

8 Dobrze ufundowanie

Zbiór częściowo uporządkowany $\langle A, \leq \rangle$ nazwiemy *dobrze ufundowanym*, gdy nie istnieje w A nieskończony zstępujący ciąg elementów, tzn. gdy nie istnieje różnowartościowa funkcja $f : N \rightarrow A$ taka, że dla wszystkich $n \in N$, zachodzi $f(n+1) \leq f(n)$. Dobrze ufundowany liniowy porządek nazywamy *dobrym porządkiem*.

Przypomnijmy, że jeśli $\leq$ jest częściowym porządkiem, to dla zaznaczenia, że element a jest ściśle mniejszy od b (tzn. $a \neq b$ oraz $a \leq b$) będziemy pisać $a < b$.

Następujące twierdzenie podaje pożyteczną charakteryzację porządków dobrze ufundowanych.

Twierdzenie 8.1 *Częściowy porządek $\langle A, \leq \rangle$ jest dobrze ufundowany, wtw, gdy każdy niepusty podzbiór zbioru A ma element minimalny.*

Dowód: Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ będzie zbiorem dobrze ufundowanym i założmy, że $X \subseteq A$ jest niepustym podzbiorem nie mającym elementu minimalnego. Zdefiniujemy ciąg $f : N \rightarrow X$ następująco. Niech $f(0) \in X$ będzie dowolnym elementem. Założmy, że f została zdefiniowana dla liczb $k \leq n$ oraz, że dla wszystkich $k < n$ mamy $f(k') <_A f(k)$. Wówczas $f(n')$ wybieramy jako dowolny element zbioru X taki, że $f(n') <_A f(n)$. Istnienie takiego elementu $f(n')$ wynika stąd, że $f(n)$ nie jest elementem minimalnym w X . Tak więc zdefiniowaliśmy nieskończony zstępujący ciąg elementów zbioru A . Otrzymana sprzeczność dowodzi, że każdy niepusty podzbiór zbioru A ma element minimalny.

Na odwrót, jeśli $f : N \rightarrow A$ jest nieskończonym zstępującym ciągiem elementów A to oczywiście obraz $\tilde{f}(N)$ jest niepustym podzbiorem A nie mającym elementu minimalnego. ■

Bezpośrednią konsekwencją powyższego twierdzenia oraz zasady minimum (zob. Twierdzenie 3.5) jest następujący wynik.

Twierdzenie 8.2 *Zbiór liczb naturalnych ze zwykłym porządkiem jest dobrym porządkiem.*

Przykład 8.3

1. Dla dowolnego zbioru A , zbiór wszystkich słów nad A uporządkowany porządkiem prefikсовym jest dobrze ufundowany. Istotnie, gdyby $w_0 > w_1 > \dots$ był zstępującym ciągiem słów, to biorąc pod uwagę ich długości dostalibyśmy zstępujący ciąg liczb naturalnych $|w_0| > |w_1| > \dots$, co jest niemożliwe na mocy Twierdzenia 8.2.
2. Zbiór $\langle \{0, 1\}^*, \preceq \rangle$ z porządkiem leksykograficznym indukowanym przez porządek $0 \leq 1$ (zob. Przykład 7.8) nie jest dobrze ufundowany bowiem ciąg

$$\dots \preceq 0^{k+1}1 \preceq 0^k1 \preceq \dots \preceq 1$$

tworzy nieskończony łańcuch zstępujący.

3. Jeśli $\mathcal{F}$ jest dowolną rodziną zbiorów skończonych, to $\langle \mathcal{F}, \subseteq \rangle$ jest dobrze ufundowanym porządkiem. Wynika to stąd, że dla zbiorów skończonych A, B , jeśli A jest właściwym podzbiorem B , to $|A| < |B|$. Zatem nieskończony zstępujący ciąg zbiorów w $\mathcal{F}$ prowadziłby do nieskończonego zstępującego ciągu liczb naturalnych. Tak więc, zbiór FT_k skończonych drzew k -argumentowych z relacją zawierania jest dobrze ufundowany dla każdego k .
4. $\langle FT_k, \subseteq \rangle$ (zob. Fakt 7.13) jest dobrze ufundowany. Stosuje się tutaj rozumowanie analogiczne do przedstawionego w poprzednim punkcie.
5. Dla każdego zbioru etykiet Σ , zbiór $FT(\Sigma)$ termów nad Σ (zob. Przykład 7.17) uporządkowany relacją $\subseteq$ (“być podtermem”) jest dobrze ufundowany. Powód jest ten sam co w poprzednich dwóch punktach.
6. Oczywiście każdy skończony porządek jest dobrze ufundowany.
7. Zbiór $\langle T_1, \subseteq \rangle$ drzew 1-argumentowych jest dobrze uporządkowany. Wynika to stąd, że jedynym drzewem nieskończonym w T_1 jest $\{0\}^*$. Jest to element największy w T_1 . Tak więc $\langle T_1, \subseteq \rangle$ można otrzymać ze zbioru dobrze uporządkowanego $\langle FT_1, \subseteq \rangle$ przez dodanie elementu największego. Operacja dodawania elementu największego oczywiście nie psuje własności dobrego ufundowania.
8. Zbiór $\langle T_2, \subseteq \rangle$ natomiast nie jest dobrze ufundowany. Weźmy następujący ciąg drzew 2-argumentowych

$$t_n = \{0^n w \mid w \in \{0, 1\}^*\} \cup \{0^i \mid i < n\} \cup \{0^i 1 \mid i < n\}$$

Dla dowolnej liczby n , zbiór t_{n+1} jest właściwym podzbiorem t_n (zauważmy, że $0^n 11 \in t_n - t_{n+1}$). Powyższy ciąg jest nieskończonym ciągiem zstępującym. Przykład ten bez trudu można przenieść na dowolne $\langle T_k, \subseteq \rangle$ dla $k \geq 2$.

