

7 Częściowe porządki

Częściowym porządkiem w zbiorze A nazywamy parę $\langle A, \leq \rangle$, gdzie $\leq \subseteq A \times A$ jest relacją dwuargumentową spełniającą następujące warunki.

- (*Zwrotność*) Dla każdego $a \in A$, zachodzi $a \leq a$.
- (*Antysymetria*) Dla dowolnych $a, b \in A$, jeśli $a \leq b$ oraz $b \leq a$, to $a = b$.
- (*Przechodność*) Dla dowolnych $a, b, c \in A$, jeśli $a \leq b$ oraz $b \leq c$, to $a \leq c$.

Jeśli ponadto porządek $\leq$ spełnia warunek spójności:

- (*Spójność*) Dla dowolnych $a, b \in A$, zachodzi $a \leq b$ lub $b \leq a$.

to nazywamy go *porządkiem liniowym* lub *łańcuchem*.

Jeśli $\langle A, \leq \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to napis $a < b$ będzie oznaczał zdanie “ $a \leq b$ oraz $a \neq b$ ”.

Przykład 7.1 Zbiór potęgowy $\langle P(A), \subseteq \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym relacją inkluzji. Ten zbiór jest łańcuchem wtw, gdy A ma co najwyżej jeden element.

Przykład 7.2 Zbiór liczb naturalnych N ze zwykłą relacją porządku jest liniowo uporządkowany (zob. Twierdzenie 3.3 (v)) Przypomnijmy, że N był wprowadzony jako najmniejszy zbiór induktywny, a więc jest rodziną zbiorów uporządkowaną relacją zawierania.

Powyższe dwa przykłady są szczególnym przypadkiem następującej sytuacji.

Fakt 7.3 *Każda rodzina zbiorów z relacją zawierania jest częściowym porządkiem.*

Dowód: Wynika natychmiast z własności relacji zawierania. ■

Przykład 7.4 Zbiór liczb naturalnych dodatnich jest częściowo uporządkowany przez relację podzielności. Łatwy dowód pozostawiamy czytelnikowi.

7.1 Słowa

Podamy teraz kilka przykładów częściowych porządków związanych ze słowami.

Przykład 7.5 (*Porządek prefiksowy.*) Niech A będzie dowolnym zbiorem. W zbiorze A^* , wszystkich skończonych słów skończonych nad A , mamy określoną operację składania (zob. Przykład 4.1 (iii)). Określimy relację porządku prefiksowego. Mówimy, że słowo w jest *prefiksem* słowa u , oznaczamy to przez $w \leq u$, gdy istnieje $w' \in A^*$ taki, że

$$u = ww'.$$

Fakt 7.6 *Relacja $\leq$ porządku prefiksowego zdefiniowana wyżej jest częściowym porządkiem w zbiorze wszystkich słów A^* .*

Dowód: Oczywiście każde słowo jest swoim własnym prefiksem, a zatem $\leq$ jest relacją zwrotną. Jeśli $u = ww'$ oraz $w = uu'$ to dostajemy

$$u = (uu')w'.$$

Ponieważ operacja składania słów jest łączna,⁸ tzn. $w(uv) = (wu)v$, to powyższa równość daje $u = u(u'w')$. A zatem $u'w' = \varepsilon$, czyli $u' = w' = \varepsilon$ i $u = w$. Tak więc $\leq$ jest antysymetryczna. Przechodność $\leq$ wynika bezpośrednio z łączności operacji składania. ■

Przykład 7.7 (*Porządek leksykograficzny.*) Przypuśćmy, że mamy zbiór A częściowo uporządkowany przez relację $\leq$. Relacja ta indukuje na A^* relację $\preceq$ zwaną *porządkiem leksykograficznym* nad $\langle A, \leq \rangle$ zdefiniowaną następująco. Jeśli $w, u \in A^*$, to $w \preceq u$ gdy w jest prefiksem u lub gdy istnieje $i < \min(|w|, |u|)$ takie, że $w(i) < u(i)$ oraz dla każdego $j < i$, zachodzi $w(j) = u(j)$.

Fakt 7.8 *Porządek leksykograficzny nad $\langle A, \leq \rangle$ jest częściowym porządkiem. Jest on liniowym porządkiem, o ile $\langle A, \leq \rangle$ jest liniowym porządkiem.*

Dowód: Zwrotność relacji $\preceq$ wynika bezpośrednio ze zwrotności porządku prefiksowego. Dla dowodu antysymetrii założmy, że $w \preceq u$ oraz $u \preceq w$. Jeśli u jest prefiksem w oraz w jest prefiksem u , to $w = u$. Jeśli natomiast istnieje $i < \min(|w|, |u|)$ takie, że $w(i) < u(i)$ oraz dla każdego $j < i$, zachodzi $w(j) = u(j)$, to u nie może być prefiksem w a zatem musi istnieć $k < \min(|w|, |u|)$ takie, że $u(k) < w(k)$ oraz dla każdego $j < k$, $w(j) = u(j)$. Zatem ani $i \leq k$ nie jest możliwe ani $k \leq i$ nie jest możliwe. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że

⁸Dowód łączności operacji składania słów pozostawimy czytelnikowi.

jedyny możliwy przypadek to gdy w jest prefiksem u oraz u jest prefiksem w . Zatem $\preceq$ jest antysymetryczna.

Udowodnimy przechodność $\preceq$. Niech $w \preceq u$ oraz $u \preceq v$. Mamy do rozważenia następujące możliwości:

$$w \text{ jest prefiksem } u; \quad (26)$$

$$\text{istnieje } i_1 < \min(|w|, |u|) \text{ takie, że } w(i_1) < u(i_1) \text{ oraz dla każdego } j < i_1, w(j) = u(j); \quad (27)$$

$$u \text{ jest prefiksem } v; \quad (28)$$

$$\text{istnieje } i_2 < \min(|w|, |u|) \text{ takie, że } w(i_2) < u(i_2) \text{ oraz dla każdego } j < i_2, w(j) = u(j). \quad (29)$$

Jeśli zachodzi (26) oraz (28) to oczywiście w jest prefiksem v i $w \preceq v$. Jeśli zachodzi (26) oraz (29), to jeśli $|w| \leq i_2$, to w jest prefiksem v . Jeśli natomiast $i_2 < |w|$, to ponieważ w jest prefiksem u , to $w(i_2) = u(i_2) \leq v(i_2)$ i na wszystkich wcześniejszych pozycjach w oraz v się pokrywają. Tak więc $w \preceq v$. Jeśli zachodzi (27) oraz (28), to $i_1 < |v|$ i rozumujemy podobnie jak w poprzednim przypadku. Załóżmy wreszcie, że zachodzi (27) oraz (29). Jeśli $i_1 \leq i_2$, to $w(i_1) \leq u(i_1) \leq v(i_1)$, $w(i_1) \neq u(i_1)$, a zatem $w(i_1) \neq v(i_1)$. Ponadto dla $j < i_1$, $w(j) = u(j) = v(j)$. Zatem $w \preceq v$. Jeśli natomiast $i_2 < i_1$ to podobnie pokazujemy, że i_2 jest pierwszą pozycją, na której się różnią w oraz v i $w(i_2) \leq v(i_2)$. Tak więc ponownie $w \preceq v$, co kończy dowód przechodności $\preceq$.

Jeśli porządek $\leq$ na A jest liniowy, to dla dowolnych słów w, u , z których żadne nie jest prefiksem drugiego, jeśli $i < \min(|w|, |u|)$ jest najmniejszą liczbą taką, że $w(i) \neq u(i)$, to $w \preceq u$, o ile $w(i) \leq u(i)$; oraz $u \preceq w$, w przeciwnym przypadku. Zatem $\preceq$ jest też liniowym porządkiem. ■

Jeśli, na przykład, $\preceq$ oznacza porządek leksykograficzny nad $\langle \{0, 1\}, \leq \rangle$, gdzie $0 \leq 1$, to następujący ciąg tworzy łańcuch wstępujący

$$\varepsilon \preceq 0 \preceq 00 \preceq \dots \preceq 0^k \preceq 0^{k+1} \preceq \dots$$

natomiast ciąg

$$\dots \preceq 0^{k+1}1 \preceq 0^k1 \preceq \dots \preceq 1$$

tworzy łańcuch zstępujący. Ponadto dla dowolnych $k, n \in N$,

$$0^k \preceq 0^n1.$$

Tak więc, każdy element pierwszego łańcucha jest mniejszy w tym porządku od każdego elementu drugiego łańcucha.

7.2 Drzewa

Niech A będzie dowolnym zbiorem. *Drzewem* nad A nazwiemy każdy niepusty podzbiór $t \subseteq A^*$ zamknięty na prefiksy, tzn. dla $w \in t$, jeśli $u \leq w$, to $u \in t$.

