzbiorem przestrzeni H, to podprzestrzeń $X^\perp$ też jest π–niezmiennicza. Istotnie, X jest domkniętą podprzestrzenią liniową i dla $v \in X, w \in X^\perp$ i $f \in P$ mamy $\langle v, \pi(f)w\rangle = \langle \pi(\overline{f})v, w\rangle = 0$, skąd $\pi(f)(X^\perp) \subset X^\perp$.

b) Jeśli więc domknięta podprzestrzeń nie jest minimalna, to jest równa $\{0\}$ lub jest sumą ortogonalną dwóch właściwych, domkniętych podprzestrzeni niezmienniczych.

c) Różna od $\{0\}$ domknięta podprzestrzeń niezmiennicza Y zawiera podprzestrzeń minimalną. Istotnie, dla każdego $v \in Y \setminus \{0\}$, podprzestrzeń $\mathrm{cl}\{\pi(f)v : f \in P\}$ jest mimimalna.

Twierdzenie 1. *Gdy $\pi : P \to \mathcal{L}(H)$ jest $*$–homomorfizmem i $H \neq \{0\}$, to istnieje rodzina $\{H_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ parami ortogonalnych podprzestrzeni π–minimalnych, taka, suma $\bigcup_\gamma H_\gamma$ jest zbiorem liniowo gęstym w H.*

<u>Dowód.</u> W rodzinach, posiadających wszystkie powyższe własności prócz ostatniej, i składających się tylko z podprzestrzeni różnych od $\{0\}$, wprowadzić można naturalny porządek: $\{H^1_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1} \prec \{H^2_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_2}$, gdy $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ i $H^1_\gamma = H^2_\gamma$ dla $\gamma \in \Gamma_1$. Z lematu Kuratowskiego–Zorna wynika istnienie rodziny maksymalnej. Jej suma mnogościową X jest zbiorem π-niezmienniczym (jako suma takich), więc domknięta podprzestrzeń $X^\perp$ jest π–niezmiennicza. Wynika stąd, że $X^\perp = \{0\}$, bo w przeciwnym razie możnaby rozważaną rodzinę maksymalną powiększyć o zawartą w $X^\perp$ podprzestrzeń minimalną. To jednak oznacza, że zbiór X jest liniowo gęsty w H. □

Twierdzenie to pozwala niejednokrotnie badanie dowolnej reprezentacji redukować do badania reprezentacji nieprzywiedlnych.

<u>Definicja.</u> Niech π_1 i π_2 będą reprezentacjami pierścienia P na przestrzeniach Hilberta H_1 i H_2, odpowiednio. Reprezentacje te nazwiemy **unitarnie podobnymi**, jeśli istnieje izometria liniowa $S : H_1 \to H_2$ taka, że $S \circ \pi_1(f) = \pi_2(f) \circ S$ dla wszystkich $f \in P$.

Twierdzenie 2. *Gdy przestrzeń σ jest zwarta, to każda nieprzywiedlna $*$–reprezentacja pierścienia $C(\sigma)$ na przestrzeni Hilberta jest unitarnie podobna do pewnej reprezentacji podstawowej tego pierścienia.*

<u>Dowód.</u> Niech $\pi : C(\sigma) \to \mathcal{L}(H)$ będzie nieprzywiedlną $*$–reprezentacją na przestrzeni Hilberta H. Naszym celem jest skonstruowanie miary μ na przestrzeni σ i izometrii

$S : L_2(\mu) \to H$ takich, że $\pi(f)(Sw) = S(f \cdot w)$ dla wszystkich $w \in L_2(\mu)$ i $f \in C(\sigma)$. Obierzmy w tym celu dowolny wektor niezerowy $v \in H$ i przyjmijmy

$$H_0 = \{\pi(f)v : f \in C(\sigma)\}$$

Na podstawie uwagi 1 i minimalności przestrzeni H, zbiór H_0 jest gęsty w H. (Wektor v o tej własności nazywany jest **cyklicznym** dla π.)

By skonstruować S i μ zdefiniujemy obecnie na $C(\sigma)$ funkcjonał liniowy φ wzorem $\varphi(f) = \langle \pi(f)v, v\rangle$. Przyjmuje on wartości nieujemne na funkcjach nieujemnych: gdy $f \geq 0$, to przy $g = \sqrt{f}$ mamy $\varphi(f) = \varphi(|g|^2) = \langle \pi(\overline{g})\pi(g)v, v\rangle = \langle \pi(g)v, \pi(g)v\rangle \geq 0$. Na podstawie twierdzenia Riesza istnieje więc na σ nieujemna miara borelowska taka, że $\varphi(f) = \int_\sigma f \,\mathrm{d}\mu$ dla $f \in C^{\mathbb{R}}(\sigma)$. Dla $g \in C^{\mathbb{C}}(\sigma)$ poprzedni rachunek i definicja miary μ dają $||\pi(g)v||^2 = \varphi(|g|^2) = (||g||_{L_2})^2$. Stąd $C(\sigma) \ni g \mapsto \pi(g)v \in H$ jest liniowo-izometrycznym zanurzeniem gęstej podprzestrzeni $C(\sigma)$ przestrzeni $L_2(\mu)$ w przestrzeń H, i jako takie przedłuża się do takiegoż zanurzenia S, określonego na całej przestrzeni $L_2(\mu)$. Obraz $S(H)$ zawiera podprzestrzeń H_0; a że jest domknięty (bo jest izometryczny z przestrzenią zupełną $L_2(\mu)$), to jest równy H.

Pozostaje dowieść, że gdy $f \in C(\sigma)$, to $\pi(f)(Sw) = S(f \cdot w)$ dla wszystkich $w \in L_2(\mu)$. Ponownie korzystając z gęstości zbioru $C(\sigma)$ w $L_2(\mu)$ zauważamy, że wystarczy tej równości dowieść dla $w \in C(\sigma)$. Wtedy jednak $S(w) = \pi(w)v$ i $S(fw) = \pi(fw)v$, a żądana równość wynika z tożsamości $\pi(f)\pi(w) = \pi(fw)$. $\square$

4. Dowody wyników z p. 1 zakładając istnienie ciągłego rachunku funkcyjnego

Dowód twierdzenia 3 z p.1. W dowodzie tym zakładamy istnienie ciągłego rachunku funkcyjnego rozpatrywanego operatora normalnego A. Inaczej mówiąc zakładamy, że dysponujemy $*$–homomorfizmem $\pi : C(\sigma) \to \mathcal{L}(H)$, gdzie $\sigma \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem zwartym, takim, że $\pi(id) = A$. Rozpatrzymy 2 przypadki.

1. Reprezentacja ta jest nieprzywiedlna. Na podstawie tw. 2 z p.3, jest ona unitarnie podobna reprezentacji podstawowej Π pierścienia $C(\sigma)$, wyznaczonej przez pewną miarę μ na zbiorze σ. Operator $A = \pi(id)$ jest więc unitarnie podobny do operatora $\Pi(id)$, będącego operatorem mnożenia (przez funkcję $u = id$).

2. Przypadek ogólny. Tym razem korzystamy z tw. 1 z p. 3 by uzyskać rodzinę $\{H_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ opisanych w nim podprzestrzeni. Jak wiemy z 1, dla każdego $\gamma \in \Gamma$ istnieje (borelowska i regularna) miara μ_γ na przestrzeni σ oraz izometria liniowa $S_\gamma : L_2(\mu_\gamma) \to H_\gamma$, ustalająca podobieństwo operatora $\pi(id)_{|H_\gamma}$ do operatora mnożenia na $L_2(\mu_\gamma)$ przez pewną funkcję $u_\gamma \in L_\infty(\mu)$. Przyjmijmy za (T, μ) rozłączną sumę przestrzeni $(\sigma_\gamma, \mu_\gamma)$, tzn. określmy $\sigma_\gamma = \sigma \times \{\gamma\}$, $T = \bigcup_\gamma \sigma_g = \sigma \times \Gamma$ i $\mu(B) = \sum_\gamma \mu_\gamma(B \cap \sigma_\gamma)$ dla każdego borelowskiego zbioru $B \subset T$. Przestrzeń $L_2(\mu)$

zawiera w naturalny sposób rodzinę parami ortogonalnych przestrzeni $L_2(\sigma_\gamma;\mu_\gamma)$, której suma jest liniowo gęsta w $L_2(\mu)$. Suma prosta operatorów S_γ wyznacza więc na podstawie tw. Pitagorasa izometrię liniową gęstej podprzestrzeni przestrzeni $L_2(\mu)$ na gęstą podprzestrzeń $H_0 = \oplus_\gamma H_\gamma$ przestrzeni H, i tym samym przedłuża się do izometrii $S : L_2(\mu) \to H$. Jeśli przez $u : T \to \mathbb{C}$ oznaczyć „rozłączną sumę" funkcji u_γ (tzn. przyjąć $u(t) = u_\gamma(t)$ dla $t \in \sigma_\gamma$), to dla $h \in H_\gamma$ zachodzi $SM_uS^{-1}h = S_\gamma M_{u_\gamma} S_\gamma^{-1}h = \pi(id)(h) = Ah$. Wobec tego równość $SM_uS^{-1}h = Ah$ ma miejsce dla wszystkich h z liniowo gęstego podzbioru $\bigcup_\gamma H_\gamma$ przestrzeni H, a tym samym dla wszystkich $h \in H$.$\square$

Dodatek do dowodzonego twierdzenia i do tw. 1 z p.3. (Jest to problem 12.1.) Gdy przestrzeń H jest ośrodkowa, to w tw. 1 z p. 3 można żądać, by rodzina $\{H_\gamma\}_\gamma$ była przeliczalna, zaś w tw. 1 z p. 1 – by $T = \mathbb{C}$, a miara μ była skończona, borelowska i regularna.

Twierdzenie 1. *Gdy σ jest przestrzenią zwartą, to każda $*$-reprezentacja $C(\sigma) \to \mathcal{L}(H)$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta, przedłuża się jednoznacznie do $*$-reprezentacji $\pi : B_b(\sigma) \to \mathcal{L}(H)$, spełniającej następujący warunek*

σ) gdy ograniczony (w normie $|| \, ||_{\sup}$) ciąg funkcji $f_n \in B_b(\sigma)$ jest zbieżny punktowo do funkcji f, to ciąg operatorów $\pi(f_n)$ jest zbieżny punktowo do $\pi(f)$.

Dowód. Istnienia żądanego przedłużenia można dowieść, powtarzając rozumowanie z dowodu tw. 2 w p.3. Ponieważ taka ogólność jest tu zbędna, więc pomijamy szczegóły; w potrzebnym zaś nam przypadku szczególnym podamy dalej prostsze rozumowanie, w którym wykorzystamy przywołane twierdzenie, w miejsce jego dowodu.