8.1 Indukcja noetherowska

W zbiorach dobrze ufundowanych obowiązuje zasada indukcji. Jest to naturalne uogólnienie zwykłej zasady indukcji dla liczb naturalnych.

Twierdzenie 8.4 (Zasada indukcji noetherowskiej)

Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ będzie porządkiem dobrze ufundowanym i niech $P \subseteq A$ będzie zbiorem spełniającym następujący warunek,

dla każdego $x \in A$, z faktu że wszystkie elementy $y <_A x$ należą do P wynika, że $x \in P$

Wówczas $P = A$.

Dowód: Jeśli $A - P \neq \emptyset$, to niech $x_0 \in A - P$ będzie elementem minimalnym. Zatem jeśli $y <_A x_0$, to $y \in P$. Z założeń twierdzenia wynika, że $x_0 \in P$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $A - P = \emptyset$, czyli $A = P$. ■

Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie porządkiem dobrze ufundowanym. Wprowadzimy następujące oznaczenie. Dla dowolnego $a \in A$, definiujemy

$$\mathcal{O}(a) = \{x \in A \mid x < a\}.$$

Każdy zbiór postaci $\mathcal{O}(a)$ będziemy nazywać *odcinkiem początkowym* w zbiorze $\langle A, \leq \rangle$. Powyższa notacja zbiorów $\mathcal{O}(a)$ nie uwzględnia zależności od częściowego porządku $\langle A, \leq \rangle$. Zwykle nie będzie to prowadziło do niejednoznaczności. W wątpliwych przypadkach będziemy używali indeksu dla podkreślenia zależności.

Na zbiorach dobrze ufundowanych można indukcyjnie definiować funkcje, podobnie jak w przypadku zbioru liczb naturalnych.

Twierdzenie 8.5 (O definiowaniu funkcji przez indukcję noetherowską)

Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zbiorem dobrze ufundowanym. Dla dowolnych zbiorów B oraz C i dowolnej funkcji $h : PF(A \times C, B) \times A \times C \rightarrow B$ istnieje dokładnie jedna funkcja $f : A \times C \rightarrow B$ spełniająca poniższy warunek dla dowolnych $x \in A$ oraz $c \in C$:

$$f(x, c) = h(f \cap (\mathcal{O}(x) \times C \times B), x, c). \quad (37)$$

Dowód: Pokażemy najpierw, że dla każdego $x \in A$ istnieje funkcja $f_x : (\mathcal{O}(x) \cup \{x\}) \times C \rightarrow B$ taka, że dla dowolnych $y \leq x$ oraz $c \in C$,

$$f_x(y, c) = h(f_x \cap (\mathcal{O}(y) \times C \times B), y, c). \quad (38)$$

Powyższą własność udowodnimy przez indukcję noetherowską ze względu na x . Niech $y < x$ i niech $f_y : (\mathcal{O}(y) \cup \{y\}) \times C \rightarrow B$ będzie funkcją spełniającą powyższy warunek. Weźmy dowolne $y_1, y_2 < x$. Twierdzimy, że dla dowolnego $z \in A$ takiego, że $z \leq y_1$, $z \leq y_2$ oraz dla dowolnego $c \in C$ mamy

$$f_{y_1}(y, c) = f_{y_2}(y, c).$$

Wynika to natychmiast z założenia indukcyjnego i z wzoru (38).

Zatem $g = \bigcup \{f_y \mid y < x\}$ jest funkcją o dziedzinie $\mathcal{O}(x) \times C$. Tak więc możemy zdefiniować funkcję f_x następująco

$$f_x(y, c) = g \cup \{\langle x, h(g, y, c) \rangle\},$$

gdzie $y \leq x$ oraz $c \in C$. Pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie, że f_x spełnia (38). To kończy dowód (38).

Z udowodnionej powyżej własności natychmiast wynika, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in A$, mamy

$$f_{x_1}(y, c) = f_{x_2}(y, c),$$

gdzie $y \leq x_1$, $y \leq x_2$ oraz $c \in C$.

Zatem $f = \bigcup \{f_x \mid x \in A\}$ jest funkcją o dziedzinie $A \times C$. Mamy

$$f(x, c) = f_x(x, c) = h(f_x \cap (\mathcal{O}(x) \times C \times B), x, c) = h(f \cap (\mathcal{O}(x) \times C \times B), x, c).$$

Powyższa równość kończy dowód twierdzenia. ■

Zbiór C w powyższym twierdzeniu pełni rolę zbioru parametrów. Zauważmy, że definicja indukcyjna funkcji w (37) polega na określaniu funkcji na elemencie x w zależności od już zdefiniowanej części funkcji dla argumentów mniejszych od x . W szczególności jeśli x jest elementem minimalnym w A , to (37) redukuje się do wzoru:

$$f(x, c) = h(\emptyset, x, c)$$

Przykład 8.6 Zilustrujemy zastosowanie twierdzenia 8.5 na przykładzie definicji funkcji konkatencji słów $f : X^* \times X^* \rightarrow X^*$. Załóżmy, że dla każdego $a \in X$ mamy daną funkcję $g_a : X^* \rightarrow X^*$, która każdemu słowu $w \in X^*$ przyporządkowuje słowo aw . Funkcję g_a można nazwać a -tym następnikiem.