Z powyższej definicji wynika, że każde drzewo zawiera słowo puste ε . Elementy drzewa t nazywamy *wierzchołkami*. Słowo puste $\varepsilon \in t$ jest nazywane *korzeniem* drzewa t . Jeśli $w \in t$ oraz $wa \in t$ dla pewnego $a \in A$, to wa jest nazywane *a-tym następnikiem* (lub dzieckiem) wierzchołka w . Wierzchołek nie mający następników nazywamy *liściem*.

Jeśli A jest zbiorem nieskończonym, to w drzewie nad A mogą być wierzchołki o nieskończenie wielu następnikach. *Rzędem* wierzchołka w w drzewie t nazywamy moc zbioru następników tego wierzchołka, tzn. $|\{a \in A \mid wa \in t\}|$.

Zbiór wierzchołków $\pi \subseteq t$ w drzewie t nazwiemy *ścieżką*, gdy jest on liniowo uporządkowany relacją porządku prefiksowego $\leq$ oraz spełnia następujący warunek: dla dowolnych $w, u \in \pi$ oraz $v \in t$, jeśli $w \leq v \leq u$, to $v \in \pi$. *Długością* ścieżki π nazywamy moc zbioru π .

Przykładami drzew są:

- $\{\varepsilon\}$, drzewo o jednym wierzchołku.
- $\{a^n \mid n \in N\}$, gdzie $a \in A$ jest dowolną ustaloną literą.
- $\{w \in A^* \mid |w| \leq n\}$, pełne drzewo nad A wysokości n .
- A^* , pełne drzewo nad A .

Jako przykład ważnego twierdzenia używającego powyższych pojęć przytoczymy:

Twierdzenie 7.9 (Lemat Königa)

Niech $t \subseteq A^*$ będzie drzewem, w którym każdy wierzchołek jest skończonego rzędu. Jeśli t zawiera ścieżki skończone dowolnej długości, to t zawiera ścieżkę nieskończoną.

Dowód: Niech t będzie drzewem spełniającym założenia twierdzenia. Zdefiniujemy indukcyjnie funkcję różnowartościową $f : N \rightarrow t$, spełniającą następujący warunek: dla każdego $n \in N$, wierzchołek $f(n')$ jest następnikiem $f(n)$ w drzewie t oraz t zawiera ścieżki skończone dowolnej długości zaczynające się od $f(n)$. Niech $f(0) = \varepsilon$. Korzeń spełnia oczywiście powyższy warunek na mocy założeń twierdzenia. Przypuśćmy, że $f(n)$ jest określone i weźmy wszystkie następniki wierzchołka $f(n)$. Gdyby ścieżki zaczynające się od każdego z nich były ograniczonej długości, to wobec tego, że $f(n)$ ma tylko skończoną liczbę następników, istniałoby ograniczenie górne na długość ścieżek zaczynających się od $f(n)$, wbrew założeniu indukcyjnemu. Zatem istnieje następnik wierzchołka $f(n)$, od którego zaczynają się ścieżki dowolnej skończonej długości. Jako $f(n')$ wybieramy jeden z tych następników.

Oczywiście, jak wynika to natychmiast z definicji f , zbiór $\vec{f}(N)$ jest nieskończoną ścieżką w t . ■

Niech t będzie drzewem nad A i niech $w \in t$. Niech

$$t|_w = \{u \in A^* \mid wu \in t\}.$$

Fakt 7.10 Dla każdego drzewa $t \subseteq A^*$ oraz wierzchołka $w \in t$, zbiór $t|_w$ jest drzewem nad A .

Dowód: Oczywiście $\varepsilon \in t|_w$. Ponadto jeśli v jest prefiksem słowa u , to wv jest prefiksem słowa wu . Zatem $t|_w$ jest zamknięty na prefiksy. ■

Mówimy, że drzewo r jest *poddrzewem* drzewa t , oznaczamy to przez $r \sqsubseteq t$, jeśli istnieje wierzchołek $w \in t$ taki, że $r = t|_w$. W tym przypadku mówimy o poddrzewie zaczepionym w wierzchołku w .

Przykład 7.11 (Drzewa k -argumentowe) Niech $k > 0$. Drzewo $t \subseteq \{0, \dots, k-1\}^*$ nazwiemy drzewem k -argumentowym, gdy każdy wierzchołek w t , który nie jest liściem ma rząd k .

Zbiór wszystkich drzew k -argumentowych oznaczamy przez T_k . Zbiór ten, jako rodzina zbiorów, jest naturalnie częściowo uporządkowany przez relację zawierania. Jeśli $t \subseteq r$, gdzie $t, r \in T_k$, to mówimy, że drzewo r *rozszerza* drzewo t . Przez FT_k oznaczamy zbiór wszystkich drzew skończonych k -argumentowych.

Przykładami drzew k -argumentowych są:

- $\{\varepsilon\}$.
- $p_n = \{w \in \{0, \dots, k-1\}^* \mid |w| \leq n\}$ jest *pełnym drzewem* k -argumentowym wysokości n .
- $\{0, \dots, k-1\}^*$ jest pełnym drzewem k -argumentowym nieskończonym.
- $t_1 = \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^n 1 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^{2n+1} 10 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^{2n+1} 11 \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest drzewem 2-argumentowym (binarnym).
- $t_2 = \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^n 1 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^{2n} 10 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^{2n} 11 \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest też drzewem binarnym.

Pożyteczne może być narysowanie drzew t_1 i t_2 .

Przykład 7.12 (Drzewa $k^{\leq}$ -argumentowe) Drzewo $t \subseteq \{0, \dots, k-1\}^*$ nazwiemy *drzewem $k^{\leq}$ -argumentowym* gdy spełnia ono następujący warunek:

dla każdego $w \in t$ oraz $i < k$, jeśli $wi \in t$, to $wj \in t$, dla każdego $j \leq i$.

Zbiór wszystkich drzew $k^{\leq}$ -argumentowych oznaczamy przez $T_{k^{\leq}}$. Symbolem $FT_{k^{\leq}}$ oznaczamy zbiór wszystkich skończonych drzew $k^{\leq}$ -argumentowych. Oczywiście $T_k \subseteq T_{k^{\leq}}$ oraz $T_{k^{\leq}}$ jest naturalnie uporządkowany przez $\subseteq$.

Każde drzewo k -argumentowe jest drzewem $k^{\leq}$ -argumentowym. Różnica polega na tym, że drzewa $k^{\leq}$ -argumentowe mogą mieć wierzchołki rzędów pośrednich pomiędzy 0 i k . Z kolei nie każde drzewo nad $\{0, \dots, k-1\}^*$ musi być drzewem $k^{\leq}$ -argumentowym. Przykładowo, $\{\varepsilon, 1\}$ nie jest drzewem $2^{\leq}$ -argumentowym, ale $\{\varepsilon, 0\}$ jest. Oczywiście poddrzewo drzewa $k^{\leq}$ -argumentowego jest drzewem $k^{\leq}$ -argumentowym.

Fakt 7.13 *Relacja $\sqsubseteq$ ograniczona do zbioru $FT_{k^{\leq}}$ drzew skończonych jest relacją częściowego porządku.*

Dowód: Ponieważ $t = t|_{\varepsilon}$, to $\sqsubseteq$ jest zwrotna. Jeśli $r = t|_w$ oraz $t = s|_v$, to $r = (s|_v)|_w$. Ponieważ

$$(s|_v)|_w = s|_{vw}$$

to $r \sqsubseteq s$, co dowodzi przechodniości.

Dla pokazania antysymetrii przyjmijmy, że

$$r = t|_w \quad \text{oraz} \quad t = r|_v.$$

Zatem

$$r = r|_{wv}. \quad (30)$$

Ponieważ r jest skończonym drzewem, to niech $u' \in r$ będzie wierzchołkiem takim, że $|u'|$ jest największą liczbą w zbiorze $\{|u| \mid u \in r\}$. Zatem z (30) wynika, że $wvu' \in r$, więc $wv = \varepsilon$. Tak więc $w = v = \varepsilon$ i dostajemy $r = t$, co dowodzi antysymetrii $\sqsubseteq$. ■

Uwaga: Relacja $\sqsubseteq$ nie jest antysymetryczna w zbiorze $T_{k^{\leq}}$, zauważmy, że dla drzew t_1 i t_2 z Przykładu 7.11 mamy $t_1 \sqsubseteq t_2$ oraz $t_2 \sqsubseteq t_1$, ale $t_1 \neq t_2$.

7.3 Drzewa etykietowane

Ważną klasą drzew pojawiającą się często w zastosowaniach są drzewa etykietowane. Niech $\Sigma = \{\Sigma_n\}_{n \in N}$ będzie indeksowaną rodziną zbiorów. Elementy Σ_n nazywamy *etykietami rzędu n* . Załóżmy, że Σ_0 zawiera wyróżniony symbol $\perp \in \Sigma_0$.