Dla dowodu jednoznaczności rozpatrzmy dwie reprezentacje π_1 i π_2, rozszerzające tę samą reprezentację π. Rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{F}$ tych zbiorów borelowskich S, dla których zachodzi równość $\pi_1(1_S) = \pi_2(1_S)$. Zauważamy, że gdy $S, S_1, S_2, \dots \in \mathcal{F}$, to:

a) $\sigma \setminus S \in \mathcal{F}$, bo $1_{\sigma\setminus S} = 1 - 1_S$, co wyznacza wartość $\pi_j(1_{\sigma\setminus S})$ przez $\pi_1(1_S) = \pi_2(1_S)$. Podobnie:

b) $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{F}$, bo $1_{S_1\cup S_2} = 1_{S_1} + 1_{S_2} - 1_{S_1} \cdot 1_{S_2}$.

c) $T := \bigcup_n S_n \in \mathcal{F}$, bo 1_T jest granicą punktową funkcji 1_{T_n}, gdzie $T_n = S_1 \cup \dots \cup S_n$.

$\mathcal{F}$ jest więc sigma–ciałem zbiorów, i to zawierającym wszystkie zbiory domknięte, bo funkcja charakterystyczna każdego takiego zbioru jest granicą punktową ciągu funkcji ciągłych (na podstawie lematu Tietzego-Urysohna). Stąd wynika, że $\mathcal{F}$ zawiera wszystkie zbiory borelowskie, wobec czego $\pi_1(f) = \pi_2(f)$ dla każdej borelowskiej funkcji prostej. A że zbiór takich funkcji jest gęsty w $B_b(\sigma)$ (w normie $|| \, ||_{\sup}$), to $\pi_1 = \pi_2$.$\square$

Dowód twierdzenia 1 z p. 1. Gdy $H = L_2(\mu)$ i $A = M_u$ jest operatorem mnożenia przez funkcję $u \in L_\infty(\mu)$, to za σ przyjmujemy spektrum σ_A tego operatora, a za $f(A)$

– operator mnożenia przez funkcję $f \circ u$, patrz przykład 1 w p.1. W ogólnym przypadku istnienie żądanej $*$–reprezentacji $B_b(\sigma) \ni \varphi \mapsto f(A) \in \mathcal{L}(H)$ wynika z powyższego twierdzenia, jak również z dowiedzionego już twierdzenia 3 z p.1. Istotnie, istnieje miara μ na pewnej przestrzeni T i izometria $S : H \to L_2(T, \mu)$ taka, że $SAS^{-1} = M_u$ dla pewnej funkcji $u \in L_\infty(\mu)$. A że umiemy określić $f(M_u)$ dla $f \in B_b(\sigma)$, gdzie $\sigma = \sigma_{M_u}$, więc dla tych f pozostaje przyjąć $f(A) = S^{-1}f(M_u)S$. Latwo sprawdzić, że wszystkie warunki tezy dowodzonego twierdzenia są spełnione.$\square$

Uzupełnienie dowodu „dodatku" do twierdzenia 1 z p. 1. Ad a). Jak zauważono w uwadze 1 i wniosku 1 z p. 1, jednoznacznie wyznaczone są zarówno przestrzeń $\sigma = \sigma_A$, jak i operatory $f(A)$ dla ciągłych funkcji f. Jednoznaczność $f(A)$ dla $f \in B_b(\sigma)$ wynika więc z jednoznaczności w powyższym twierdzeniu 1.

Ad b). Podobnie, równości $f(A)B = Bf(A)$ dowiedziono już dla wszystkich $f \in C(\sigma)$. Jak w dowodzie jednoznaczności w tw. 1 wynika stąd kolejno, że równość ta jest spełniona, gdy funkcja borelowska f przyjmuje tylko wartości 0 i 1, następnie – gdy jest ona prosta, i na koniec – gdy jest dowolna.$\boxminus$

§ 8. Transformata Gelfanda na przemiennych algebrach Banacha i na przemiennych C*–algebrach

1. Algebry Banacha i transformata Gelfanda na nich

Definicja. Algebrą Banacha nazywamy przestrzeń Banacha V, w której określone jest mnożenie, będące ciągłą funkcją $V \times V \ni (x, y) \mapsto xy \in V$ i spełniające następujące warunki:

i) zbiór V z określonymi w nim mnożeniem i dodawaniem jest pierścieniem (łącznym);

ii) zachodzi $\lambda(xy) = x(\lambda y) = \lambda(xy)$ dla $x, y \in V$ i $\lambda \in \mathbb{F}$.

Mówimy, że algebra ta jest **algebrą z jedynką**, jeśli pierścień $(V, +, \cdot)$ ma jedynkę. Każdą [przemienną] algebrę Banacha można zanurzyć izometrycznie w [przemienną] algebrę z jedynką, patrz zadanie .... . Nietrudno też wykazać (zadanie ....), że bez zmiany topologii można V unormować tak, by

iii) $||xy|| \leq ||x|| \cdot ||y||$ dla $x, y \in V$, oraz $||e|| = 1$ jeśli e jest jedynką w V.

Będziemy więc zawsze zakładać, że warunek iii) jest spełniony (lecz niekoniecznie, że V ma jedynkę). O ile nie wskazano inaczej, zakładamy też, że ciałem skalarów są liczby zespolone.

Definicja. Niech V będzie algebrą Banacha z jedynką e. Przez **spektrum** elementu $x \in V$ rozumiemy zbiór

$$\sigma_x = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ nie ma odwrotności w } V\} \subset \mathbb{C}. \tag{12}$$

Natomiast **promieniem spektralnym** elementu x nazywamy liczbę

$$r(x) = \inf\{||x^n||^{1/n} : n \in \mathbb{N}\} \tag{13}$$

Twierdzenie 1. *Gdy V jest algebrą Banacha z jedynką e i $x \in V$, to*

a) jeśli $||x^k|| < 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to element $e - x$ jest odwracalny w V;

b) zbiór σ_x jest niepusty i zwarty;

c) $r(x)$ jest promieniem najmniejszego koła o środku w 0, zawierającego σ_x. Ponadto, $r(x) = \lim_n ||x^n||^{1/n} \le ||x||$.

Dowód. Część a) to zadanie 12.3, a b) i c) dowiedziono na AFI gdy $V = \mathcal{L}(W)$ dla pewnej przestrzeni Banacha W. W ogólnym przypadku można rozumować podobnie, przy czym jedyną trudniejszą część tezy – niepustość zbioru σ_x – można wywnioskować z wymienionego przypadku szczególnego, jak następuje. Jeśli element $y = \lambda e - x$ jest odwracalny, to operator $L_y \in \mathcal{L}(V)$, zadany wzorem $L_y(z) = yz$, też jest odwracalny w $\mathcal{L}(V)$ (jego odwrotnością jest $L_{y^{-1}}$). Stąd już wynika, że $\sigma_x \supset \sigma_{L_x} \neq \emptyset$. ⊟

Wniosek 1 (tw. Mazura–Gelfanda). *Jeśli każdy niezerowy element algebry Banacha V z jedynką jest odwracalny, to $V = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{C}\}$ (równoważnie: algebra V jest izomorficzna z algebrą $\mathbb{C}$ liczb zespolonych.)*

Dowód. Niech $x \in V$. Ponieważ $\sigma_x \neq \emptyset$, więc istnieje skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ taki, że element $\lambda e - x$ jest nieodwracalny. Z założenia wynika więc, że $x = \lambda e$. Tak więc $V = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{C}\}$ i żądany izomorfizm (definicja niżej) algebry $\mathbb{C}$ na V można zadać wzorem $\lambda \mapsto \lambda e$. □

Definicja. Gdy V i W są algebrami Banacha, to przekształcenie $T : V \to W$ nazywamy **homomorfimem** (w kategorii algebr Banacha), jeśli $T \in \mathcal{L}(V, W)$ i $T(xy) = T(x)T(y)$ dla $x, y \in V$. Gdy mowa o **homomorfiźmie algebr z jedynką** żądamy też, by $T(e_V) = e_W$. Przekształcenie T nazwiemy **izomorfizmem** jeśli jest bijektywne i jest homomorfizmem; z twierdzenia Banacha–Saksa o przekształceniu otwartym wynika, że wówczas T^{-1} również jest (ciągłym) homomorfizmem.

Różny od zerowego homomorfizm algebry V w algebrę $\mathbb{C}$ liczb zespolonych nazywamy **charakterem** na V. Zbiór wszystkich charakterów na V oznaczać będziemy przez $\widehat{V}$.

Uwaga 1. Gdy e_V jest jedynką w V i homomorfizm algebraiczny $T : V \to W$ jest surjektywny, to $T(e_V)$ jest jedynką w W. (Mamy bowiem wtedy $T(e_V)y = yT(e_V) = y$ dla każdego $y \in T(V) = W$.) W szczególności, $\varphi(e_V) = 1$ dla każdego niezerowego homomorfizmu algebraicznego $\varphi : V \to \mathbb{C}$.

Twierdzenie 2. *Niech V będzie przemienną algebrą Banacha z jedynką. Wówczas:*

a) Jeśli element $x \in V$ jest nieodwracalny, to $\varphi(x) = 0$ dla pewnego charakteru $\varphi \in \widehat{V}$.

b) Dla każdego $x \in V$ zachodzi $\sigma_x = \{\varphi(x) : \varphi \in \widehat{V}\}$.