Intuicyjnie, następująca rodzina równań definiuje f ,

$$f(\varepsilon, w) = w \tag{39}$$

$$f(au, w) = g_a(f(u, w)), \quad \text{dla } a \in X \tag{40}$$

Można tę definicję sformalizować stosując twierdzenie 8.5. Niech $A = B = C = X^*$ oraz niech $h : PF(X^* \times X^*, X^*) \times X^* \times X^* \rightarrow X^*$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco

$$h(f, u, w) = \begin{cases} g_a(f(u', w)) & \text{jeśli } u = au' \text{ oraz } (u', w) \in \text{Dom}(f) \\ w & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Porządek $\leq_s$ na zbiorze A definiujemy następująco. Dla $u, w \in A$, mamy $w \leq_s u$ wtedy i tylko wtedy, gdy w jest przyrostkiem u , tzn., gdy istnieje $w' \in A$ takie, że $u = w'w$. Porządek $\langle A, \leq_s \rangle$ jest dobrze ufundowany, gdyż jest on izomorficzny z porządkiem prefikсовym na A (izomorfizm ustala funkcja, która każdemu słowu w przyporządkowuje słowo w^R , powstające z w przez odwrócenie kolejności liter w w).

Łatwo jest zauważyć, że równania (39), (40) definiujące f są równoważne równaniu (37) z twierdzenia 8.5 przy h zdefiniowanym powyżej.

Więcej przykładów definicji funkcji przez indukcję noetherowską poznamy w następnych działach poświęconych logice.

8.2 Dobrze porządki

Przypomnijmy, że dobry porządek to liniowy prządek dobrze ufundowany.

Fakt 8.7 *Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zbiorem dobrze uporządkowanym. Dla dowolnych $a, b \in A$, jeśli $a \neq b$, to odcinki początkowe $\mathcal{O}(a)$ i $\mathcal{O}(b)$ nie są izomorficzne.*

Dowód: Załóżmy, że $b < a$ oraz, że $f : \mathcal{O}(a) \rightarrow \mathcal{O}(b)$ jest izomorfizmem. Niech $a \in A$ będzie najmniejszym elementem, dla którego istnieje $c < a$ taki, że $\mathcal{O}(a)$ i $\mathcal{O}(c)$ są izomorficzne. Ponieważ $\mathcal{O}(b)$ jest właściwym podzbiorem zbioru $\mathcal{O}(a)$, to zbiór $\mathcal{O}(b) - \vec{f}(\mathcal{O}(b))$ jest niepusty. Niech c będzie najmniejszym elementem w tym zbiorze. Oczywiście $\vec{f}(\mathcal{O}(b)) \subseteq \mathcal{O}(c)$. Z wyboru elementu c wynika, że dla dowolnego $x < c$, ponieważ $x \in \mathcal{O}(b)$, to $x \in \vec{f}(\mathcal{O}(b))$. Zatem

$$\vec{f}(\mathcal{O}(b)) = \mathcal{O}(c),$$

czyli odcinki początkowe $\mathcal{O}(b)$ i $\mathcal{O}(c)$ są izomorficzne. Ponieważ $c < b < a$, to otrzymujemy sprzeczność z wyborem elementu a . ■

Z powyższego faktu natychmiast otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 8.8 *Żaden zbiór dobrze uporządkowany nie jest izomorficzny ze swoim odcinkiem początkowym.*

Przedstawimy teraz konstrukcję, do której będziemy się odwoływać w kilku następnych lematach oraz w części poświęconej liczbom porządkowym. Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ oraz $\langle B, \leq_B \rangle$ będą zbiorami dobrze uporządkowanymi. Niech $*$ będzie elementem nie należącym do zbioru B . Niech $B' = B \cup \{*\}$. Porządek na B' jest rozszerzeniem porządku $\leq_B$ przez dołączenie $*$ jako elementu największego. Zdefiniujemy $g : A \rightarrow B'$ przez indukcję noetherowską. Dla $a \in A$, niech $g(a)$ będzie najmniejszym elementem w zbiorze $B - \{g(x) \mid x <_A a\}$, o ile ten zbiór jest niepusty. Jeśli $B - \{g(x) \mid x <_A a\} = \emptyset$, to definiujemy $g(a) = *$. Funkcję g nazwiemy *przekształceniem kanonicznym* indukowanym przez $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$.