Niech $t \in T_{k^{\leq}}$. Drzewem etykietowanym nad Σ o nośniku t nazwiemy dowolną funkcję $\sigma : t \rightarrow \bigcup_{n \in N} \Sigma_n$ taką, że dla każdego $n \in N$ oraz $w \in t$, jeśli w jest rzędu n , to $\sigma(w) \in \Sigma_n$. Nośnik drzewa etykietowanego σ będziemy oznaczać przez $\|\sigma\|$. Niech $T_{k^{\leq}}(\Sigma)$ oznacza zbiór wszystkich drzew etykietowanych nad Σ o nośnikach z $T_{k^{\leq}}$. Analogicznie możemy zdefiniować $T_k(\Sigma)$.

W zbiorze $T_{k^{\leq}}(\Sigma)$ zdefiniujemy relację $\leq$ następująco. Dla $\sigma, \tau \in T_{k^{\leq}}(\Sigma)$, $\sigma \leq \tau$ wtw, gdy

- $||\sigma|| \subseteq ||\tau||$, oraz
- dla każdego $w \in ||\sigma||$, jeśli $\sigma(w) \neq \perp$, to $\sigma(w) = \tau(w)$.

Fakt 7.14 *Relacja $\leq$ zdefiniowana powyżej jest częściowym porządkiem w zbiorze $T_{k\leq}(\Sigma)$.*

Dowód: Relacja ta jest oczywiście zwrotna i przechodnia. Załóżmy, że $\sigma \leq \tau$ oraz $\tau \leq \sigma$. Wówczas mamy $||\sigma|| = ||\tau||$ oraz dla $w \in ||\sigma||$, jeśli $\sigma(w) \neq \perp$ lub $\tau(w) \neq \perp$, to $\sigma(w) = \tau(w)$. Zatem $\sigma(w) = \tau(w)$ zachodzi przy każdym $w \in ||\sigma||$, czyli $\sigma = \tau$. ■

Poniżej zilustrujemy na dwóch przykładach użyteczność pojęcia drzewa etykietowanego.

Przykład 7.15 (*Wyrażenia arytmetyczne*) Niech rodzina zbiorów etykiet Σ będzie zdefiniowana następująco. $\Sigma_0 = \{\perp, 1\}$, $\Sigma_1 = \emptyset$, $\Sigma_2 = \{+, \times, /\}$, $\Sigma_n = \emptyset$ dla $n > 2$. Drzewa etykietowane nad Σ nazwiemy w tym przypadku wyrażeniami arytmetycznymi.

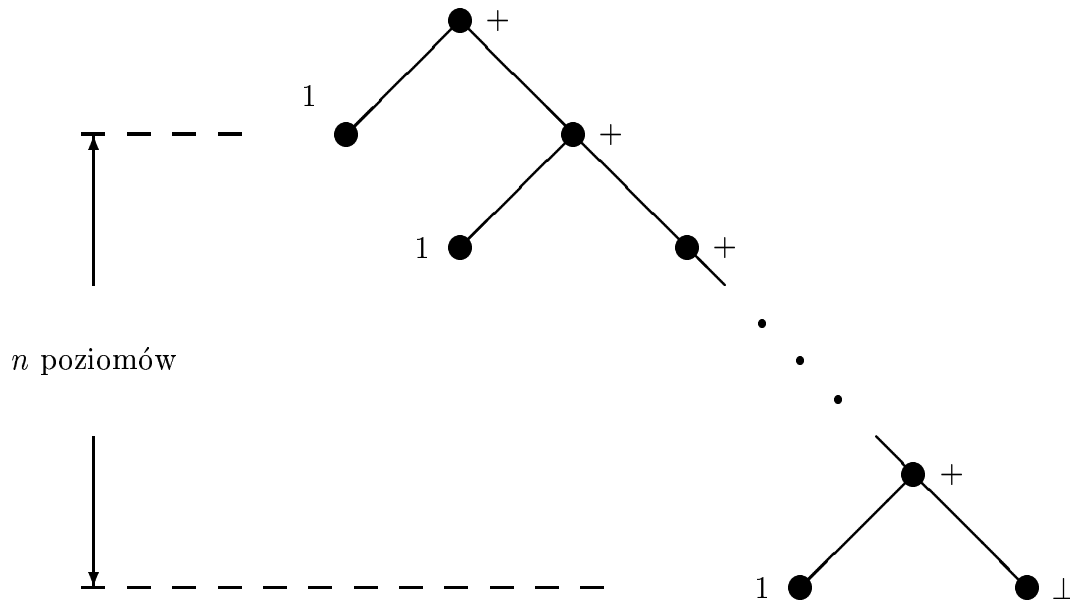
Na przykład, liczbę naturalną n możemy przedstawić formalnie jako następujące wyrażenie arytmetyczne $\tilde{n}$ o nośniku

$$||\tilde{n}|| = \{1^i \mid i \leq n\} \cup \{1^i 0 \mid i < n\},$$

oraz o następującym rozkładzie etykiet

$$\tilde{n}(w) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } w = 1^i 0, \ i < n, \\ \perp & \text{jeśli } w = 1^n, \\ + & \text{jeśli } w = 1^i, \ i < n. \end{cases}$$

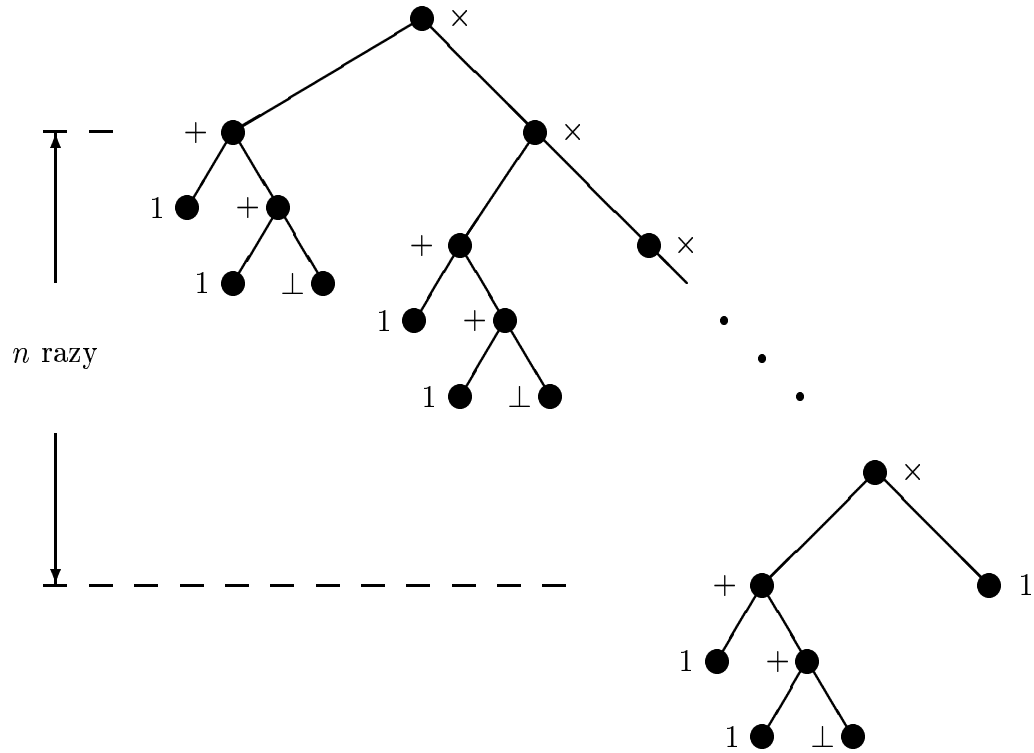
Drzewo to jest przedstawione na rysunku 1.

Rysunek 1: Drzewo etykietowane $\tilde{n}$.

Powyższe wyrażenie ma wartość n jeśli 1 traktować jak liczbę 'jeden', $\perp$ traktować jak liczbę 'zero' oraz $+$ traktować jak operację dodawania liczb naturalnych. Chcielibyśmy podkreślić, że bez powyższej interpretacji 1 , $\perp$ oraz $+$ są jedynie formalnymi symbolami używanymi do etykietowania wierzchołków w drzewach. Specjalny symbol $\perp$ w przypadku drzew etykietowanych pełni szczególną rolę – oznacza on te liście w drzewie, z których możemy rozbudowywać drzewo do drzewa większego w sensie porządku $\leq$. Tak więc powyższa reprezentacja liczb naturalnych jako drzew etykietowanych ma dodatkowo tę cechę, że $\tilde{n} \leq \tilde{m}$ w sensie porządku na drzewach etykietowanych, wtw, gdy $m \leq n$ w sensie porządku na liczbach naturalnych.