Dowód. a) Rozszerzmy ideał $xV = \{xy : y \in V\}$ do maksymalnego ideału $\mathcal{J}$ w pierścieniu V. Ideał taki nie zawiera żadnego elementu odwracalnego, więc jest rozłączny z otwartą kula jednostkową o środku w e. Stąd $e \notin \mathrm{cl}\mathcal{J}$, czyli ideał $\mathrm{cl}\mathcal{J}$ jest właściwy; a że zawiera ideał maksymalny $\mathcal{J}$, to jest mu równy. Ideał $\mathcal{J}$ jest więc domknięty, a ilorazowa przestrzeń Banacha $W = V/\mathcal{J}$ jest algebrą, w której każdy element niezerowy jest odwracalny. Na podstawie twierdzenia Mazura–Gelfanda istnieje więc izomorfizm $G : V/\mathcal{J} \to \mathbb{C}$. Za szukany charakter φ możemy obrać $G \circ F$, gdzie $F : V \to V/\mathcal{J}$ to rzutowanie ilorazowe. (Ciągłość φ wynika stąd, że $\ker\varphi = \mathcal{J}$ jest podprzestrzenią domkniętą, zaś niezerowość – stąd, że F i G są surjektywne; wreszcie $\varphi(x) = 0$, bo $x \in \mathcal{J}$.)

b) Implikacja odwrotna do wyrażonej w a) jest oczywista: jeśli $xy = e$ i $\varphi \in \widehat{V}$, to $\varphi(x)\varphi(y) = 1$ i wobec tego $\varphi(x) \neq 0$. Zatem dla $x \in V$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, element $x - \lambda e$ jest nieodwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(x - \lambda e) = 0$ dla pewnego charakteru φ – co oznacza, że $\lambda \in \sigma_x \Leftrightarrow \lambda = \varphi(x)$ dla pewnego φ. $\square$

Uwaga 2. Rozumowania te wykazują zarazem, że gdy V jest algebrą Banacha (być może nieprzemienną), to

a) każdy jednostronny ideał maksymalny w V jest domknięty;

b) każdy homomorfizm algebraiczny $\varphi : V \to \mathbb{C}$ jest ciągły.$\boxminus$

Definicja. Element x algebry Banacha V wyznacza funkcję $\widehat{x} : \widehat{V} \to \mathbb{C}$, określoną wzorem

$$\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x) \text{ dla } \varphi \in \widehat{V}. \tag{14}$$

Zbiór $\widehat{V}$ rozpatrujemy ze słabą wstecz topologią – najsłabszą, w której ciągłe są wszystkie funkcje $\widehat{x}$, $x \in X$. Funkcja $\widehat{x} : \widehat{V} \to \mathbb{C}$ nazywana jest **transformatą Gelfanda** elementu x algebry V.

Twierdzenie 3. *Gdy V jest przemienną algebrą Banacha z jedynką, to*

a) Dla każdego $x \in V$, funkcja $\widehat{x} : \widehat{V} \to \mathbb{C}$ jest ciągła i jej obrazem jest σ_x.

b) Przestrzeń $\widehat{V}$ jest zwarta.

c) $V \ni x \mapsto \widehat{x} \in C(\widehat{V})$ jest homomorfizmem algebr z jedynką, o normie 1. Ściślej: $||\widehat{x}|| = r(x) \leq ||x||$ dla każdego $x \in \widehat{V}$.

Definicja. Homomorfizm z części c) też nazywamy **transformatą** (lub **homomorfizmem**) **Gelfanda**.

Dowód twierdzenia. a) Ciągłość wynika z definicji topologii na $\widehat{V}$, a reszta – z twierdzeń 2b) i 1c).

b) Jak odnotowano wyżej, $|\varphi(x)| \leq ||x||$ dla $\varphi \in \widehat{V}$ i $x \in V$. Zatem $\widehat{V}$ jest podzbiorem kuli jednostkowej B przestrzeni V^*, i to złożonym dokładnie z tych funkcjonałów $\varphi \in B$, które spełniają wszystkie równości $\varphi(e) = 1$ (patrz uwaga 1) i $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$, gdzie x, y przebiegają elementy V. Rozpatrywana w słabej wstecz topologii, kula B jest zwarta na podstawie tw. Banacha–Alaoglu, zaś każda z wymienionych równości wyznacza domknięty jej podzbiór. Stąd $\widehat{V}$ jest zbiorem zwartym, jako przecięcie domkniętych podzbiorów zbioru zwartego.

c) Zależności $||\widehat{x}|| = r(x) \leq ||x||$ wynikają z a) i twierdzenia 1 c). Jest też oczywiste, że transformata $\widehat{V} \to C(\widehat{V})$ jest homomorfizmem algebraicznym.□

Wniosek 2. *Homomorfizm Gelfanda przemiennej algebry Banacha z jedynką wtedy i tylko wtedy jest zanurzeniem izometrycznym, gdy spełniony jest warunek*

$$||x^2|| = ||x||^2 \quad \textit{dla} \ \ \textit{każdego}\ x \in V \tag{15}$$

<u>Dowód.</u> Konieczność warunku wynika stąd, że jest on spełniony w algebrze funkcyjnej $C(\widehat{V})$. Przeciwnie, gdy zachodzi (15), to przez indukcję mamy też $||x^{2^n}|| = ||x||^{2^n}$, skąd $r(x) = ||x||$ i ostatecznie $||\widehat{x}|| = ||x||$, dla każdego $x \in V$. (Korzystamy z twierdzeń 1c) i 3c).)□

2. Transformata Gelfanda na przemiennych C*-algebrach z jedynką.

<u>Definicja.</u> Przez C*-algebrę rozumiemy algebrę Banacha V, na której określone jest przekształcenie „sprzężenia" $V \ni x \mapsto x^* \in V$, o następujących własnościach:

iv) $(xy)^* = y^*x^*$ i $(\lambda x + y)^* = \overline{\lambda}x^* + y^*$ dla $x, y \in V$ (kontra–multyplikatywność i półliniowość);

v) zachodzi $(x^*)^* = x$ i $||x^*x|| = ||x||^2$ dla $x \in V$, gdzie norma $||\ ||$ spełnia warunek iii) z p.1.

Odnotujmy, że gdy C*–algebra ma jedynkę e, to e^* też jest jedynką, skąd $e^* = e$.

<u>Definicja.</u> Element x C*–algebry V nazywamy:

samosprzężonym, gdy $x = x^*$,
normalnym, gdy $xx^* = x^*x$,
unitarnym, gdy V ma jedynkę i $xx^* = x^*x = e$.

Lemat 1. *W C^*–algebrze z jedynką, spektrum elementu samosprzężonego jest rzeczywiste: $\sigma_x \subset \mathbb{R}$ gdy $x = x^*$.*

<u>Dowód.</u> Dla $\lambda \in \sigma_x$ i $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lambda + t\mathbf{i} \in \sigma_{x+ite}$, skąd $|\lambda + t\mathbf{i}| \leq ||x + \mathbf{i}te||$. Ponieważ $(x + t\mathbf{i})^* = x - t\mathbf{i}$, więc korzystając z v) otrzymujemy

$$|\lambda|^2 + 2t\mathrm{Im}\lambda + t^2 = |\lambda + t\mathbf{i}|^2 \leq ||(x - \mathbf{i}te)(x + \mathbf{i}te)|| = ||x^2 + t^2e|| \leq ||x^2|| + t^2$$

i ostatecznie $\mathrm{Im}\lambda = 0$ wobec dowolności liczby $t \in \mathbb{R}$.$\square$

Definicja. Przekształcenie pomiędzy C*–algebrami nazywamy $*$–homomorfizmem, gdy jest homomorfizmem algebr Banacha i zachowuje sprzężenie (tzn. przeprowadza sprzężenie elementu na sprzężenie jego obrazu.) Gdy mowa o $*$–homomorfiźmie algebr z jedynką żądamy ponadto, by jedynka była przeprowadzana na jedynkę. Podobnie, $*$–podalgebra C*–algebry V oznacza podalgebrę zamknięta ze względu na sprzężenie.

Twierdzenie 1 (Gelfanda – Naimarka)**.** *Dla każdej przemiennej C^*–algebry V z jedynką, transformata Gelfanda $V \to C(\widehat{V})$ jest $*$–izmorfizmem algebr z jedynką, będącym izometrią.*

Dowód. a) Dowiedziemy wpierw, że $\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}$. Gdy element x jest samosprzężony, to $\sigma_x \subset \mathbb{R}$ i żądana równość $\widehat{x} = \overline{\widehat{x}}$ wynika stąd, że $\mathrm{im}(\widehat{x}) = \sigma_x$. W ogólnym przypadku mamy $x = y + \mathbf{i}z$, gdzie elementy y i z są samosprzężone. (Należy przyjąć $2y = (x + x^*)$, $2z = \mathbf{i}(x^* - x)$.) Zatem $\widehat{x^*} = \widehat{y - \mathbf{i}z} = \widehat{y} - \mathbf{i}\widehat{z} = \overline{\widehat{x}}$, jak żądano.

b) Ponieważ algebra jest przemienna, to każdy jej element x jest normalny i wobec tego spełnia $||x||^2 = ||x^2||$. (Jest to zadanie ....) Z wniosku 2 w p. 1 wynika więc, że transformata Gelfanda jest zanurzeniem izometrycznym, a z a) – że jest ona $*$–homomorfizmem. (Gra tu rolę też twierdzenie 3 c) z p. 1.) Jej obraz P jest wobec tego domkniętą $*$–podalgebrą algebry $C(\widehat{V})$, zawierającą funkcje stałe. Ponadto P rozdziela punkty: gdy $\varphi, \psi \in \widehat{V}$ są różnymi charakterami, to dla pewnego $x \in V$ zachodzi $\varphi(x) \neq \psi(x)$ i wobec tego $\widehat{x}(\varphi) \neq \widehat{x}(\psi)$. Na podstawie twierdzenia Stone'a–Weierstrassa zachodzi więc $P = C(\widehat{V})$, co kończy dowód.$\square$

Wniosek 1. *a) Każda przemienna C^*-algebra z jedynką jest izometrycznie $*$–izomorficzna z C^*–algebrą funkcji ciągłych na pewnej przestrzeni zwartej. Dotyczy to m. in. każdej zawierającej funkcję 1 $*$–podalgebry algebry $C_b(X)$ (ograniczonych funkcji ciągłych na przestrzeni topologicznej X) lub takiejże podalgebry algebry $L_\infty(\mu)$, gdzie μ jest miarą nieujemną.*

b) Gdy X jest przestrzenią zwartą, a W jest $*$–podalgebrą algebry $C(X)$, zawierającą funkcję 1_X, to istnieje przestrzeń zwarta Y i surjektywne przekształcenie ciągłe $p : X \to Y$ takie, że $W = \{f \circ p : f \in C(Y)\}$.