Lemat 8.9 *Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ będą zbiorami dobrze uporządkowanymi i niech $g : A \rightarrow B'$ będzie przekształceniem kanonicznym indukowanym przez te zbiory.*

(i) *Dla każdego $a \in A$, jeśli $g(a) \neq *$, to $\vec{g}(\mathcal{O}(a)) = \mathcal{O}(g(a))$.*

(ii) *Jeśli $a \in A$ jest najmniejszym elementem takim, że $g(a) = *$, to $\vec{g}(\mathcal{O}(a)) = B$.*

Dowód: Udowodnimy (i) przez indukcję noetherowską ze względu na a . Zauważmy, że ponieważ $g(a) \neq *$, to nie ma znaczenia czy odcinek początkowy wyznaczony przez $g(a)$ jest brany względem zbioru B czy B' . Z założenia o funkcji g wynika, że

$$g(a) \notin \{g(x) \mid x <_A a\}. \quad (41)$$

Weźmy dowolny $c \in \mathcal{O}(a)$. Gdyby $g(a) <_{B'} g(c)$, to mielibyśmy

$$g(a) \in \mathcal{O}(g(c)) = \vec{g}(\mathcal{O}(c)) \subseteq \{g(x) \mid x <_A a\},$$

co przeczy (41). Z tych samych powodów mamy $g(c) \neq g(a)$. Zatem

$$\vec{g}(\mathcal{O}(a)) \subseteq \mathcal{O}(g(a)).$$

Na odwrót, weźmy $b <_B g(a)$ dla pewnego $b \in B$. Ponieważ $g(a)$ jest najmniejszym elementem spełniającym (41), to istnieje $c <_A a$ taki, że $b = g(c)$. Zatem $b \in \vec{g}(\mathcal{O}(a))$, co kończy dowód (i).

Dla dowodu (ii) zauważmy, że ponieważ $g(a) = *$, to $B \subseteq \{g(x) \mid x <_A a\} = \vec{g}(\mathcal{O}(a))$. Z drugiej strony, z założeń w punkcie (ii) wynika, że dla każdego $c <_A a$, mamy $g(c) \in B$. Zatem $\vec{g}(\mathcal{O}(a)) \subseteq B$. To kończy dowód lematu. ■

Z powyższego lematu otrzymujemy natychmiast następujący wniosek, którego dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Wniosek 8.10 *Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ będą zbiorami dobrze uporządkowanymi i niech $g : A \rightarrow B'$ będzie przekształceniem kanonicznym indukowanym przez te zbiory.*

(i) *g jest monotoniczna.*

(ii) *Jeśli $* \notin \vec{g}(A)$, to g jest różnowartościowa.*

(iii) *Jeśli $* \in \vec{g}(A)$ oraz $a \in A$ jest najmniejszym elementem takim, że $g(a) = *$, to $\langle B, \leq_B \rangle$ jest izomorficzny z odcinkiem początkowym $\mathcal{O}(a)$.*

Następny fakt pokazuje, że przekształcenie kanoniczne jest najmniejszym spośród wszystkich funkcji monotonicznych pomiędzy dwoma ustalonymi dobrymi porządkami.

Lemat 8.11 *Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ będą zbiorami dobrze uporządkowanymi i niech $g : A \rightarrow B'$ będzie przekształceniem kanonicznym indukowanym przez te zbiory. Dla dowolnej funkcji monotonicznej i różnowartościowej $f : A \rightarrow B$ i dla dowolnego $a \in A$ mamy*

$$g(a) \leq_B f(a).$$

W szczególności wynika stąd, że jeśli istnieje monotoniczna i różnowartościowa funkcja z $\langle A, \leq_A \rangle$ w $\langle B, \leq_B \rangle$ to $ \notin \vec{g}(A)$ oraz $g : A \rightarrow B$ jest różnowartościowa.*

Dowód: Najpierw udowodnimy powyższą nierówność przez indukcję noetherowską ze względu na a , przy dodatkowym założeniu, że $g(a) \neq *$. Weźmy dowolny a taki, że $g(a) \neq *$ i przypuśćmy, że $f(a) <_B g(a)$. Ponieważ $g(a) \notin \{g(x) \mid x <_A a\}$, to z definicji funkcji g wynika, że istnieje $x <_A a$ taki, że $f(a) = g(x)$. Z założenia indukcyjnego mamy $g(x) \leq_B f(x)$. Zatem $f(a) \leq_B f(x)$, co przeczy założeniu o monotoniczności i różnowartościowości f . Otrzymana sprzeczność dowodzi nierówności $f(a) \leq_B g(a)$.

Przypuśćmy teraz, że $g(a) = *$ i niech $a \in A$ będzie najmniejszym elementem o tej własności. Z Faktu 8.9 (ii) wynika, że $B = \{g(x) \mid x <_A a\}$. Zatem istnieje $x <_A a$ taki, że $f(a) = g(x)$. Z powyższej części dowodu wiemy, że $g(x) \leq_B f(x)$. Zatem $f(a) \leq_B f(x)$ i podobnie jak wyżej, otrzymujemy sprzeczność. Zatem musi być $g(a) \neq *$.