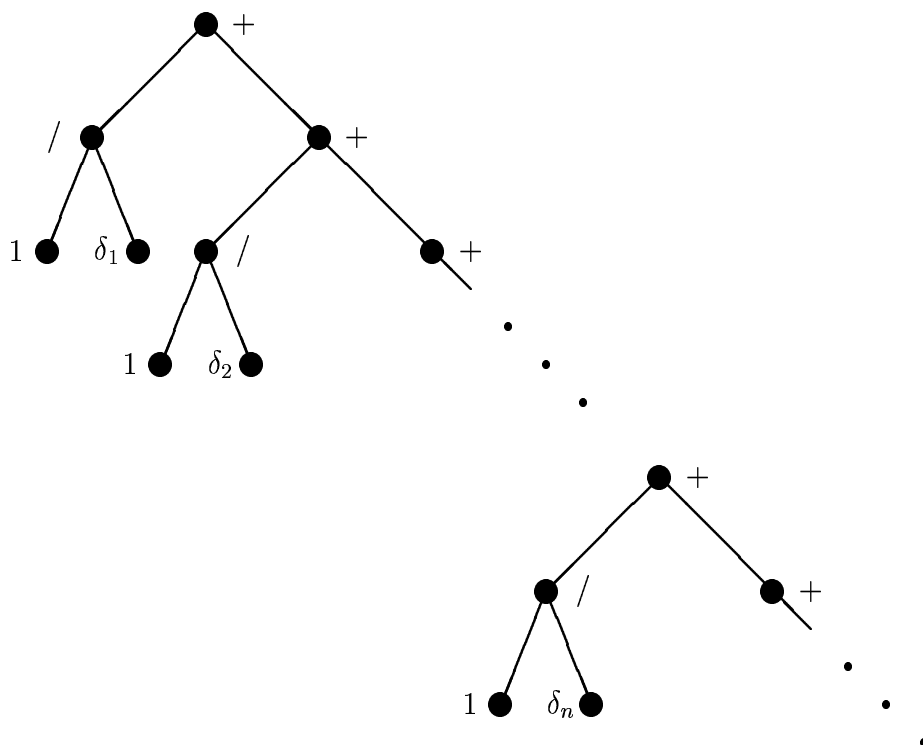
Używając symboli $\times$ i $/$ jak operacji mnożenia i dzielenia możemy liczby naturalne przedstawiać na różne sposoby. Przykładowo, liczbę 2^n możemy przedstawić używając podobnego wyrażenia jak $\tilde{n}$, z tym że $+$ w $\tilde{n}$ zastępujemy przez $\times$, 1 zastępujemy przez drzewo $\tilde{2}$ oraz $\perp$ zastępujemy przez 1 . Zauważmy, że taka reprezentacja liczby 2^n używa liniowej w sto-

sunku do n liczby wierzchołków w odróżnieniu od wykładniczej w drzewie 2^n . Na rysunku 2 przedstawiamy drzewo etykietowane δ_n , które reprezentuje liczbę 2^n przy pomocy wyżej wspomnianego wyrażenia.



Rysunek 2: Drzewo etykietowane δ_n .

Szereg nieskończony $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i$ możemy przedstawić jako nieskończone drzewo etykietowane σ . Drzewo to jest graficznie przedstawione na rysunku 3.

Rysunek 3: Drzewo etykietowane σ .

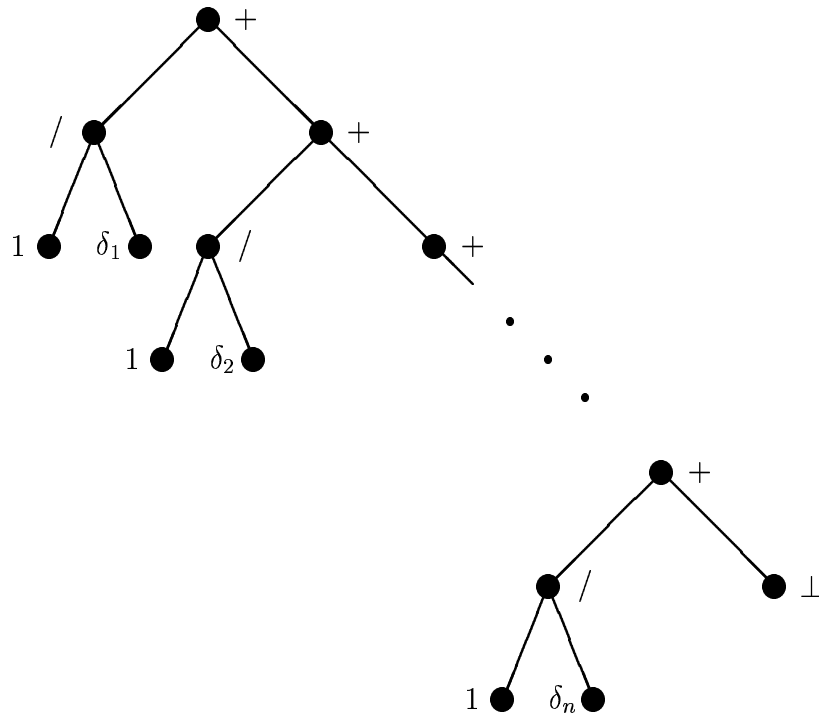
W drzewie etykietowanym z rysunku 3 i rysunku 4 symbole $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ nie są etykietami. Oznaczają one miejsca, na które należy wstawić drzewa etykietowane zdefiniowane na rysunku 2.

Sumę częściową $\sum_{i=1}^n 1/2^i$ tego szeregu wówczas reprezentujemy przy pomocy następującego skończonego drzewa etykietowanego σ_n (zob. Rysunek 4).

Mamy wówczas następujący wstępujący łańcuch wyrażeń

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \sigma_n \leq \dots \leq \sigma.$$

Powyższe aproksymowanie wyrażenia σ skończonymi wyrażeniami σ_n ma charakter czysto symboliczny, tzn. nie mają nic wspólnego ze zbieżnością szeregów liczb rzeczywistych.



Rysunek 4: Drzewo etykietowane σ_n , n -ta aproksymacja drzewa σ .

Przykład 7.16 (*Drzewa formalnych obliczeń*) Weźmy następujące zbiory etykiet: $\Sigma_0 = \{\text{'STOP'}$, $\perp\}$, $\Sigma_1 = \{\text{'x} := 2\text{x}'$, $\text{'y} := \text{y} - 1'$, $\text{'x} := 1'\}$, $\Sigma_2 = \{\text{'y} \neq 0'\}$, $\Sigma_n = \emptyset$, dla $n > 2$. Etykiety, chociaż kojarzą się z instrukcjami języka programowania, są tutaj jedynie formalnymi napisami – dla zaznaczenia tego napisy te umieściliśmy w cudzysłowie.

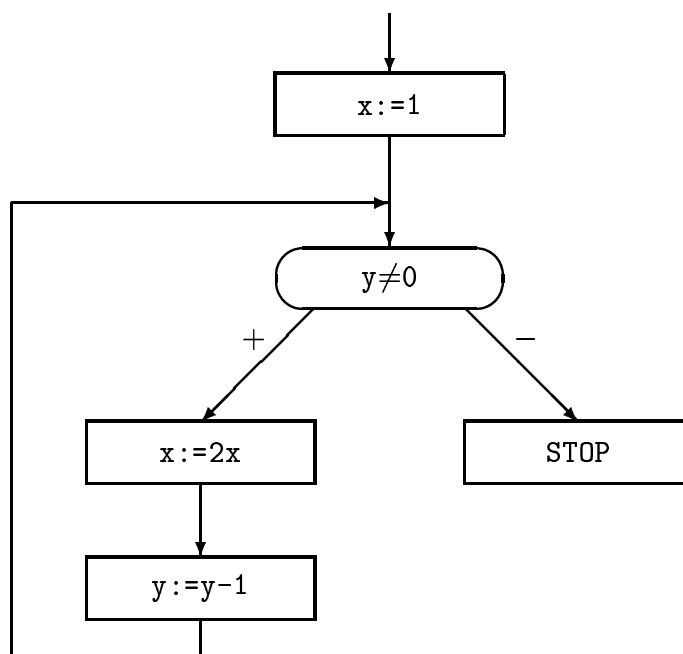
Rozważmy następujący program P w Pascalu.

```

x := 1;
while y ≠ 0 do
  begin x := 2x; y := y - 1 end

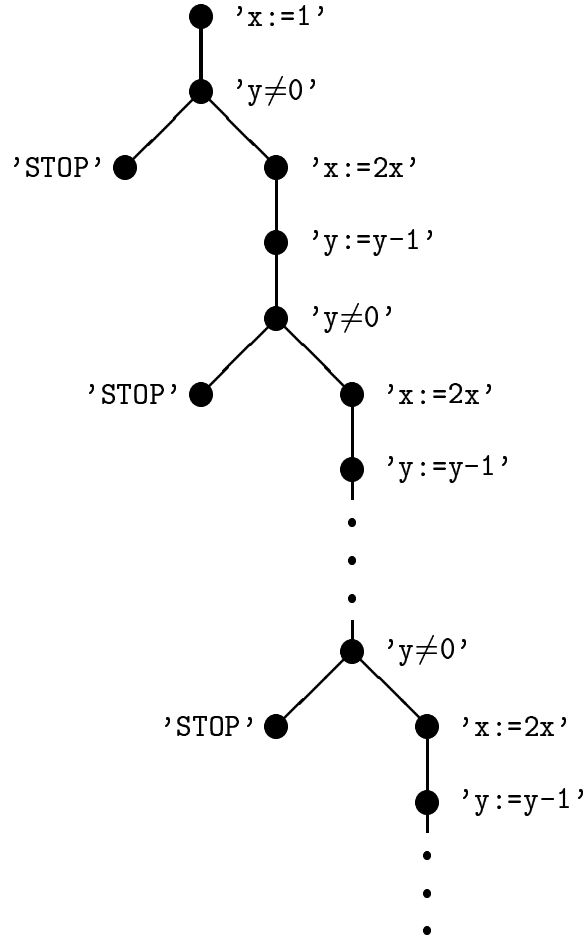
```

Program ten możemy przedstawić w postaci schematu blokowego (zob. Rysunek 5) dla pokazania możliwości przepływu sterowania w programie w czasie obliczenia.