Dowód. Część a) jest oczywista. Wynika z niej, że w b) istnieje przestrzeń zwarta Y i $*$–izomorfizm $F : C(Y) \to W \subset C(X)$. Z zadania .... wynika zaś istnienie przekształcenia $p : X \to Y$ takiego, że $F(f) = f \circ p$ dla $f \in C(Y)$. Ponieważ $\ker(F) = \{0\}$, więc $p(X) = Y$. $\square$

Lemat 2. *Niech V będzie przemienną C^*–algebrą z jedynką e, a W będzie jej $*$–podalgebrą, zawierającą e. Wówczas spektrum elementu $x \in W$ nie zależy od tego, czy traktujemy x jako element algebry V, czy jako element algebry W.*

Dowód. Możemy parę V, W zmienić izomorficznie i tym samym założyć, że $V = C(X)$ i $W = \{f \circ p : f \in C(Y)\}$, gdzie przestrzenie X i Y są zwarte i $p : X \to Y$ jest ciągłą surjekcją. Gdy element $x - \lambda e = f \circ p \in W$ jest odwracalny w V, to $0 \notin \mathrm{im}(f)$ i $(1/f) \circ p$ jest odwrotnością $x - \lambda e$ w W. Stąd bezpośrednio wynika teza. (Można też ominąć wniosek 1 b), lecz skorzystać z tw. 1 i rozumować jak w dowodzie tw. 2 w §7.1.) ⊟

Wniosek 2 (zasadniczy)**.** *Niech V będzie C^*–algebrą z jedynką i niech element $x \in V$ będzie normalny. Wówczas istnieje $*$–homomorfizm $\Phi : C(\sigma_x) \to V$, będący izometrycznym zanurzeniem i przeprowadzający 1 na e, zaś id na x.*
Dodatek *Obrazem tego homomorfizmu jest najmniejsza $*$–podalgebra algebry V, zawierająca e i x.*

Dowód. Oznaczmy powyższą podalgebrę przez W. Jest ona przemienna, bo element x jest normalny. Na podstawie twierdzenia Gelfanda–Naimarka istnieje izometryczny $*$–izomorfizm $F : W \to C(\widehat{W})$. W szczególności, $C(\widehat{W})$ jest swą najmniejszą $*$–podalgebrą, zawierającą funkcje $1 = F(e)$ i $\widehat{x} = F(x)$. (Transformata $\widehat{x}$ jest względem algebry W.) Funkcja $\widehat{x}$ jest różnowartościowa na $\widehat{W}$, bo inaczej algebra $C(\widehat{W})$ nie rozdzielałaby punktów z $\widehat{W}$, co jest nonsensem. Na podstawie tw. 3a) z p.1, funkcja $\widehat{x}$ jest homeomorfizmem zwartej przestrzeni $\widehat{W}$ na zbiór $\sigma_x^W = \sigma_x^V$, który w tezie i dalej oznaczamy σ_x. Możemy więc określić izometryczny $*$–izomorfizm $G : C(\sigma_x) \to C(\widehat{W})$ wzorem $G(f) = f \circ \widehat{x}$. Ponieważ $G(1) = 1$ i $G(id) = \widehat{x}$, jak również $F^{-1}(1) = e$ i $F^{-1}(\widehat{x}) = x$, więc $\Phi = F^{-1} \circ G$ ma żądane własności.□

Uwaga 1 (zasadnicza) Gdy zamiast $\Phi(f)$ pisać $f(x)$, to wniosek 2 stwierdza możliwość określenia wartości funkcji $f \in C(\sigma_x)$ na danym elemencie normalnym $x \in V$. W przypadku $V = \mathcal{L}(H)$ oznacza to istnienie „ciągłego rachunku funkcyjnego", rozważanego w §7.

Przykład 1. Dwa wykorzystywane już wyżej przykłady algebr to:

a) Algebra $(C_0(X), || \, ||_{\sup})$, dla danej przestrzeni lokalnie zwartej X, rozpatrywana z naturalnymi działaniami na funkcjach. Ma ona jedynkę tylko gdy przestrzeń X jest zwarta. Każdy punkt $x \in X$ wyznacza charakter δ_x na $C(X)$, określony wzorem $C(X) \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$, zaś przyporządkowanie $X \ni x \mapsto \delta_x \in \widehat{C(X)}$ okazuje się być (surjektywnym) homeomorfizmem; w szczególności, każdy charakter φ na $C(X)$ jest postaci δ_x dla pewnego $x \in X$. (Patrz zadanie 12.6.) Z naturalnym (zespolonym) sprzężeniem funkcji jest to C*–algebra.

b) Algebra $\mathcal{L}(V)$ ograniczonych operatorów przekształcających przestrzeń Banacha V w siebie. Jest ona algebrą Banacha naturalnymi działaniami i normą operatorową. Gdy ponadto $V = H$ jest przestrzenią Hilberta, to $\mathcal{L}(H)$ jest C*–algebrą.

Przykład 2. Poniższy przykład wyjaśnia związek transformat Gelfanda i Fouriera.

Niech G oznacza grupę lokalnie zwartą. Przestrzeń $(L_1(G), || \, ||_1)$ jest, z działaniami dodawania i splatania funkcji, algebrą Banacha. (Jednak żadne z naturalnych sprzężeń nie przekształca jej w C*–algebrę!). Każdy charakter $\chi \in \widehat{G}$ (w znaczeniu nadanym w §5), wyznacza na $L_1(G)$ funkcjonał $f \mapsto \widehat{f}(\chi) = \int_G f\overline{\chi}$, będący wartością w punkcie χ transformaty Fouriera funkcji f. Funkcjonał ten jest multyplikatywny (patrz tw. 2 w §5) i można udowodnić, że wszystkie funkcjonały $\varphi \in \widehat{L_1(G)}$ są tej postaci. Prowadzi to do utożsamienia zbioru $\widehat{L_1(G)}$, rozumianego zgodnie z definicją z p.1, z określonym w §5 zbiorem $\widehat{G}$. Przy tym utożsamieniu, transformaty Gelfanda i Fouriera danej funkcji $f \in L_1(G)$ są identyczne. Odnotujmy, że przemienność algebry $L_1(G)$ jest równoważna przemienności grupy G, zaś istnienie jedynki w $L_1(G)$ jest równoważne temu, by grupa G była dyskretna.

§ 9. Literatura (niektóre pozycje)

Podręczniki ogólne: W. Rudin, „Anal. rzeczyw. i zespolona" i „Analiza funkcjonalna"; Alexiewicz „Analiza funkcjonalna"; Dunford, Schwartz „Linear Operators", S. Lang „Real and functional analysis", J.B. Conway „A course in funct. analysis", A. Kirillov i A. Gwisziani „Tieoriemy i zadaczi funkcjonalnowo analiza", D. Werner „Funktionalanalysis" (niem.).

Dodatkowe wiadomości o przestrzeniach liniowo–topologicznych: A.Robertson, W. Robertson „Topological vector spaces".

Dodatkowe wiadomości o tw. Choqueta: Phelps „Lectures on Choquet theorem".

Dodatkowe wiadomosci o miarach niezmienniczych i transformacie Fouriera: podreczniki Loomisa oraz Hewitta i Rossa „Harmonic Analysis", F. Greenleaf „Invariant means on topological groups and their applications".

Dodatkowe wiadomosci o teorii spektralnej i algebrach Banacha: W. Averson „A short course in spectral theory", B. Aupetit „A primer in spectral theory", W. Żelazko „Algebry Banacha".

§ 10. Zadania

(Dokonano poprawek w zadaniach 11.2 i 7.6.)

Analiza Funkcjonalna II wiosna 2008

Dwunasta porcja zadań.

1. Niech V będzie algebrą Banacha. Przyjmijmy $V' = V \times \mathbb{C}$ oraz
$||(x,\lambda)||' = ||x|| + |\lambda|$ i $(x,\lambda)(y,\mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu)$ dla $x, y \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Niech też $e = (0,1) \in \widetilde{V}$. (Motywacja: myślimy o (x,λ) jako o kombinacji $x + \lambda e$.)

a) Dowieść, że V' jest algebrą Banacha z jedynką e, oraz jeśli norma $||\ ||$ jest submultyplikatywna (tzn. spełnia warunek tezy poprzedniego zadania), to $||\ ||'$ też. (Uwaga: V' zawiera V izometrycznie jako podalgebrę, ale jeśli w V istniała jedynka, to przestaje ona nią być w V'.)

b) Dowieść, że jeśli $T : V \to W$ jest homomorfizmem algebr Banacha i W ma jedynkę, to T przedłuża się do homomorfizmu $T' : V' \to W$; a gdy nawet W nie ma jedynki, to T przedłuża się do homomorfizmu $T'' : V' \to W'$, przy czym T' i T'' przeprowadzają jedynkę na jedynkę i są jedynymi takimi przedłużeniami.

2. Dla algebry Banacha V dowieść istnienia normy $||\ ||$, zgodnej z topologią przestrzeni V i takiej, że spełniony jest warunek $||xy|| \le ||x|| \cdot ||y||$ dla $x, y \in V$, przy czym jeśli w V istnieje jedynka e, to $||e|| = 1$. (Wskazówka: gdy V ma jedynkę, to rozważyć normę $||x|| = ||L_x||$, gdzie $L_x(z) = xz$ $(x, z \in V)$ i norma operatora jest wyznaczona przez zadaną normę $||\ ||_0$ przestrzeni V.)

3. Niech x będzie elementem algebry Banacha V z jedynką e. Dowieść, że jeśli $||x^k|| < 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to element $e - x$ jest odwracalny w V. (Zakładamy submultyplikatywność normy. Wskazówka: rozpatrzeć szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.)

4. Niech X będzie przestrzenią zwartą.

a) Dowieść, że gdy μ jest zespoloną miarą regularną na X i istnieją w X rozłączne zbiory otwarte niezerowej miary μ, to funkcjonał $\varphi(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu$ nie jest multyplikatywny na $C(X)$.

b) Korzystając z tw. Riesza wywnioskować, że każdy charakter na $C(X)$ jest postaci $f \mapsto f(x)$, dla pewnego $x \in X$ (zależnego od charakteru).

5. Niech $T : C(X) \to C(Y)$ będzie homomorfizmem algebr Banacha, gdzie X i Y są przestrzeniami zwartymi.

a) Dowieść istnienia funkcji ciągłej $p : Y \to X$ takiej, że $T(f) = f \circ p$.

b) Dowieść, że gdy T jest monomorfizmem, to $p(Y) = X$, a gdy T jest „na", to $p(y_1) \ne p(y_2)$ dla $y_1 \ne y_2$.

6. Znaleźć spektrum operatora $T : \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$, zadanego wzorem

$$T(x) = (x_{n-1} - 2x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} \quad \text{dla } x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

Jedenasta porcja zadań.

Wyniki kol. (dobre) zamieszczam w oddzielnym pliku. Przykro mi z powodu opóźnienia, nie mogłem sobie poradzić z Excellem.

Zalecana metoda rozwiązywania początkowych zadań: sprawdzić, jak się sprawy mają dla operatorów mnożenia M_u, i starać się stąd wyciągnąć wnioski dla dowolnego operatora normalnego.

1. Dla operatora normalnego $A \in \mathcal{L}(H)$ dowieść, że

a) A jest operatorem unitarnym wtedy i tylko wtedy, gdy jego spektrum σ_A jest podzbiorem okręgu $|\lambda| = 1$;

b) A jest operatorem samosprzężonym wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_A \subset \mathbb{R}$:

c) A jest operatorem nieujemnym (tzn. samosprzężonym i spełniającym warunek $\langle Av, v\rangle \geq 0$ dla $\mathbf{v} \in H$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_A \subset [0, \infty)$.