Druga część Lematu 8.11 wynika z pierwszej oraz z Wniosku 8.10 (ii). ■

Lemat 8.12 *Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ będą zbiorami dobrze uporządkowanymi i niech $g : A \rightarrow B'$ oraz $h : B \rightarrow A'$ będą przekształceniami kanonicznymi indukowanymi przez te zbiory. Wtedy dla każdego $a \in A$ takiego, że $g(a) \neq *$, zachodzi $hg(a) = a$.*

Dowód: Dowodzimy lemat przez indukcję noetherowską ze względu na $a \in A$, spełniające warunek $g(a) \neq *$. Weźmy dowolne takie a i rozważmy zbiór $X = \{h(y) \mid y <_B g(a)\}$. Pokażemy, że

$$X = \mathcal{O}(a). \quad (42)$$

Niech $x = h(y)$ dla pewnego $y <_B g(a)$. Z definicji funkcji g wynika, że istnieje $z <_A a$ taki, że $y = g(z)$. Zatem, stosując założenie indukcyjne otrzymujemy

$$h(y) = hg(z) = z.$$

Wynika stąd, że $x <_A a$.

Na odwrót, weźmy $x <_A a$, wtedy na mocy Lematu 8.9 mamy $g(x) <_B g(a)$ oraz z założenia indukcyjnego $x = hg(x)$. Zatem $x \in X$. To kończy dowód (42).

Tak więc $A - X \neq \emptyset$ i $hg(a)$ jest najmniejszym elementem w tym zbiorze. Jest to oczywiście element a , na mocy (42). ■

8.3 Liczby porządkowe

Przypomnijmy, że liczby kardynalne są obiektami przyporządkowanymi zbiorom w ten sposób, że dwa zbiory mają przyporządkowany ten sam obiekt wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory te są równoliczne. Zatem liczby kardynalne reprezentują w pewnym sensie klasy zbiorów

równolicznych. Analogiczną rolę w stosunku do dobrych porządków spełniają liczby porządkowe — reprezentują one klasy dobrych porządków izomorficznych. Tak więc, *liczbami porządkowymi* są obiekty przyporządkowane każdemu dobremu porządkowi w ten sposób, że dwóm porządkom jest przyporządkowany ten sam obiekt wtedy i tylko wtedy, gdy te porządki są izomorficzne. Jeśli α jest liczbą porządkową odpowiadającą dobremu porządkowi $\langle A, \leq \rangle$, to mówimy też, że $\langle A, \leq \rangle$ jest *uporządkowany w typ* α . Będziemy to oznaczać $\overline{\langle A, \leq \rangle} = \alpha$.

Liczbą porządkową odpowiadającą dobremu porządkowi $\langle n, \leq \rangle$ jest liczba n . Natomiast porządkowi $\langle N, \leq \rangle$ odpowiada liczba porządkowa oznaczana ω (omega).

Liczby porządkowe można dodawać. Jeśli α jest liczbą porządkową związaną z dobrym porządkiem $\langle A, \leq_A \rangle$ a liczba β jest związana z $\langle B, \leq_B \rangle$, to liczba $\alpha + \beta$ jest z definicji związana z porządkiem, który jest takim rozszerzeniem porządków $\leq_A$ oraz $\leq_B$, że wszystkie elementy A są mniejsze od wszystkich elementów B (zakładamy, bez zmniejszenia ogólności, że A i B są rozłączne). Pozostawimy czytelnikowi dowód, że tak określony porządek jest dobrym porządkiem. Zauważmy, że $1 + \omega = \omega$ oraz, że $\omega + 1 \neq \omega$, bowiem $\omega + 1$ reprezentuje porządek z elementem największym, a ω reprezentuje porządek bez elementu największego, a ponadto izomorfizm przeprowadza element największy na element największy. Zatem dodawanie liczb porządkowych nie jest operacją przemienne. Dla skończonych liczb porządkowych pokrywa się ono ze zwykłym dodawaniem liczb naturalnych.

Przykładowo, liczba $\omega + 1$ jest przyporządkowana dobremu porządkowi drzew 1-argumentowych $\langle T_1, \subseteq \rangle$.

Liczby porządkowe można porównywać. Jeśli $\overline{\langle A, \leq_A \rangle} = \alpha$ oraz $\overline{\langle B, \leq_B \rangle} = \beta$, to mówimy, że α jest mniejsza lub równa β (piszemy $\alpha \leq \beta$), wtw, gdy istnieje monotoniczna i różnowartościowa funkcja $f : A \rightarrow B$. Definiujemy $\alpha < \beta$, gdy $\alpha \leq \beta$ oraz $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ nie są izomorficzne.

Poniżej zajmiemy się pewnymi podstawowymi własnościami tak zdefiniowanego związku.¹²

Fakt 8.13 *Dla dowolnych zbiorów dobrze uporządkowanych $\langle A, \leq_A \rangle$ oraz $\langle B, \leq_B \rangle$, mamy $\overline{\langle A, \leq_A \rangle} < \overline{\langle B, \leq_B \rangle}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle A, \leq_A \rangle$ jest izomorficzny z pewnym odcinkiem początkowym w $\langle B, \leq_B \rangle$.*

Dowód: ($\Rightarrow$) Niech $g : A \rightarrow B'$ będzie przekształceniem kanonicznym indukowanym przez $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$. Z Wniosku 8.10 wynika, że g jest różnowartościowa oraz $g : A \rightarrow B$. Z założenia wynika, że g nie może być na B . Niech $b \in B - \tilde{g}(A)$ będzie najmniejszym elementem. Pokażemy, że

$$\tilde{g}(A) = \mathcal{O}(b) \quad (43)$$

Niech $a \in A$ będzie dowolnym elementem. Gdyby $b <_B g(a)$ to z Lematu 8.9 istniałoby $x <_A a$ takie, że $b = g(x)$, wbrew wyborowi b . Zatem $g(a) <_B b$, czyli $g(a) \in \mathcal{O}(b)$. Na odwrót, jeśli $c <_B b$, to z wyboru b wynika, że $c \in \tilde{g}(A)$. To dowodzi (43).