Rysunek 5: Schemat blokowy programu P .

Powyższy schemat rozwijamy do nieskończonego drzewa. W drzewie tym w naturalny sposób etykietujemy wierzchołki symbolami z powyższego zbioru etykiet. Tak otrzymane drzewo etykietowane $\pi \in T_{2\leq}(\Sigma)$ nazywa się *drzewem formalnych obliczeń* programu P , a ścieżki w tym drzewie nazywa się *ścieżkami formalnych obliczeń* programu P . Przedstawiamy go na rysunku 6.



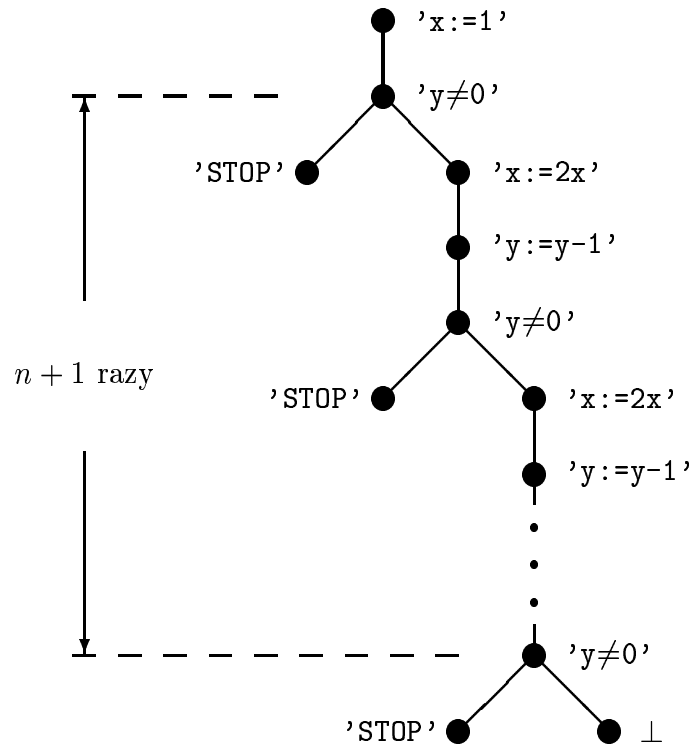
Rysunek 6: Drzewo etykietowane π formalnych obliczeń programu P .

Dla $n \in \mathbb{N}$ niech drzewo π_n , przedstawione na rysunku 7, oznacza skończoną aproksymację drzewa π . Drzewo to reprezentuje formalne obliczenia programu P powstające w wyniku co najwyżej n przejść w P przez pętlę **while**. Osiągnięcie przez obliczenie symbolu $\perp$ w π_n intuicyjnie oznacza zapętlenie się obliczenia. Zgodnie z definicją porządku na drzewach etykietowanych mamy następujący łańcuch.

$$\pi_0 \leq \pi_1 \leq \dots \pi_n \leq \dots \leq \pi.$$

Dla programu P definiuje się funkcję obliczaną przez ten program. Funkcję tę nazywa się *znaczeniem* lub *semantyką* programu P . W przypadku drzew formalnych obliczeń nierówność

$\pi' \leq \pi$ implikuje, że funkcja częściowa obliczana przez program odpowiadający drzewu π' jest zawarta w funkcji częściowej obliczanej przez program odpowiadający π .



Rysunek 7: Drzewo etykietowane π_n .

Przykład 7.17 Na zakończenie części związanej z drzewami etykietowanymi wprowadzimy jeszcze jedną relację częściowego porządku, która będzie wykorzystana później.

Niech

$$FT(\Sigma) = \bigcup_{k \in N} FT_{k \leq}(\Sigma)$$

będzie zbiorem wszystkich skończonych $k^{\leq}$ -argumentowych drzew etykietowanych nad Σ przy k przebiegającym wszystkie liczby naturalne. Elementy $FT(\Sigma)$ bywają nazywane *termami* nad Σ . Pojęcie poddrzewa, które zdefiniowaliśmy dla drzew nieetykietowanych, przenosi się na ważne pojęcie podtermu zdefiniowane następująco. Niech $\sigma, \tau \in FT(\Sigma)$. Term σ jest *podtermem* termu τ (oznaczamy to przez $\sigma \sqsubseteq \tau$), jeśli istnieje wierzchołek $w \in \|\tau\|$ taki, że

- $\|\sigma\| = (\|\tau\|)_w$, oraz
- dla $u \in \|\sigma\|$, $\sigma(u) = \tau(wu)$.

Definicja zbioru $FT(\Sigma)$ oraz relacja podtermu oczywiście stosują się do przypadku, gdy Σ_0 nie zawiera $\perp$. Tym niemniej musimy założyć, że $\Sigma_0 \neq \emptyset$, gdyż w przeciwnym przypadku mielibyśmy $FT(\Sigma) = \emptyset$.

Fakt 7.18 *Relacja $\sqsubseteq$ zdefiniowana powyżej jest częściowym porządkiem w $FT(\Sigma)$.*

Dowód: Wynika natychmiast z Faktu 7.13. Łatwy dowód pozostawiamy czytelnikowi. ■

7.4 Kresy zbiorów, kraty zupełne

Niech $\langle P, \leq_P \rangle$ oraz $\langle Q, \leq_Q \rangle$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi. Funkcję $f : P \rightarrow Q$ nazwiemy *monotoniczną* gdy dla $x, y \in P$

$$\text{jeśli } x \leq_P y, \text{ to } f(x) \leq_Q f(y).$$

Funkcja f jest *izomorfizmem* gdy f oraz f^{-1} są monotonicznymi bijekcjami. Izomorficzne zbiory częściowo uporządkowane oznaczamy $\langle P, \leq_P \rangle \simeq \langle Q, \leq_Q \rangle$.

Jako przykład izomorficznych częściowych porządków zanotujmy następujący fakt.

Fakt 7.19 *Mamy następujące izomorfizmy*

$$\langle N, \leq \rangle \simeq \langle \{0\}^*, \leq \rangle \simeq \langle FT_1, \subseteq \rangle$$

Dowód: Funkcja $f_1 : N \rightarrow \{0\}^*$, zdefiniowana wzorem $f_1(n) = 0^n$, dla $n \in N$ ustala izomorfizm $\langle N, \leq \rangle \simeq \langle \{0\}^*, \leq \rangle$. Natomiast funkcja $f_2 : \{0\}^* \rightarrow FT_1$ zdefiniowana wzorem $f_2(0^n) = \{0^i \mid i \leq n\}$ ustala izomorfizm $\langle \{0\}^*, \leq \rangle \simeq \langle FT_1, \subseteq \rangle$. ■

Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie częściowym porządkiem. Element $p \in P$ nazwiemy *największym* w $\langle P, \leq \rangle$ jeśli dla każdego $x \in P$ zachodzi $x \leq p$. Element $p \in P$ nazwiemy *maksymalnym* gdy dla każdego $x \in P$, jeśli $p \leq x$, to $p = x$, tzn. gdy żaden element nie jest ściśle większy od p .

Zauważmy, że jeśli $\langle P, \leq \rangle$ jest częściowym porządkiem, to $\langle P, \leq^{-1} \rangle$ jest też częściowym porządkiem. Porządek ten nazywamy *porządkiem dualnym* do $\langle P, \leq \rangle$. Jeśli mamy pewne pojęcie zdefiniowane dla częściowych porządków, to pojęcie do niego dualne otrzymuje się przez zamianę w tej definicji symbolu $\leq$ symbolem $\leq^{-1}$. Przykładowo, pojęciem dualnym do własności “być elementem maksymalnym” jest pojęcie “być elementem minimalnym” otrzymane przez dualizację powyższej definicji. Otrzymujemy następującą definicję: $p \in P$ jest elementem *minimalnym*, gdy dla każdego $x \in P$, jeśli $x \leq p$, to $p = x$. Tak więc p jest minimalny wtw, gdy p jest maksymalny w porządku dualnym. Dualnym pojęciem do definicji elementu największego jest pojęcie elementu *najmniejszego*.