2. Dowieść, że gdy operator A jest normalny, to:

a) Dla $f \in B_b(\sigma_A)$ zachodzi $\sigma_{f(A)} \subset \mathrm{cl}(f(\sigma_A))$, przy czym $\sigma_{f(A)} = f(\sigma_A)$ gdy $f \in C(\sigma_A)$.

b) Dla $f \in B_b(\sigma_A)$ i $g \in B_b(\mathrm{cl}(f(\sigma_A)))$ zachodzi równość $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$.

3. Niech operator A będzie normalny. Dowieść, że

a) Gdy zbiór $S \subset \mathbb{C}$ jest borelowski, to operator $P = 1_S(A)$ jest rzutem ortogonalnym.

b) Gdy $S = \{\lambda\}$ dla pewnej liczby zespolonej λ, to obraz tego rzutu jest równy $\{v \in H : Av = \lambda v\}$.

4. Niech operator A będzie samosprzężony. Dowieść, że operator $U_t = e^{itA}$ jest unitarny dla każdego $t \in \mathbb{R}$ i że $U_s \circ U_t = U_{s+t}$.

5. Ustalmy funkcję $u \in L_1(\mathbb{R})$ i rozważmy operator splotu $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, zadany wzorem $Af = f * u$. Znaleźć spektrum tego operatora. (Wskazówka: wykorzystać transformatę Fouriera.)

6. Niech operator $A : \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ będzie zadany wzorem $Ax = (x_{n-1} + x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ dla $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$, i niech T oznacza okrąg $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, wyposażony w unormowaną „zwykłą” miarę.

a) Dowieść, że operator A jest unitarnie podobny do operatora $B : L_2(T) \to L_2(T)$, zadanego wzorem $(Bf)(z) = 2(\mathrm{Re} z) \cdot f(z)$ dla $f \in L_2(T)$ i $z \in T$. (Wskazówka: j.w.)

b) Wyznaczyć σ_A.

Dziesiąta porcja zadań.

1. Niech operatory $A_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ i $A_1 \in \mathcal{L}(H_2)$ będą unitarnie podobne, tzn. $A_2 = SA_1S^{-1}$ dla pewnej izometrii liniowej $S : H_1 \to H_2$. Dowieść, że:

a) Gdy operator A_1 jest samosprzężony (odp. unitarny lub normalny), to A_2 też.

b) $\sigma_{A_1} = \sigma_{A_2}$.

c) Gdy operator A_1 jest normalny i przyporządkowania $f \mapsto f(A_1)$ i $f \mapsto f(A_2)$ spełniają warunki tezy twierdzenia 1, to $f(A_2) = Sf(A_1)S^{-1}$.

2. Dla $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_A$ zachodzi $||(A - \lambda I)^{-1}|| = 1/\mathrm{dist}(\lambda, \sigma_A)$.

3. Niech $\mathcal{H}_A$ oznacza domkniętą powłokę liniową zbioru $\{A^n : n \in \mathbb{N}\}$. Dowieść, że warunek $B \in \mathcal{H}_A$ jest równoważny temu, by $B = f(A)$ dla pewnej funkcji $f \in C^{\mathbb{C}}(\sigma_A)$.

4. Niech P będzie rzutowaniem ortogonalnym przestrzeni ℓ_2 na podprzestrzeń $\{x \in \ell_2 : x_{2k} = 0 \text{ dla } k \in \mathbb{N}\}$. Wyznaczyć operatory $\cos P$, $\sin P$ i e^{iP}.

5. Niech $P \in \mathcal{B}(H)$ będzie operatorem samosprzężonym, dla którego $P^2 = P$. Dowieść, że P jest rzutowaniem ortogonalnym wzdłuż przestrzeni $\ker(P)$ na przestrzeń $\ker(P)^\perp = \mathrm{im}(P)$.

6. Na przestrzeni Hilberta $L_2(\mu)$ rozważmy **operator mnożenia przez funkcję** $u \in L_\infty(\mu)$, zadany wzorem $M_u(h) = u \cdot h$. Dowieść, że:

a) Spektrum σ_{M_u} tego operatora jest równe **obrazowi istotnemu funkcji** u, zdefiniowanemu jako zbiór liczb zespolonych λ takich, że dla każdego otoczenia N liczby λ, zbiór $f^{-1}(U)$ jest dodatniej miary μ.

b) $M_u^* = M_{\overline{u}}$ i operator M_u jest normalny.

c) Gdy ciąg funkcji $u_n \in L_\infty(\mu)$, ograniczony w normie $|| \, ||_\infty$, jest zbieżny punktowo do funkcji u, to ciąg operatorów M_{u_n} jest zbieżny punktowo do operatora M_u.

d) Dla każdej funkcji borelowskiej $f : \sigma_{M_u} \to \mathbb{C}$, funkcja $f \circ u$ jest określona μ–p.w. i przyporządkowanie $f \mapsto f(M_u) := M_{f \circ u}$ spełnia warunki tezy twierdzenia 1 dla operatora $A = M_u$.

7. Zbadać, jakie warunki ma spełniać funkcja u, by operator M_u był a) samosprzężony, b) unitarny.

Dziewiąta porcja zadań.

1. Udowodnić **lemat Riemanna**: gdy $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, to $\lim_{||y||\to\infty} \widehat{f}(y) = 0$. (Wskazówka: dowieść, że jest tak dla wszystkich f z dogodnie obranego zbioru, liniowo gęstego w L_1. W rozwiązaniu, tak jak i dalej, można korzystać z lematu o gęstości $\mathcal{P}$ w $L_1(\mathbb{R}^n)$ i w $L_2(\mathbb{R}^n)$, patrz ostatnie zadanie.)

2. a) Dowieść, że gdy f i $x_j f$ należą do $L_1(\mathbb{R}^n)$, to pochodna $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}$ istnieje i jest równa $-\mathbf{i}F(x_j f)$.

b) Dowieść, że gdy $f, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, przy czym $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ (tzn. $\lim_{||x||\to\infty} f(x) = 0$), to $F(\frac{\partial f}{\partial x_j}) = \mathbf{i}x_j \widehat{f}$.

c) Przez indukcję względem $|\alpha|$ uzasadnić p. 1 dowodu twierdzenia Plancherela.

3. Ważną rolę w badaniu transformaty Fouriera (i nie tylko) odgrywa „klasa Schwartza" funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, mająca następujące własności: i) $\mathcal{S}$ jest podalgebrą algebry splotowej $L_1(\mathbb{R}^n)$, zawierającą $\mathcal{P}$ i zawartą w $L_2(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$; ii) zachodzi $F(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ i zbiór $\mathcal{S}$ jest zamknięty ze względu na mnożenie przez wielomiany, ze względu na operację sprzęgania zespolonego i ze względu na składanie z izometriami przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Korzystając z tych własności, dowieść dla $f, g \in \mathcal{S}$, że:

a) wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f należą do $\mathcal{S}$;

b) $\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

4. a) Niech $f_1 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, zaś funkcja $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ niech będzie ograniczona i ciągła. Dowieść, że gdy funkcja $f = f_1 - f_2$ ma tę własność, że $\int fg = 0$ dla każdej funkcji $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, to $f = 0$ p.w. (Wskazówka: miara Lebesgue'a jest regularna.)

b) Dowieść, że jest tak i gdy założenie $g \in C_c$ zastąpić przez $g \in \mathcal{P}$.

c) Dowieść, że gdy $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ i $\widehat{f} = 0$, to $f = 0$ p.w. (Wskazówka: wtedy $\int Ff \cdot g = 0, \ \forall g \in \mathcal{P}$.)

5. Niech $f, \widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dowieść, że

a) $F^2 f = f \circ \sigma$. (Wskazówka: zbadać $\int (f \circ \sigma - F^2 f) \cdot g$ przy $g \in \mathcal{P}$.)

b) $f_0 = \widehat{f} \circ \sigma$ jest jedynym elementem L_1 takim, że $\widehat{f_0} = f$.

<u>Definicja.</u> Dla $v, w \in \mathbb{C}[x]$ niech $\langle v, w\rangle' = \int_{\mathbb{R}} v\overline{w}\gamma^2$, gdzie $\gamma(x) = \exp(-x^2/2)$. Wielomiany, otrzymane w wyniku ortonormalizacji Grama–Schmidta z ciągu $1, x, x^2, \ldots$ w przestrzeni prehilbertowskiej $(\mathbb{C}[x], \langle ., .\rangle')$, nazwiemy kolejnymi **unormowanymi wielomianami Hermite'a** i oznaczymy $h_0, h_1, \ldots$. (W szczególności, $\deg h_n = n$ i $h_n \in \mathbb{R}[x]$ dla każdego n.) Przyjmijmy $H_n = h_n\gamma$.

6. a) Dwieść, że $F(H_n) = \mathbf{i}^n H_n$, tzn. H_n jest wektorem własnym transformacji $F_2 : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, odpowiadającym wartości własnej $\mathbf{i}^n$. (Użyteczne może być któreś z poniższych zadań pomocniczych.)

b) Dowieść, że $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $L_2(\mathbb{R})$ i że $F_2 f = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{i}^n \langle f, H_n \rangle H_n$ dla $f \in L_2(\mathbb{R})$. (Jest to **wzór Wienera**.)

7. [pomocnicze A] a) Dowieść, że przekształcenie $\mathbb{C}[x] \ni w \mapsto w\gamma \in \mathcal{P}$ jest izometrią przestrzeni prehilbertowskiej $(\mathbb{C}[x], \langle ., . \rangle')$ na podprzestrzeń $\mathcal{P}$ przestrzeni $L_2(\mathbb{R})$.

b) Wywnioskować, że przekształcenie $w \mapsto F(w\gamma)\gamma^{-1}$ jest izometrią przestrzeni $(\mathbb{C}[x], \langle ., . \rangle')$ na nią samą, przeprowadzającą każdy wielomian na wielomian tego samego stopnia.

c) Wykorzystując tylko definicję ortogonalizacji Grama–Schmidta dowieść, że każdy wielomian h_n jest wektorem własnym powyższej izometrii. Odpowiadającą mu wartość własną wyznaczyć przez porównanie współczynników przy x^n, w oparciu o p. 1 dowodu twierdzenia Plancherela.