¹²Ścisłe mówiąc porównywanie liczb porządkowych nie jest relacją bo nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych.

Z (43) wynika, że $\langle A, \leq_A \rangle$ jest izomorficzny z $\mathcal{O}(b)$.

Implikacja $(\Leftarrow)$ jest oczywista — gdyby $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ były izomorficzne, to $\langle B, \leq_B \rangle$ byłby izomorficzny ze swoim odcinkiem początkowym, co jest niemożliwe na mocy Wniosku 8.8. ■

Twierdzenie 8.14 (Cantor)

Dla dowolnych zbiorów dobrze uporządkowanych $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$, jeśli $\overline{\langle A, \leq_A \rangle} \leq \overline{\langle B, \leq_B \rangle}$ oraz $\overline{\langle B, \leq_B \rangle} \leq \overline{\langle A, \leq_A \rangle}$, to $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ są izomorficzne.

Dowód: Weźmy kanoniczne przekształcenia $g : A \rightarrow B'$ oraz $h : B \rightarrow A'$, indukowane przez $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$. Z Lematu 8.11 wynika, że $* \notin \vec{g}(A)$ oraz $* \notin \vec{h}(B)$. Zatem, na mocy Lematu 8.12, funkcje $g : A \rightarrow B$ i $h : B \rightarrow A$ są izomorfizmami. ■

Twierdzenie 8.15 (O trichotomii)

Dla dowolnych liczb porządkowych α, β zachodzi dokładnie jedna z następujących możliwości:

$$(i) \quad \alpha < \beta;$$

$$(ii) \quad \beta < \alpha;$$

$$(iii) \quad \alpha = \beta.$$

Dowód: Oczywiście żadne dwa z powyższych warunków nie mogą zajść jednocześnie. Dla dowodu, że zawsze musi zajść któryś z tych warunków weźmy dowolne zbiory dobrze uporządkowane $\langle A, \leq_A \rangle$ oraz $\langle B, \leq_B \rangle$ takie, że $\overline{\langle A, \leq_A \rangle} = \alpha$ oraz $\overline{\langle B, \leq_B \rangle} = \beta$. Rozważmy przekształcenia kanoniczne $g : A \rightarrow B'$ oraz $h : B \rightarrow A'$, indukowane przez te zbiory.

Na mocy Wniosku 8.10, jeśli $* \notin \vec{g}(A)$ to $\alpha \leq \beta$, a zatem zachodzi (i) lub (iii). Podobnie, jeśli $* \notin \vec{h}(B)$, to $\beta \leq \alpha$ i zachodzi (ii) lub (iii). Jeśli $* \in \vec{g}(A)$, to na mocy Wniosku 8.10 zachodzi (ii). Wreszcie, jeśli $* \in \vec{h}(B)$, to zachodzi (i). ■

Twierdzenie 8.16 Każdy zbiór liczb porządkowych jest dobrze uporządkowany przez $\leq$.

Dowód: Weźmy dowolny zbiór Z liczb porządkowych. Z Twierdzeń 8.14 oraz 8.15 wynika, że Z jest liniowo uporządkowany.

Przypuśćmy, że mamy nieskończony zstępujący łańcuch w Z

$$\alpha_1 > \alpha_1 > \dots$$

Niech $\overline{\langle A_i, \leq_{A_i} \rangle} = \alpha_i$ dla $i \geq 0$. Pokażemy, że dla każdego $i > 0$, istnieje $a_i \in A_0$ taki, że odcinek początkowy $\mathcal{O}(a_i)$ jest izomorficzny z A_i oraz $a_{i+1} <_{A_0} a_i$.

Powyższą własność dowodzimy przez indukcję ze względu na i . Ponieważ $\alpha_1 < \alpha_0$, to na mocy Faktu 8.13, istnieje $a_1 \in A_0$ taki, że $\langle A_1, \leq_{A_1} \rangle$ jest izomorficzny z $\mathcal{O}(a_1)$.

Weźmy dowolne $i > 1$. Stosując podobne rozumowanie znajdujemy $c \in A_{i-1}$ taki, że $\langle A_i, \leq_{A_i} \rangle$ jest izomorficzny z $\mathcal{O}(c)$. Z założenia indukcyjnego $\langle A_{i-1}, \leq_{A_{i-1}} \rangle$ jest izomorficzny z $\mathcal{O}(a_{i-1}) \subseteq A_0$. Niech $a_i \in \mathcal{O}(a_{i-1})$ będzie elementem, na który przechodzi c przy tym izomorfizmie. Ponieważ przy izomorfizmie odcinek początkowy jest przekształcany na odcinek początkowy, to odcinki $\mathcal{O}(c)$ i $\mathcal{O}(a_i)$ są izomorficzne. Zatem $\langle A_i, \leq_{A_i} \rangle$ jest izomorficzny z $\mathcal{O}(a_i)$.