Przykład 7.20 Elementem największym w $\langle P(A), \subseteq \rangle$ jest A , a najmniejszym jest $\emptyset$. Elementem najmniejszym w $\langle A^*, \leq \rangle$ jest ε , a elementu największego nie ma. Elementem najmniejszym w $\langle T_2, \subseteq \rangle$ jest $\emptyset$, a największym $\{0, 1\}^*$. Elementem najmniejszym w $\langle T_{k\leq}(\Sigma), \leq \rangle$ jest drzewo jednowierzchołkowe z etykietą $\perp$ (które też będzie oznaczane przez $\perp$), a elementu największego nie ma.

Fakt 7.21 *Element największy jest maksymalny. Każdy porządek częściowy ma co najwyżej jeden element największy.*

Dowód: Niech $p \in P$ będzie elementem największym w $\langle P, \leq \rangle$. Jeśli $p \leq x$, to ponieważ $x \leq p$, to z antysymetrii porządku otrzymujemy $p = x$.

Jeśli p_1 oraz p_2 są elementami największymi w $\langle P, \leq \rangle$, to mamy $p_1 \leq p_2$ oraz $p_2 \leq p_1$. Zatem $p_1 = p_2$. ■

Zachodzi też twierdzenie dualne do powyższego twierdzenia.

Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie częściowym porządkiem i niech $X \subseteq P$ będzie dowolnym podzbiorem. Element $a \in P$ nazwiemy *ograniczeniem górnym* zbioru X , gdy dla każdego $x \in X$ zachodzi $x \leq a$. Najmniejsze ograniczenie górne zbioru X (o ile istnieje) nazywamy *kresem górnym* zbioru X . Zatem $a \in P$ jest kresem górnym zbioru X , gdy

- a jest ograniczeniem górnym X , oraz
- dla każdego $b \in P$, jeśli b jest ograniczeniem górnym X , to $a \leq b$.

Kres górny zbioru X , o ile istnieje, oznaczamy $\bigsqcup X$. Dualnymi pojęciami są: *ograniczenie dolne* i *kres dolny*. Kres dolny zbioru X (o ile istnieje) oznaczamy $\bigsqcap X$.

Zastanówmy się kiedy zbiór pusty $\emptyset$ ma kres górny (dolny) w porządku $\langle P, \leq \rangle$. Zauważmy, że każdy element zbioru P jest zarówno ograniczeniem górnym jak i dolnym $\emptyset$. Zatem, $\bigsqcup \emptyset$ (odpowiednio, $\bigsqcap \emptyset$) istnieje w $\langle P, \leq \rangle$ wtw, gdy P ma element najmniejszy (odpowiednio największy). Element najmniejszy w $\langle P, \leq \rangle$ oznaczamy $\perp$ a element największy oznaczamy $\top$. Kres zbioru może zależeć od tego w jakim zbiorze częściowo uporządkowanym

jest brany. Jeśli zachodzi konieczność zaznaczenia w jakim porządku brany jest kres (element najmniejszy, itp.) to możemy zaznaczać to używając indeksu, na przykład $\bigsqcup^P X$.

Porządek $\langle P, \leq \rangle$ nazwiemy *kratą zupełną*, gdy każdy podzbiór zbioru P ma kres górny i kres dolny.

Twierdzenie 7.22 *Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie częściowym porządkiem. Następujące warunki są równoważne.*

- (i) $\langle P, \leq \rangle$ jest kratą zupełną.
- (ii) Każdy podzbiór P ma kres górny w $\langle P, \leq \rangle$.
- (iii) Każdy podzbiór P ma kres dolny w $\langle P, \leq \rangle$.

Dowód: Implikacje (i) $\Rightarrow$ (ii) oraz (i) $\Rightarrow$ (iii) oczywiście zachodzą. Udowodnimy implikację (ii) $\Rightarrow$ (i). Załóżmy, że każdy podzbiór zbioru P ma kres górny. Niech $X \subseteq P$ i niech Y będzie zbiorem wszystkich ograniczeń dolnych zbioru X w $\langle P, \leq \rangle$. Niech

$$p_0 = \bigsqcup Y.$$

Niech $x \in X$. Ponieważ dla każdego $y \in Y$, mamy $y \leq x$ to x jest ograniczeniem górnym zbioru Y . Zatem $p_0 \leq x$, co wobec dowolności wyboru x dowodzi, że p_0 jest ograniczeniem dolnym zbioru X . Jeśli y jest ograniczeniem dolnym zbioru X , to $y \in Y$, a zatem $y \leq p_0$. Czyli p_0 jest największym ograniczeniem zbioru X , więc

$$p_0 = \bigcap X.$$

Dowód implikacji (iii) $\Rightarrow$ (i) jest analogiczny do powyższego. Pozostawimy go czytelnikowi. ■

Rozważmy kilka przykładów.

Przykład 7.23

- (i) $\langle P(A), \subseteq \rangle$ jest kratą zupełną dla każdego zbioru A . Kresem górnym rodziny zbiorów $\mathcal{A} \subseteq P(A)$ jest suma $\bigcup \mathcal{A}$, a kresem dolnym jest przecięcie $\bigcap \mathcal{A}$, o ile $\mathcal{A} \neq \emptyset$, oraz A jeśli $\mathcal{A} = \emptyset$. Sprawdzenie powyższych własności pozostawiamy czytelnikowi.
- (ii) $\langle N, \leq \rangle$ nie jest kratą zupełną bo N nie ma kresu górnego (bo nie ma ograniczenia górnego). Każdy niepusty podzbiór N ma kres dolny (bo ma element najmniejszy).
- (iii) W porządku prefikсовym $\langle \{0, 1\}^*, \leq \rangle$ zbiór $\{0, 1\}$ nie ma kresu górnego ale ma kres dolny: $\bigcap \{0, 1\} = \varepsilon$. Wynika to stąd, że $\{\varepsilon\}$ jest jedynym prefiksem słów 0 oraz 1.

- (iv) W porządku leksykograficznym $\langle \{0, 1\}^*, \preceq \rangle$ (przy uporządkowaniu liter: $0 \leq 1$) mamy

$$\bigsqcup \{0w \in \{0, 1\}^* \mid w \in \{0, 1\}^*\} = 1$$

Istotnie, dla każdego $w \in \{0, 1\}^*$, mamy $0w \preceq 1$. Ponadto jeśli dla każdego $w \in \{0, 1\}^*$ słowo $0w$ jest leksykograficznie wcześniejsze od pewnego ustalonego słowa u to u musi się zaczynać od litery 1 (gdyby $u = 0u'$ dla pewnego słowa u' , to mielibyśmy $w \preceq u'$ dla dowolnych $w \in \{0, 1\}^*$, a zatem u' byłoby największym elementem w $\langle \{0, 1\}^*, \preceq \rangle$, co daje sprzeczność). Zatem 1, jako prefiks słowa u , jest leksykograficznie wcześniejszy od u .

Natomiast zbiór $X = \{0^n \in \{0, 1\}^* \mid n \in N\}$ nie ma kresu górnego w tym porządku pomimo tego, że ma wiele ograniczeń górnych. Jeśli w jest ograniczeniem górnym zbioru X , to w musi zawierać 1. Zatem istnieje słowo w' oraz $n \in N$ takie, że $w = 0^n 1 w'$. Wówczas $0^{n+1} 1 w'$ jest ograniczeniem górnym X mniejszym leksykograficznie od w . Pokazaliśmy więc, że X nie ma najmniejszego ograniczenia górnego.

- (v) Kresem dolnym zbioru $\{1/3^n \mid n \in N\}$ w zbiorze liczb rzeczywistych R , uporządkowanym zwykłą relacją $\leq$, jest 0. Każdy niepusty zbiór ograniczony w R z góry (z dołu) ma kres górny (dolny) w R . Natomiast $\emptyset$ nie ma ani kresu górnego ani dolnego w R .

- (vi) $\bigsqcup \{\sigma_n \mid n \geq 1\} = \sigma$, w porządku z Przykładu 7.15 dla wyrażeń arytmetycznych. Wyrażenie σ_n formalnie reprezentuje skończony szereg $\sum_{i=1}^n 1/2^i$ (zob. Rysunek 4 w Przykładzie 7.15). Natomiast wyrażenie σ formalnie reprezentuje nieskończony szereg $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i$ (zob. Rysunek 3 w Przykładzie 7.15). Pozostawimy czytelnikowi pokazanie, że σ jest kresem górnym wyrażeń σ_n .

- (vii) $\bigsqcup \{\pi_n \in T_{2\leq}(\Sigma) \mid n \in N\} = \pi$, w porządku z Przykładu 7.16 dla drzew formalnych obliczeń. Drzewo π oraz drzewa π_n są przedstawione na Rysunkach 6 oraz 7 Przykładu 7.16. Pozostawimy czytelnikowi jako ćwiczenie pokazanie, że π jest kresem górnym drzew π_n .