8. [Pomocnicze B, zawierające też wiadomości o wielomianach Hermite'a] a) Dwieść, że n–ta pochodna funkcji $\exp(-x^2) = \gamma^2$ wyraża się wzorem $(-1)^n g_n \gamma^2$, gdzie g_n jest wielomianem o najwyższym wyrazie równym $2^n x^n$. Ponadto, $g_n = 2x g_{n-1} - g'_{n-1}$. Otrzymane wielomiany g_n nazwiemy **nieunormowanymi wielomianami Hermite'a**.

b) Korzystając z rozwinięcia funkcji $\exp(-z^2)$ w szereg Taylora wokól punktu x dowieść, że $e^{-(x-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) z^n e^{-x^2}/n!$, skąd $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) z^n/n! = \exp(2xz - z^2)$ dla wszystkich $x, z \in \mathbb{C}$.

c) Dowieść, że $\int g_m g_n \gamma^2 = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$ i wywnioskować, że h_n powstaje z g_n przez unormowanie w normie przestrzeni $(\mathbb{C}[x], \langle ., . \rangle')$. (Wskazówka: z b) uzyskać $\sum_{m,n=0}^{\infty} g_m(x) g_n(x) \gamma^2(x) s^m t^n / m! n! = \exp(2xs + 2xt - s^2 - t^2 - x^2)$, scałkować stronami względem x po $\mathbb{R}$ i rozwinąć otrzymaną prawą stronę w szereg $\sum_{m,n} c_{mn} s^m t^n$.)

9. a) Dowieść, że gdy funkcja $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ jest nieujemna, to funkcja $\widehat{f}$ jest nieujemnie określona.

b) Dowieść, że $\mathbb{R}^n$ można zastąpić przez dowolną abelową grupę lokalnie zwartą.

10. Dowieść, że gdy A jest ośrodkową, lokalnie zwartą, metryzowalną grupą abelową, to i grupa $\widehat{A}$ ma te własności. (Wskazówka: wymaganą topologię przestrzeni $C(X, \mathbb{C})$ można zadać wtedy przy pomocy przeliczalnie wielu pseudonorm.)

11. (Problem.) Udowodnić brakujący „lemat o gęstości": dla każdej funkcji $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ istnieje ciąg funkcji $f_k \in \mathcal{P}$ taki, że $||f - f_k||_j \to 0$ dla $j = 1, 2$. (Tu, jak wyżej i na wykładzie, $\mathcal{P} = \{w\gamma : w \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k]\}$, gdzie $\gamma(x) = \exp(-x^2/2)$.)

Ósma porcja zadań

1. Niech A będzie zwartą grupą abelową. Dowieść, że:

a) Gdy $\chi \in \widehat{A} \setminus \{1\}$, to $\int \chi = 0$. (Wskazówka: wykorzystać równość $\chi(x) = \chi(x_0)\chi(x - x_0)$, gdzie $\chi(x_0) \neq 1$.)

b) Każde dwa różne charaktery na A są ortogonalne, jako elementy $L_2(A)$.

2. Uzasadnić stwierdzenia z wykładu:

a) Każdy charakter na grupie $\mathbb{Z}$ jest postaci $\mathbb{Z} \ni x \mapsto \exp(2\pi \mathbf{i} xy)$, gdzie $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Przyporządkowanie każdemu $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ takiego charakteru ustala izomorfizm algebraiczno–topologiczny grupy $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ na $\widehat{\mathbb{Z}}$.

b) Każdy charakter na grupie addytywnej $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ jest postaci $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni [x] \mapsto \exp(2\pi \mathbf{i} xy)$, gdzie $y \in \mathbb{Z}$. Przyporządkowanie każdemu $y \in \mathbb{Z}$ takiego charakteru ustala izomorfizm algebraiczno–topologiczny grupy $\mathbb{Z}$ na $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})\widehat{\ }$. Równoważnie, zamiast o grupie $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ można myśleć o izomorficznej z nią grupie T; wtedy charaktery są postaci $T \ni z \mapsto z^y$, gdzie $y \in \mathbb{Z}$.

3. a) Znaleźć postać charakterów na grupie cyklicznej $\mathbb{Z}_n$.

b) Gdy G jest sumą prostą skończenie wielu grup lokalnie zwartych G_i, to jaki jest związek pomiędzy grupą dualną $\widehat{G}$ a rodziną grup $\widehat{G_i}$?

4. a) Znaleźć grupę dualną do $G = T^k \oplus \mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{R}^n$, gdzie T to okrąg $|z| = 1$.

b) Dowieść, że powyższa grupa G jest izomorficzna z $\widehat{\widehat{G}}$.

c) Dowieść tego samego dla dowolnej abelowej grupy skończonej. (Wskazówka: twierdzenie z Algebry II o postaci takich grup.)

Definicja. Funkcję f na grupie abelowej G nazywamy **nieujemnie określoną**, gdy dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in G$ macierz $(f(x_i - x_j))_{i,j=1}^n$ jest nieujemnie określona (tzn. jest ona samosprzężona i spełnia warunki $\sum_{i,j=1}^n f(x_i - x_j) z_i \overline{z_j} \geq 0$, $\forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$).

5. Dowieść, że każdy charakter na lokalnie zwartej grupie abelowej jest funkcją nieujemnie określoną.

Problem 1. Dowieść tezy twierdzenia Pontriagina dla grup z zadania 2 (co jest trudniejsze od zadania 2, bo teza ta orzeka o konkretnym przekształceniu.)

Siódma porcja zadań.

1. a) Wyrazić jawnym wzorem (jak w zadaniach poprzedniej serii) lewostronną miarę Haara na grupie 2×2–macierzy rzeczywistych, których wiersze są postaci (x, y) i $(0, 1/x), x \neq 0$. (Każdą taką macierz utożsamamy z punktem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.)

b) Czy miara ta jest prawostronnie niezmiennicza?

2. To samo dla grupy $GL^+(2, \mathbb{R})$ macierzy stopnia 2 o wyznaczniku dodatnim.

3. Dowieść, że gdy μ jest miarą Haara na lokalnie zwartej grupie X, zaś U niepustym zbiorem otwartym w X, to $\mu(U) > 0$. Ponadto, $\mu(X) < \infty$ gdy grupa X jest zwarta.

4. Niech μ będzie lewą miarą Haara na lokalnie zwartej grupie X.

a) Dowieść istnienia funkcji $\Delta : X \to (0, \infty)$ takiej, że $\mu(Sg) = \Delta(g) \cdot \mu(S)$ dla wszystkich $g \in X$ i zbiorów borelowskich $S \subset X$. (Wskazówka: przy ustalonym $g \in X$ rozpatrzeć miarę $S \mapsto \mu(Sg)$.)

b) Dowieść, że Δ jest homomorfizmem grupy X w multyplikatywną grupę $(0, \infty)$.

c) Dowieść, że gdy grupa X jest zwarta, to $\Delta \equiv 1$, wobec czego miara μ jest prawostronnie niezmiennicza. (Wskazówka: we wzorze definiującym funkcję Δ, zwaną **modularną**, przyjąć $S = X$.)

5. a) Niech $\mathbb{R}^\infty$ oznacza iloczyn kartezjański przeliczalnie wielu prostych (topologia i działania liniowe są produktowe). Znaleźć w $\mathbb{R}^\infty$ ciąg zbieżny do 0, którego uwypuklenie nie jest zbiorem zwartym.

b) To samo przy R^∞ zastąpionym przez ℓ_2.

Umowa: Dla zbiorów S, T oznaczamy przez S^T iloczyn kartezjański $\prod_{t \in T} S_t$, gdzie $S_t = S$ dla każdego t. Gdy S jest przestrzenią LT, to S^T traktujemy też jako przestrzeń LT (z topologią produktową i oczywistą strukturą wektorową).

6. Dowieść twierdzenia Kreina–Milmana. (W zadaniu była „przedobrzona" sugestia dowodu tego twierdzenia. Nie umiem dać podpowiedzi innej niż standardowa, tzn. rozważenia rodziny ..ścian" badanego zbioru X i udowodnienia, że zawiera ona element minimalny, a ten składa się tylko z jednego punktu. Zbiór $X_0 \subset X$ nazywamy „ścianą" X, jeśli jest wypukły, zwarty i każdy odcinek w X, przecinający X_0, jest w X_0 zawarty.)

Szósta porcja zadań.

λ_n oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$.

1. a) Dowieść, że przy $U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ miara $\mu(S) = \int_S |x|^{-1} \mathrm{d}\lambda_1(x)$ jest niezmiennicza względem przekształceń $U \ni x \mapsto g \cdot x$, gdzie $g \in U$.

b) Dowieść, że przy $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ miara $\mu(S) = \int_S |z|^{-2} \mathrm{d}\lambda_2(z)$ jest niezmiennicza względem przekształceń $U \ni z \mapsto g \cdot z \in U$, gdzie $g \in U$.

(Równoważne sformułowanie: są to miary niezmiennicze na grupach multyplikatywnych przestrzeni $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, odp. Grupy są abelowe, więc nie odróżniamy lewo- i prawostronnej niezmienniczości.

2. a) Niech U będzie otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$, będącym zarazem grupą względem pewnego mnożenia $(u, v) \mapsto u \cdot v$. Załóżmy, że ponadto spełnione są warunki:

i) dla każdego punktu $u \in U$, przekształcenie $f_u : U \to U$ określone wzorem $f_u(x) = u \cdot x$ jest gładkie,

ii) wartość w punkcie x jakobianu przekształcenia f_u zależy tylko od u, a nie od x. Dowieść, że gdy wartość tego jakobianu oznaczyć przez $j(u)$, to miara $\mu(S) = \int_S |j(u)|^{-1} \mathrm{d}\lambda_n(u)$ jest niezmiennicza względem rodziny przekształceń $\{f_u : u \in U\}$.

b) Niech U oznacza półpłaszczyznę $x > 0$ i utożsamijmy każdy punkt $(x, y) \in U$ z macierzą rzeczywistą o wierszach (x, y) i $(0, 1)$; tym samym w U wprowadźmy mnożenie $(x, y) \cdot (x', y') = (xx', xy' + y)$. Dowieść, że miara $\mu(S) = \int_S x^{-2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ jest lewostronnie niezmiennicza na otrzymanej grupie U (tzn. jest niezmiennicza względem wszystkich przekształceń $f_u, u \in U$.)

3. a) Sformułować i uzasadnić odpowiednik części a) poprzedniego zadania dla miar prawostronnie niezmienniczych.

b) Przy oznaczeniach części b) poprzedniego zadania dowieść, że miara $\mu(S) = \int_S x^{-1} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ jest prawostronnie niezmiennicza na U.

4. a) Uzupełnić dowód twierdzenia Caratheodory'go: gdy $S \subset \mathbb{R}^n$ i $x \in \mathrm{conv}(S)$, to $x \in \mathrm{conv}\{s_1 \ldots, s_{n+1}\}$ dla pewnych (niekoniecznie różnych) $s_1, \ldots, s_{n+1} \in S$.

b) Dowieść, że uwypuklenie zwartego podzbioru przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem domkniętym.