Tak więc zdefiniowaliśmy nieskończony zstępujący ciąg w $\langle A_0, \leq_{A_0} \rangle$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że Z jest dobrze uporządkowany. ■

8.4 Twierdzenie Zermelo i dowód lematu Kuratowskiego-Zorna

Na zakończenie informacji o dobrym ufundowaniu przytoczymy twierdzenie mające charakter równie niekonstruktywny jak lemat Kuratowskiego-Zorna.

Twierdzenie 8.17 (Zermelo)

Każdy zbiór można dobrze uporządkować, tzn. dla każdego zbioru A istnieje relacja dobrego porządku na A .

Dowód: Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem wszystkich par $\langle X, r \rangle$ takich, że $X \subseteq A$ oraz r jest dobrym porządkiem w X . Niech Z będzie zbiorem wszystkich liczb porządkowych α takich, że istnieje $\langle X, r \rangle \in \mathcal{R}$, uporządkowany w typ α . Na mocy Twierdzenia 8.16 zbiór Z jest dobrze uporządkowany relacją $\leq$.

Zdefiniujemy funkcję $f : Z \rightarrow A$ przez indukcję noetherowską. Niech $a_0 \in A$ będzie dowolnym ustalonym elementem.¹³ Dla $\alpha \in Z$, jako $f(\alpha)$ wybieramy dowolny element ze zbioru $A - \{f(\beta) \mid \beta < \alpha\}$, o ile zbiór ten jest niepusty. Jeśli $\{f(\beta) \mid \beta < \alpha\} = A$, to kładziemy $f(\alpha) = a_0$.

Pokażemy, że

$$\vec{f}(Z) = A. \quad (44)$$

Przypuśćmy, że $X = \vec{f}(Z) \neq A$. Wówczas, jak łatwo wynika z definicji f , funkcja f jest różnowartościowa, a zatem w zbiorze X można określić dobry porządek r , indukowany przez porządek w Z . Porządek ten jest oczywiście izomorficzny z $\langle Z, \leq \rangle$. Niech $\gamma = \overline{\langle Z, \leq \rangle}$. Ponieważ $\langle X, r \rangle \in \mathcal{R}$, to $\gamma \in Z$ i, co za tym idzie, $\mathcal{O}(\gamma) \subseteq Z$. Zatem Z byłby izomorficzny ze swoim odcinkiem początkowym. Otrzymana sprzeczność dowodzi (44).

¹³Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $A \neq \emptyset$.

Jeśli istnieje $\alpha \in Z$ taka, że $\{f(\beta) \mid \beta < \alpha\} = A$, to niech α będzie najmniejsza o tej własności. Wówczas f , ograniczona do $\mathcal{O}(\alpha)$, jest różnowartościowa i ponieważ $\vec{f}(\mathcal{O}(\alpha)) = A$, to indukuje ona dobry porządek na A . Jeśli dla każdego $\alpha \in Z$ mamy $\{f(\beta) \mid \beta < \alpha\} \neq A$, to f jest różnowartościowa i z (44) wynika, że również w tym przypadku, f indukuje dobry porządek na A . ■

Jako bezpośredni wniosek z Twierdzenia 8.15 oraz Twierdzenia 8.17 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 8.18 *Dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi $|A| \leq |B|$ lub $|B| \leq |A|$.*

Dowód: Zbiory A i B można dobrze uporządkować. Niech α i β będą typami porządkowymi tych zbiorów. Na mocy Twierdzenia 8.15 mamy, że $\alpha \leq \beta$ lub $\beta \leq \alpha$. W pierwszym przypadku zachodzi $|A| \leq |B|$, a w drugim $|B| \leq |A|$. ■

Skorzystamy teraz z twierdzenia Zermelo do udowodnienia Lematu Kuratowskiego-Zorna (por. Twierdzenie 7.30).

Dowód lematu Kuratowskiego-Zorna:

Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ będzie częściowym porządkiem, w którym każdy łańcuch ma ograniczenie górne. Pokażemy, że A zawiera element maksymalny.

Niech Z będzie dowolnym zbiorem o mocy większej niż A i niech $\preceq$ będzie dobrym porządkiem w Z — taki porządek istnieje na mocy twierdzenia Zermelo. Zdefiniujemy funkcję monotoniczną $f : Z \rightarrow A$ przez indukcję noetherowską.

Niech $z \in Z$ i rozważmy zbiór $X = \{f(u) \mid u \prec z\}$. Z założenia indukcyjnego wynika, że X jest łańcuchem, a zatem ma ograniczenie górne. Jeśli X ma jakieś ograniczenie górne a należące do zbioru $A - X$, to definiujemy $f(z) = a$, gdzie a jest dowolnie wybranym elementem o tej własności. W przeciwnym przypadku X zawiera swoje własne ograniczenie górne a , które musi być zarazem elementem największym w X . Wówczas kładziemy $f(z) = a$.