- (viii) Niech $\langle EQ(A), \subseteq \rangle$ będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w A , uporządkowanym relacją zawierania. Ponieważ, jak łatwo jest pokazać, przecięcie dowolnej niepustej rodziny relacji równoważności jest relacją równoważności oraz $EQ(A)$ ma element największy: $A \times A$, to każdy podzbiór w $EQ(A)$ ma kres dolny, a zatem, zgodnie z Twierdzeniem 7.22, $\langle EQ(A), \subseteq \rangle$ jest kratą zupełną. W kracie tej kres górny rodziny relacji równoważności nie zawsze pokrywa się z sumą teoriomnogościową tej rodziny.⁹

⁹Suma relacji równoważności nie musi być relacją równoważności.

7.5 Twierdzenia o punkcie stałym

Twierdzenie 7.24 (Knaster-Tarski)

Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie kratą zupełną i niech $f : P \rightarrow P$ będzie funkcją monotoniczną. Wtedy f ma najmniejszy punkt stały, tzn. istnieje $a_0 \in P$, taki że

- $f(a_0) = a_0$,
- dla każdego $b \in P$, jeśli $f(b) = b$, to $a_0 \leq b$.

Dowód: Niech $X = \{x \in P \mid f(x) \leq x\}$ i niech

$$a_0 = \bigcap X.$$

Jeśli $x \in X$ to $a_0 \leq x$ i z monotoniczności f oraz z definicji zbioru X otrzymujemy

$$f(a_0) \leq f(x) \leq x.$$

Zatem $f(a_0)$ jest ograniczeniem dolnym zbioru X . Ponieważ a_0 jest największym ograniczeniem dolnym X to

$$f(a_0) \leq a_0. \quad (31)$$

Powyższa nierówność oraz monotoniczność f dają

$$f(f(a_0)) \leq f(a_0),$$

zatem $f(a_0) \in X$. Tak więc, ponieważ a_0 jest dolnym ograniczeniem X to $a_0 \leq f(a_0)$. Ta nierówność w połączeniu z (31) daje

$$a_0 = f(a_0).$$

Aby pokazać, że a_0 jest najmniejszym punktem stałym f założmy, że $f(b) = b$. Zatem $b \in X$ oraz $a_0 \leq b$. To kończy dowód twierdzenia. ■

Przykład 7.25 Podamy trzy przykłady ilustrujące zastosowanie twierdzenia Tarskiego.

- (i) Załóżmy, że A jest alfabetem zawierającym 0 i 1. Niech $f : P(A^*) \rightarrow P(A^*)$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco:

$$f(X) = \{\varepsilon\} \cup \{0w \mid w \in X\} \cup \{1w \mid w \in X\}.$$

Wtedy f jest funkcją monotoniczną oraz zbiór $\{0, 1\}^*$ jest najmniejszym punktem stałym f .¹⁰

¹⁰W tym przypadku można dodatkowo pokazać, że ten zbiór jest jedynym punktem stałym f .

(ii) Niech A będzie dowolnym zbiorem i niech $R \subseteq A \times A$ będzie dowolną relacją w zbiorze A . Rozważmy następującą funkcję $\varphi : P(A \times A) \rightarrow P(A \times A)$,

$$\varphi(X) = R \cup I_A \cup (XX) \cup X^{-1}.$$

Pokażemy, że dla dowolnej relacji $X \subseteq A \times A$,

$$\varphi(X) \subseteq X \quad \text{wtw, gdy} \quad X \text{ jest relacją równoważności zawierającą } R. \quad (32)$$

Powyższa równoważność wynika natychmiast z następujących trzech równoważności, których dowód pozostawimy czytelnikowi.

$$I_A \subseteq X \quad \text{wtw, gdy} \quad X \text{ jest relacją zwrotną.}$$

$$XX \subseteq X \quad \text{wtw, gdy} \quad X \text{ jest relacją przechodnią.}$$

$$X^{-1} \subseteq X \quad \text{wtw, gdy} \quad X \text{ jest relacją symetryczną.}$$

Zatem najmniejszy punkt stały przekształcenia φ jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą daną relację R .

(iii) **Dowód Lematu Banacha**

Dla dowodu Lematu Banacha (zob. Twierdzenie 6.10) weźmy dowolne funkcje $f : A \rightarrow B$ oraz $g : B \rightarrow A$ i zdefiniujmy $\varphi : P(A) \rightarrow P(A)$ wzorem,

$$\varphi(X) = A - \vec{g}(B - \vec{f}(X)).$$

Ponieważ operacja dopełnienia jest antymonotoniczna, tzn. odwraca porządek zawierania oraz operacja obrazu jest monotoniczna, to funkcja φ jest monotoniczna. Niech A_1 będzie najmniejszym punktem stałym φ . Pozostałe zbiory są już wyznaczone jednoznacznie przez A_1 , a mianowicie $A_2 = A - A_1$, $B_1 = \vec{f}(A_1)$, oraz $B_2 = B - B_1$. Pozostaje do pokazania, że

$$A_2 = \vec{g}(B_2). \quad (33)$$

Ponieważ

$$\vec{g}(B_2) = \vec{g}(B - B_1) = \vec{g}(B - \vec{f}(A_1)),$$

to

$$A - \vec{g}(B_2) = A - \vec{g}(B - \vec{f}(A_1)) = \varphi(A_1) = A_1.$$

Zatem

$$\vec{g}(B_2) = A - A_1 = A_2,$$

co dowodzi (33). ■

Jak zobaczymy w dalszej części wykładu zdarzają się sytuacje gdy założenie, że dziedzina funkcji ma być kratą zupełną jest zbyt silne. W tym celu wprowadzimy następujące definicje. Podzbiór X zbioru uporządkowanego $\langle A, \leq \rangle$ nazwiemy *skierowanym*, gdy $X \neq \emptyset$ oraz każde dwa elementy w X mają ograniczenie górne w X , tzn. dla dowolnych $a, b \in X$, istnieje $c \in X$, taki że $a \leq c$ oraz $b \leq c$. Pojęcie zbioru skierowanego jest bardzo ważnym uogólnieniem pojęcia łańcucha. Zbiór uporządkowany $\langle A, \leq \rangle$ nazwiemy *zupełnym porządkiem*, gdy A ma element najmniejszy oraz każdy zbiór skierowany ma kres górny. Niech $\langle A, \leq \rangle$ oraz $\langle B, \leq \rangle$ będą zupełnymi porządkami. Funkcję $f : A \rightarrow B$ nazwiemy *ciągłą*, gdy zachowuje ona kresy górne zbiorów skierowanych, tzn. gdy dla dowolnego zbioru skierowanego X w $\langle A, \leq \rangle$, $\vec{f}(X)$ ma kres górny oraz

$$f(\bigsqcup X) = \bigsqcup \vec{f}(X).$$

Fakt 7.26

- (i) Każda funkcja ciągła jest monotoniczna.
- (ii) Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Dowód: Dla dowodu (i) niech $f : A \rightarrow B$ będzie funkcją ciągłą pomiędzy zupełnymi porządkami. Jeśli $a_1 \leq_A a_2$ to zbiór $\{a_1, a_2\}$ jest skierowany. Zatem

$$f(a_2) = f(\bigsqcup \{a_1, a_2\}) = \bigsqcup \{f(a_1), f(a_2)\}.$$

Oznacza to, że

$$f(a_1) \leq_B f(a_2).$$

A zatem f jest monotoniczna.

Dla dowodu (ii) zauważmy, że obraz zbioru skierowanego przy przekształceniu ciągłym jest zbiorem skierowanym. Wynika to z monotoniczności funkcji ciągłych. ■

Podamy teraz dwa ważne przykłady zupełnych porządków nie będących kratami zupełnymi. Sprawdzenie, że porządki te są zupełne pozostawimy czytelnikowi.

Przykład 7.27

- (i) Dla każdego k , porządek $\langle T_{k\leq}(\Sigma), \leq \rangle$ (zob. Przykład 7.15) jest zupełny.
- (ii) Dla dowolnych zbiorów A, B , zbiór $PF(A, B)$ wszystkich funkcji częściowych z A w B uporządkowanych relacją zawierania jest zupełnym porządkiem. Kresem górnym zbioru skierowanego funkcji częściowych jest suma teoriomnogościowa.

Twierdzenie 7.28 *Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zupełnym porządkiem oraz niech $f : A \rightarrow A$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy f ma najmniejszy punkt stały a_0 oraz*

$$a_0 = \bigsqcup \{f^n(\perp) \mid n \in N\}.$$

Dowód: Najpierw zauważmy, że $\{f^n(\perp) \mid n \in N\}$ jest łańcuchem, a zatem zbiorem skierowanym. Wynika to natychmiast z następującej własności. Dla każdego $n \in N$,

$$f^n(\perp) \leq f^{n+1}(\perp). \quad (34)$$

Dowód (34) przeprowadzamy przez indukcję względem n . Dla $n = 0$ wynika to natychmiast z tego, że $\perp$ jest najmniejszym elementem. Krok indukcyjny wynika z monotoniczności f .