5. Obmyśleć lub przeczytać i opanować dowód twierdzenia Helly'ego: gdy $\mathcal{S}$ jest skończoną rodziną wypukłych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o pustym przecięciu, to $S_1 \cap \cdots \cap S_{n+1} = \emptyset$ dla pewnych $S_1, \ldots, S_{n+1} \in \mathcal{S}$ (niekoniecznie różnych).

Piąta porcja zadań.

1. Macierz kwadratową nazywamy **bistochastyczną**, jeśli suma wyrazów każdego jej wiersza jest $= 1$ i wyrazy te są nieujemne, i tak samo jest dla kolumn. Znaleźć punkty ekstremalne w zbiorze rzeczywistych $n \times n$–macierzy bistochastycznych

a) przy $n = 2$, b) przy $n = 3$, c)* przy dowolnym $n < \infty$.

2. a) Opisać macierze (w standardowej bazie) tych przekształceń liniowych $\ell_1^n \to \ell_1^n$, których norma jest ≤ 1.

b) To samo przy ℓ_∞^n zastąpionym przez ℓ_∞^n.

(W obu przypadkach ℓ_1^n i ℓ_∞^n oznacza przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z normą $||x|| = \sum_i |x|_i$ i $||x|| = \max_i |x_i|$, odpowiednio, zaś na przekształceniach liniowych rozpatrujemy normę operatorową $||L|| = \sup\{||Lx|| : ||x|| \leq 1\}$).

3. W oparciu o zadanie 1 c) poprzedniej serii uzyskać przez analogię z zadaniem 7 b) z serii 3 oszacowanie wyznacznika dowolnej kwadratowej macierzy rzeczywistej

a) stopnia 3, b)* stopnia n.

4. Dowieść, że podzbiór lokalnie wypukłej przestrzeni LT jest ograniczony $\Leftrightarrow$ jego obraz przy każdym ciągłym funkcjonale liniowym jest ograniczony.

5. a) Niech $\mathbb{R}^\infty$ oznacza iloczyn kartezjański przeliczalnie wielu prostych (topologia i działania liniowe są produktowe). Znaleźć w $\mathbb{R}^\infty$ ciąg zbieżny do 0, którego uwypuklenie nie jest zbiorem zwartym.

b) To samo przy $\mathbb{R}^\infty$ zastąpionym przez ℓ_2.

6. Mówimy, że topologia lokalnie wypukłej PLT jest **zadana przez rodzinę pseudonorm** $\mathcal{P}$, jeśli rodzina skończonych przecięć kul względem tych pseudonorm (o dodatnich promieniach) jest bazą otoczeń zera w tej przestrzeni.

a) Niech X i Y będą przestrzeniami LT z topologiami zadanymi przez rodziny pseudonorm $\mathcal{P}$ (na X) i $\mathcal{Q}$ (na Y), odpowiednio. Dowieść, że przekształcenie liniowe $T : X \to Y$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pseudonormy $q \in \mathcal{Q}$ istnieje liczba $\varepsilon > 0$ i skończenie wiele pseudonorm $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ takich, że ($p_i(x) < \varepsilon$ dla $i = 1, \ldots, n$) $\Rightarrow q(Tx) < 1$.

b) Niech $C^\infty(U)$ oznacza przestrzeń nieskończenie wiele razy różniczkowalnych funkcji rzeczywistych na przedziale otwartym $U \subset \mathbb{R}$, i niech dalej $p_{K,n}(f) = \sup\{|f^{(n)}(x)| : x \in K\}$ dla każdych $f \in C^\infty(U)$, $n \geq 0$ i zbioru zwartego $K \subset U$. Przestrzeń $C^\infty(U)$ rozpatrujemy w topologii wyznaczonej przez rodzinę wszystkich pseudonorm $p_{K,n}$. Dowieść, że dla każdej funkcji $v \in C(U)$ o zwartym nośniku, wzór $\varphi_v(f) = \int_U f(x)v(x)\mathrm{d}x$ określa ciagły funkcjonał liniowy φ_v na $C^\infty(U)$.

c) Dla każdego liniowego funkcjonału ciągłego φ na $C^\infty(U)$ przyjmijmy $\varphi'(f) = -\varphi(f')$. Dowieść, że funkcjonał φ' jest ciągły, i przy oznaczeniach punktu b) obliczyć φ_v' i φ_v'' dla $v(x) = \max(0, 1 - |x|)$.

Czwarta porcja zadań.

1. a) Znaleźć punkty ekstremalne kuli jednostkowej przestrzeni $\mathbb{R}^n$, rozpatrywanej
i) z normą $||x|| = \max_i |x_i|$;
ii) z normą $||x|| = \sum_i |x_i|$.
b) Uogólnić a) na przypadek przestrzeni $\ell_\infty(\Gamma)$ i $\ell_1(\Gamma)$.
c)* Niech norma $|| \ ||$ na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ będzie określona wzorem $||x|| = \max\{|\sum_{j\in J} x_j| : J \subset \{1, \ldots, n\}\}$. Dowieść, że gdy punkt x jest ekstremalny w kuli względem tej normy, to ma nie więcej niż 2 współrzędne różne od 0, i są one równe ± 1. Uzyskać pełny opis punktów ekstremalnych. (Dla $n = 2$ rozwiązano to w ub. tyg.)

Definicja. Funkcję $f : K \to \mathbb{R}$ nazywamy **ściśle wypukłą**, jeśli zbiór K jest wypukły i $f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$ dla $t \in (0,1)$ i $x, y \in K$ $(x \neq y)$.

2. Dowieść, że norma przestrzeni Hilberta H jest funkcją ściśle wypukłą na zbiorze wypukłym $K \subset H$, którego żadne dwa punkty $x, y \in K$ nie są proporcjonalne, a także jej kwadrat jest fukcją ściśle wypukłą na całej przestrzeni H.

3. Dowieść równoważności warunków:
a) Funkcja $|| \ ||^2$ jest ściśle wypukła na rzeczywistej przestrzeni unormowanej $(X, || \ ||)$
b) Każdy punkt sfery $S = \{x : ||x|| = 1\}$ jest ekstremalny w kuli $B = \{x : ||x|| \leq 1\}$;
c) Żaden funkcjonał $\varphi \in X^*$ nie przyjmuje swej normy w dwóch różnych punktach $x_1, x_2 \in B$.

4. Dowieść, że kula jednostkowa przestrzeni c_0 nie ma punktów ekstremalnych.

5. * Niech V oznacza przestrzeń $\mathcal{L}(\ell_2^n, \ell_2^n)$ wszystkich operatorów liniowych $\ell_2^n \to \ell_2^n$, rozpatrywaną z normą operatorową. (Jak zwykle, ℓ_2^n to n–wymiarowa przestrzeń euklidesowa.) Dowieść, że izometrie $\ell_2^n \to \ell_2^n$ są punktami ekstremalnymi kuli jednostkowej tej przestrzeni, i vice versa.

Trzecia porcja zadań.

1. Dla podzbiorów A, B przestrzeni LT zachodzi inkluzja $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.

2. Dowieść, że gdy G jest zbiorem wypukłym takim, że $\bigcup_n nG = X$, to funkcjonał Minkowskiego p_G jest dodatnio jednorodną funkcją wypukłą (lub, co na jedno wychodzi, że $p_G(tx) = tp_G(x)$ i $p_G(x+y) \leq p_G(x) + p_G(y)$ dla $x, y \in X$ i $t \geq 0$).

3. Gdy G jest wypukłym otoczeniem zera w przestrzeni LT, a p_G jest jego funkcjonałem Minkowskiego, to $\mathrm{int} G = \{x : p_G(x) < 1\}$ i $\overline{G} = \{x : p_G(x) \leq 1\}$.

4. Niech C będzie najmniejszym symetrycznym (względem 0) zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^2$, zawierającym punkty $(-1,1), (0,1)$ i $(1,0)$. Dowieść, że funkcjonał Minkowskiego p_C tego zbioru jest zadany wzorem $p_C(x) = \max(|x_1|, |x_2|, |x_1 + x_2|)$.

<ins>Definicja.</ins> Punkt x jest **ekstremalny** w zbiorze wypukłym C, jeśli nie istnieją $a, b \in C \setminus \{x\}$ takie, że $x = \frac{1}{2}(a+b)$. Punkty ekstremalne wielościanu wypukłego nazywamy też jego wierzchołkami.

5. Niech $T : X \to Y$ będzie przekształceniem liniowym między przestrzeniami liniowymi, niech C będzie zbiorem wypukłym w X i niech punkt y_0 będzie ekstremalny w zbiorze $T(C)$. Dowieść, że każdy ektremalny punkt zbioru $T^{-1}(y_0) \cap C$ jest ekstremalny w C.

6. Niech C będzie zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Dowieść, że

a) Gdy $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym, to wartość $\sup \varphi(C)$ jest przyjmowana w pewnym punkcie ekstremalnym zbioru C.

b) (słaba wersja twierdzenia Minkowskiego): zbiór C jest domknięciem uwypuklenia zbioru swych punktów ekstremalnych.

(Wskazówka: dowodzić obu części równocześnie, przez indukcję względem n.)

7. a) Niech C będzie zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zaś φ będzie k–linową funkcją rzeczywistą na $\mathbb{R}^n$. (Zgodnie z umową z GAL-u oznacza to, że dziedziną φ jest k-krotna potęga kartezjańska przestrzeni $\mathbb{R}^n$.) Dowieść, że wartość $\sup \varphi(C \times C \times \cdots \times C)$ jest przyjmowana w pewnym punkcie $(c_1, \ldots, c_k)$, gdzie każdy z punktów $c_1, \ldots, c_k$ jest ekstremalny w C.

b) Dowieść, że wyznacznik 2×2 macierzy rzeczywistej o wierszach $a = (a_1, a_2)$ i $b = (b_1, b_2)$ nie jest większy od liczby $||a|| \cdot ||b||$, gdzie $||x|| = \max(|x_1|, |x_2|, |x_1 + x_2|)$ dla $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

<ins>Problem 1.</ins> Dowieść twierdzenia Minkowskiego: zwarty, wypukły podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest uwypukleniem zbioru swych punktów ekstremalnych.

Druga porcja zadań Oznaczania: Dla podzbiorów A, B przestrzeni LT i zbioru i Λ skalarów przyjmijmy $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ i $\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}$; piszemy też $a + B = \{a\} + B$ etc.