Ponieważ $|Z| > |A|$, to funkcja f nie może być różnowartościowa. Zatem istnieje $z_0 \in Z$ taki, że dla wszystkich z , jeśli $z_0 \prec z$, to $f(z_0) = f(z)$. Z definicji funkcji f wynika, że $f(z_0)$ jest elementem maksymalnym w $\langle A, \leq_A \rangle$. To kończy dowód lematu Kuratowskiego-Zorna. ■

Zarówno lemat Kuratowskiego-Zorna jak i twierdzenie Zermelo wymagają dla dowodu nowego aksjomatu. Aksjomat ten, zwany *pewnikiem wyboru* orzeka, że dla każdej niepustej rodziny zbiorów niepustych istnieje funkcja wyboru, tzn. funkcja, która każdemu zbiorowi

tej rodziny przyporządkowuje pewien element tego zbioru. Można pokazać, że pewnik wyboru, twierdzenie Zermelo oraz lemat Kuratowskiego-Zorna są sobie równoważne na gruncie pozostałych aksjomatów teorii mnogości.

Zauważmy, że obydwa twierdzenia mają niekonstruktywny dowód, tzn. dowodzi się w nich istnienie obiektu (dobrego prądu w przypadku twierdzenia Zermelo oraz elementu maksymalnego w przypadku lematu Kuratowskiego-Zorna), którego konstrukcji dowód nie podaje.

Zadania

- 8.1.** Dowieść, że jeśli $f : A \rightarrow B$ jest monotoniczną bijekcją pomiędzy dobrymi porządkami $\langle A, \leq_A \rangle$ oraz $\langle B, \leq_B \rangle$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest też monotoniczna. Czy założenie, że mamy do czynienia z dobrymi porządkami jest istotne?
- 8.2.** Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ będzie zupełnym porządkiem i niech $f : A \rightarrow A$ będzie funkcją monotoniczną. Dowieść, że f ma najmniejszy punkt stały. (*Wskazówka:* wziąć dostatecznie dużą liczbę porządkową α i zdefiniować łańcuch iteracji $\{f^\beta(\perp) \mid \beta < \alpha\}$, funkcji f na elemencie najmniejszym $\perp$.)
- 8.3.** Dowieść, że jeśli $\langle A, \leq_A \rangle$ oraz $\langle B, \leq_B \rangle$ są dobrze ufundowane oraz $A \cap B = \emptyset$, to porządek $\langle A \cup B, \leq \rangle$ zdefiniowany poniżej jest też dobrze ufundowany:

$$x \leq y \text{ wtw, gdy } \begin{cases} x \leq_A y, & \text{lub} \\ x \leq_B y, & \text{lub} \\ x \in A \text{ oraz } y \in B \end{cases}$$

- 8.4.** Dowieść, że jeśli $\langle A, \leq_A \rangle$ oraz $\langle B, \leq_B \rangle$ są dobrze ufundowane, to porządek $\langle A \times B, \leq \rangle$ zdefiniowany poniżej jest też dobrze ufundowany:

$$\langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle a_2, b_2 \rangle \text{ wtw, gdy } \begin{cases} b_1 <_B b_2, & \text{lub} \\ b_1 = b_2 \text{ oraz } a_1 \leq_A a_2 \end{cases}$$

- 8.5.** Podzbiór X zbioru częściowo uporządkowanego $\langle A, \leq_A \rangle$ nazwiemy *antyłańcuchem*, gdy żadne dwa elementy zbioru X nie są porównywalne w sensie relacji $\leq_A$.

Dowieść, że jeśli $\langle A, \leq_A \rangle$ oraz $\langle B, \leq_B \rangle$ nie zawierają nieskończonych antyłańcuchów to $\langle A \times B, \leq \rangle$ też nie zawiera nieskończonych antyłańcuchów, gdzie porządek w produkcie $A \times B$ jest zdefiniowany w poprzednim zadaniu.

- 8.6.** Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ będzie częściowym porządkiem dobrze ufundowanym. Niech $P_{fin}(A)$ oznacza zbiór wszystkich skończonych podzbiorów zbioru A . Definiujemy następującą relację $\prec$ w zbiorze $P_{fin}(A)$. Dla skończonych zbiorów $X, Y \subseteq A$, zachodzi $X \prec Y$ wtw, gdy istnieje $a \in Y$ oraz zbiór $Z \subseteq A$ taki, że

- dla każdego $z \in Z$, zachodzi $z <_A a$ oraz
- $X = (Y - \{a\}) \cup Z$.

Dowieść, że następująca relacja $\sqsubseteq$ w $P_{fin}(A)$ jest dobrze ufundowanym częściowym porządkiem: $X \sqsubseteq Y$ zachodzi wtw, gdy $X = Y$ lub istnieje $n > 0$ oraz ciąg $X_0, \dots, X_{n-1}$ skończonych podzbiorów zbioru A taki, że $X = X_0$, $Y = X_{n-1}$ oraz dla każdego $i < n$, zachodzi $X_i \prec X_{i+1}$.

Czy teza zadania zachodzi jeśli w definicji relacji $\prec$ zastąpimy $<_A$ przez $\leq_A$? Relację $\prec$ oraz $\sqsubseteq$ można analogicznie zdefiniować w całym zbiorze $P(A)$. Czy relacja $\sqsubseteq$ jest wówczas częściowym porządkiem dobrze ufundowanym?

- 8.7.** Dowieść, że jeśli $\langle A, \leq_A \rangle$ nie zawiera nieskończonych antyłańcuchów, to $\langle P_{fin}(A), \sqsubseteq \rangle$ też nie zawiera nieskończonych antyłańcuchów, gdzie $\sqsubseteq$ jest relacją zdefiniowaną w poprzednim zadaniu.