1. a) Gdy oba zbiory A i B są wypukłe (odp. są zbalansowane, są podprzestrzeniami liniowymi, są ograniczone [1]), to $A + B$ także.

b) Gdy zbiór A jest otwarty, to $A + B$ również, podobnie jak zbiór ΛA dla $\Lambda \subset A$ takich, że $0 \notin \Lambda$.

c) Gdy zbiór A jest zwarty, zaś B domknięty, to $A + B$ jest domknięty.

d) Czy wyżej założenie domkniętości A byłoby wystarczające?

2. Przestrzeń LT jest jedyną swą otwartą podprzestrzenią liniową.

3. Gdy zbiór A jest wypukły i $a \in \mathrm{int} A, b \in \overline{A}$, to $[a, b) \subset \mathrm{int} A$.

4. Wnętrze zbioru wypukłego jest zbiorem wypukłym; podobnie domknięcie.

5. Wnętrze zbioru wypukłego, jeśli jest niepuste, to jest równe wnętrzu domknięcia tego zbioru.

6. a) Wypukły i zbalansowany podzbiór ciała $\mathbb{F}$ jest kulą (być może o nieskończonym promieniu), o środku w $0_{\mathbb{F}}$.

b) Wywnioskować, że niezerowy funkcjonał liniowy jest przekształceniem otwartym.

7. a) Nieciągły funkcjonał liniowy przyjmuje na każdym zbiorze otwartym wszystkie wartości skalarne.

b) W szczególności, funkcjonał liniowy jest ciągły jeśli jego jądro jest domknięte.

8. * Czy tezy zadań 7 i 6b) są prawdziwe dla przekształceń liniowych o wartościach w $\mathbb{F}^n, n < \infty$? (W 6b) zakładamy, że przekształcenie jest „na”.)

9. a) Suma (algebraiczna) dwóch podprzestrzeni domkniętych, z których jedna jest skończonego wymiaru, jest podprzestrzenią domkniętą.

b)* Czy założenie o skończonym wymiarze jest zbędne?

10. a) Dowieść, że dla $p \in (0, 1)$ wzór $d(f, g) = \int_0^1 |f - g|^p$ zadaje metrykę przesuwalną na przestrzeni $L_p([0, 1])$.

b)* Dowieść, że uwypuklenie dowolnej kuli (w metryce d) jest całą przestrzenią L_p.

[1] Zbiór K jest **ograniczony**, jeśli dla każdego otoczenia G punktu $\mathbf{0}$ zachodzi $A \subset nG$ dla pewnego n.

Pierwsza porcja zadań. Dla kompletności zamieszczam też zadania rozwiązywane na ćwiczeniach (numeracja mogła być inna); są to zadania 1, 5 i 8.

1. Udowodnić następujący „**aksjomat Pascha**": gdy $b' \in [a, v]$ i $a' \in [b, v]$, to $[a, a'] \cap [b, b'] \neq \emptyset$.

2. a) $\mathrm{conv} A = \{t_1 a_1 + \ldots t_n a_n : n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in A, t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ i $\sum_i t_i = 1\}$.

b) Gdy zbiory $X, Y \subset V$ są wypukłe i niepuste, to $\mathrm{conv}(X \cup Y) = \bigcup\{[x, y] : x \in X, y \in Y\}$.

3. Przy $A = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : t > p(x)\}$ i $\widetilde{A} = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : t \geq p(x)\}$, wypukłość funkcji $p : X \to \mathbb{R}$ jest równoważna wypukłości któregokolwiek ze zbiorów A lub $\widetilde{A}$, a także temu, by zbiór X był wypukły i $\mathrm{conv}\{(x, p(x)) : x \in X\} \subset \widetilde{A}$.

4. a) Jeśli funkcja $p : X \to [-\infty, \infty)$ jest wypukła i zbiór X jest symetryczny względem 0_V (tzn. $-X = X$), to $p(0_V) = \{-\infty\}$ lub $p(X) \subset \mathbb{R}$.

b) Gdy funkcje $p : X \to \mathbb{R}$ i $-p$ obie są wypukłe, to p jest **funkcją $\mathbb{R}$–afiniczną**, tzn. $p(ty + (1-t)z) = tp(y) + (1-t)p(z)$ dla $x, y \in X$ i $t \in [0,1]$.

5. Niech $X \subset V$ będzie zbiorem wypukłym, takim, że $0_V \in X$. Wówczas:

a) Zbiór $V_0 = \{sx - ty : x, y \in X, s, t \in [0, \infty)\}$ jest powłoką liniową zbioru X.

b) Każdą funkcję $\mathbb{R}$–afiniczną $\varphi_0 : X \to \mathbb{R}$ taką, że $\varphi_0(0_V) = 0_{\mathbb{R}}$, można przedłużyć do funkcji $\mathbb{R}$–liniowej $\varphi : V \to \mathbb{R}$.

6. (Przypomnienie GALu.) Dowieść, że gdy ψ i φ są funkcjonałami liniowymi na przestrzeni wektorowej V i $\ker(\psi) \supset \ker(\varphi)$, to $\psi = \lambda \cdot \varphi$ dla pewnego skalara λ. Ogólniej, gdy $\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ są funkcjonałami liniowymi i $\ker(\psi) \supset \bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i)$, to ψ jest kombinacją liniową pozostałych funkcjonałów.

7. a) (Przypomnienie GALu.) Dla danej rzeczywistej przestrzeni liniowej wskazać przestrzeń zespoloną, zawierającą ją jako podprzestrzeń rzeczywistą.

b) To samo dla unormowanych przestrzeni liniowych. (Należy zdefiniować normę na otrzymanej przestrzeni zespolonej.)

8. Udowodnić następujące twierdzenie Mazura i Orlicza: Gdy p jest funkcją wypukłą na rzeczywistej przestrzeni liniowej V, zaś S podzbiorem przestrzeni $V \times \mathbb{R}$, to dla istnienia funkcji liniowej $\varphi : V \to \mathbb{R}$, której wykres leży nad zbiorem S i pod wykresem funkcji p potrzeba i wystarcza, by dla każdych skończonych układów $\{(x_\gamma, c_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma} \subset S$ i $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset (0, \infty)$ spełniona była nierówność $\sum_\gamma t_\gamma c_\gamma \leq p(\sum_\gamma t_\gamma x_\gamma)$.

9. W oparciu o tw. Mazura i Orlicza z zadania 9 dowieść następujących „twierdzeń o momentach":

a) Niech S będzie podzbiorem przestrzeni $V \times \mathbb{R}$, gdzie V jest rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Wówczas dla istnienia funkcjonału $\varphi \in V^*$, którego wykres leży nad zbiorem S i który spełnia warunek $||\varphi|| \leq M$, potrzeba i wystarcza, by dla każdych skończonych układów $\{(x_\gamma, c_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \subset S$ i $\{t_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset (0,\infty)$ spełniona była nierówność $\sum_\gamma t_\gamma c_\gamma \leq M||\sum_\gamma t_\gamma x_\gamma||$.

b) Przy powyższych oznaczeniach, funkcjonał $\varphi \in V^*$ o wykresie leżącym nad zbiorem S istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy ostatni warunek jest spełniony dla pewnej stałej $M < \infty$.

c) Jakie warunki otrzymamy w a) i b), gdy „wykres leży nad zbiorem" zamienić na „wykres zawiera zbiór"?

10. Niech podprzestrzeń liniowa V przestrzeni $\ell_\infty^{\mathbb{R}}(T)$ i rodzina G przekształceń zbioru T będą takie, że $1_T \in V$ i $f \circ g \in V$ dla wszystkich $f \in V$ i $g \in G$. (Elementy $\ell_\infty^{\mathbb{R}}(T)$ traktujemy jako ograniczone funkcje rzeczywiste na T, zaś 1_T to funkcja stała, równa 1.) Dowieść równoważności warunków:

a) Na przestrzeni V istnieje nieujemny funkcjonał liniowy φ taki, że $\varphi(1_T) = 1$ i $\varphi(f \circ g) = \varphi(f)$ dla wszystkich $f \in V$ i $g \in G$. („Nieujemny" oznacza, że $\varphi(f) \geq 0$ dla nieujemnych funkcji $f \in V$.)

b) Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $f_1, \ldots, f_n \in V, g_1, \ldots, g_n \in G$ zachodzi $\sup \sum_{i=1}^n (f_i \circ g_i - f_i) \geq 0$. (Ostatnia suma jest funkcją na zbiorze T i chodzi o jej kres górny.)

<u>Problem 1.</u> Dowieść, że warunek b) w ostatnim zadaniu jest spełniony jeśli rodzina G jest przemienna i zamknięta ze względu na składanie. Wywnioskować, że każda grupa przemienna G jest **średniowalna** (ang. „amenable"), tzn. na $\ell_\infty(G)$ istnieje nieujemny funkcjonał liniowy $\varphi \neq 0$ taki, że $\varphi(f) = \varphi(f_g)$ dla wszystkich $f \in \ell_\infty(G)$ i $g \in G$, gdzie $f_g(x) = f(x+g)$ dla $x \in G$.

<u>Problem 2.</u> Dowieść następującego twierdzenia Banacha: na przestrzeni $\ell_\infty^{\mathbb{R}}([0,\infty))$ istnieje funkcjonał liniowy φ taki, że $\underline{\lim}_{t\to\infty} f(t) \leq \varphi(f) \leq \overline{\lim}_{t\to\infty} f(t)$ oraz $\varphi(f) = \varphi(t \mapsto f(t+s))$ dla każdej funkcji $f \in \ell_\infty([0,\infty))$ i każdej liczby $s \geq 0$.

<u>Problem 3.</u> Udowodnić kolejne twierdzenia Banacha:

a) Gdy T to okrąg $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, traktowany jako grupa względem mnożenia, to na przestrzeni $V = \ell_\infty(T)$ istnieje nieujemny funkcjonał liniowy φ taki, że $\varphi(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\mathrm{d}t$ dla funkcji mierzalnych $f \in V$ i $\varphi(f) = \varphi(f_g)$ dla $g \in T$ i $f \in V$. (Oznaczenia jak w problemie 1.)

b) Wywnioskować, że miarę Lebesgue'a na prostej $\mathbb{R}$ można rozszerzyć do nieujemnej miary addytywnej, określonej na wszystkich podzbiorach prostej $\mathbb{R}$ i niezmienniczej względem dowolnej izometrii tejże. (Miara taka przyjmuje m.in. wartość ∞; nie może ona być przeliczalnie addytywna. Banach udowodnił też, że można w b) zastąpić prostą $\mathbb{R}$ przez płaszczyznę $\mathbb{R}^2$, lecz – wraz z Tarskim – nie przez przestrzeń $\mathbb{R}^3$.)