Tak więc $a_0 = \bigsqcup \{f^n(\perp) \mid n \in N\}$ istnieje. Mamy:

$$\begin{aligned} f(a_0) &= f(\bigsqcup \{f^n(\perp) \mid n \in N\}) \\ &= \bigsqcup \{f^{n+1}(\perp) \mid n \in N\} \\ &= \bigsqcup (\{f^{n+1}(\perp) \mid n \in N\} \cup \{\perp\}) \\ &= \bigsqcup \{f^n(\perp) \mid n \in N\} \\ &= a_0. \end{aligned}$$

W powyższym ciągu równości druga równość wynika stąd, że f jest funkcją ciągłą, natomiast trzecia równość wynika stąd, że dodanie elementu najmniejszego $\perp$ do dowolnego zbioru nie zmienia kresu górnego.

Tak więc a_0 jest punktem stałym. Pozostaje do wykazania, że jest to najmniejszy punkt stały. Niech $f(b) = b$ będzie dowolnym punktem stałym. Przez oczywistą indukcję ze względu na n pokazujemy, że dla $n \in N$,

$$f^n(\perp) \leq b. \quad (35)$$

Dowód (35) pozostawimy czytelnikowi. Zatem b jest ograniczeniem górnym zbioru $\{f^n(\perp) \mid n \in N\}$, czyli $a_0 \leq b$. To kończy dowód twierdzenia. ■

Podamy dwa przykłady na zastosowanie powyższego twierdzenia.

Przykład 7.29

- (i) Niech Σ będzie rodziną etykiet z przykładu 7.16. Niech $\varphi : T_{2\leq}(\Sigma) \rightarrow T_{2\leq}(\Sigma)$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco. Dla $\sigma \in T_{2\leq}(\Sigma)$,

$$||\varphi(\sigma)|| = \{\varepsilon, 0, 1, 10\} \cup \{100w \mid w \in ||\sigma||\}.$$

Dla $w \in ||\varphi(\sigma)||$ definiujemy

$$\varphi(\sigma)(w) = \begin{cases} 'y \neq 0', & \text{gdy } w = \varepsilon, \\ 'STOP', & \text{gdy } w = 0, \\ 'x := 2x', & \text{gdy } w = 1, \\ 'y := y - 1', & \text{gdy } w = 10, \\ \sigma(u), & \text{gdy } w = 100u, u \in ||\sigma||. \end{cases}$$

Funkcja φ jest naturalnym złożeniem pewnych prostych funkcji (jakich?). Można pokazać, że każda z tych funkcji jest ciągła, a zatem φ , na mocy Lematu 7.26, jest funkcją ciągłą. Pozostawimy to jako ćwiczenie dla czytelnika.

Zauważmy, że n -krotna iteracja $\varphi^n(\perp)$ przedstawia drzewo formalnych obliczeń reprezentujących co najwyżej n wykonanów pętli w programie (zob. Rysunek 7 w Przykładzie 7.16)

while y $\neq$ 0 do x := 2x; y := y - 1 od

Natomiast najmniejszy punkt stały φ , jako kres górny ciągu iteracji, przedstawia drzewo formalnych obliczeń całego powyższego programu (zob. Rysunek 6 w Przykładzie 7.16).

(ii) Przypomnijmy, że $PF(A, B)$ oznacza zupełny porządek funkcji częściowych z Przykładu 7.27 (ii). Niech $\varphi : PF(N \times N, N) \rightarrow PF(N \times N, N)$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco dla $f \in PF(N \times N, N)$, oraz $m, n \in N$

$$\varphi(f)(m, n) = \begin{cases} m, & \text{jeśli } n = 0, \\ f(m, k)', & \text{jeśli } n = k' \text{ oraz } \langle m, k \rangle \in Dom(f), \\ \text{nieokreślone,} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Pozostawimy czytelnikowi jako ćwiczenie wykazanie, że φ jest funkcją ciągłą. Zauważmy, że jeśli f jest punktem stałym φ , to $Dom(f) = N \times N$, tzn. f jest funkcją totalną. Wynika to z następującego faktu, którego dowód indukcyjny pozostawimy czytelnikowi.

Jeśli f jest punktem stałym φ , to dla każdego $n \in N$ zachodzi następująca własność

$$\text{dla każdego } m \in N, \text{ zachodzi } \langle m, n \rangle \in Dom(f). \quad (36)$$

Tak więc powyższa definicja φ oraz (36) implikują, że każdy punkt stały f przekształcenia φ musi spełniać następujące warunki

$$\begin{aligned} f(m, 0) &= m, \\ f(m, n') &= f(m, n)'. \end{aligned}$$

Czytelnik z łatwością rozpozna indukcyjną definicję dodawania (zob. Przykład 4.7). Tak więc najmniejszym (i jedynym) punktem stałym φ jest funkcja dodawania. Iteracja $\varphi^n(\perp)$ przedstawia operację częściowego dodawania $m+k$ dla $k < n$ oraz $m \in N$. Suma teoriomnogościowa tych operacji daje oczywiście pełną operację dodawania.

(iii) **Dowód twierdzenia o definiowaniu funkcji przez indukcję**

Stosując rozumowanie podobne do powyższego przykładu udowodnimy teraz Twierdzenie 4.8. Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Niech $g : A \rightarrow B$ oraz niech $h : B \times A \times N \rightarrow B$ będą dowolnymi funkcjami. Pokażemy że istnieje dokładnie jedna funkcja $f : A \times N \rightarrow B$ spełniająca następujące warunki dla dowolnego $a \in A$,

$$\begin{aligned} f(a, 0) &= g(a), \\ f(a, n') &= h(f(a, n), a, n). \end{aligned}$$

Jednoznaczność dowodzi się pokazując przez bardzo prostą indukcję, że jeśli f_1 i f_2 spełniają powyższą definicję to dla każdego $a \in A$,

$$\text{dla każdego } n \in N, \quad f_1(a, n) = f_2(a, n).$$

Dla dowodu istnienia użyjemy, podobnie jak w poprzednim przykładzie, Twierdzenia 7.28. Niech $\varphi : PF(A \times N, B) \rightarrow PF(A \times N, B)$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco

$$\varphi(f)(a, n) = \begin{cases} g(a), & \text{jeśli } n = 0, \\ h(f(a, k), a, k), & \text{jeśli } n = k', \langle a, k \rangle \in \text{Dom}(f), \\ \text{nieokreślone}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Funkcja φ jest ciągła jako złożenie pewnych naturalnych funkcji ciągłych (jakich?). Dowód ciągłości pozostawimy czytelnikowi jako ćwiczenie. Podobnie jak w poprzednim przykładzie zauważamy, że punkty stałe φ są funkcjami totalnymi oraz, że wszystkie punkty stałe φ spełniają powyższą definicję indukcyjną. To kończy dowód istnienia f .

■

7.6 Lemat Kuratowskiego-Zorna

Poniższe twierdzenie, znane jako lemat Kuratowskiego-Zorna, odgrywa ważną rolę w dowodach istnienia pewnych obiektów. Dowody wykorzystujące tę metodę są *niekonstruktywne* bowiem dowód istnienia obiektu nie podaje konstrukcji tego obiektu. Dowód tego twierdzenia zostanie podany w następnym rozdziale.

Twierdzenie 7.30 (Lemat Kuratowskiego-Zorna)

Jeśli $\langle A, \leq \rangle$ jest niepustym zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym każdy łańcuch ma ograniczenie górne, to A ma element maksymalny.

Przykład 7.31 Dla zilustrowania sposobu zastosowania tego twierdzenia pokażemy, że każdy częściowy porządek można rozszerzyć do porządku liniowego, tzn. jeśli $\langle A, r_0 \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to istnieje liniowy porządek r_* na A , taki że $r_0 \subseteq r_*$.

Niech $\mathcal{R}$ oznacza zbiór wszystkich częściowych porządków r na A , takich że $r_0 \subseteq r$. Niech $\mathcal{L}$ będzie łańcuchem w $\mathcal{R}$ (ze względu na relację zawierania $\subseteq$). Jeśli $\mathcal{L} = \emptyset$, to r_0 jest ograniczeniem górnym $\mathcal{L}$. Załóżmy więc, że $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Ma miejsce następujący fakt (jego dowód pozostawimy czytelnikowi).

Fakt 7.32 *Suma teoriomnogościowa łańcucha częściowych porządków w A jest częściowym porządkiem w A .*

Z faktu 7.32 natychmiast wynika, że $\bigcup \mathcal{L}$ jest ograniczeniem górnym¹¹ w $\mathcal{R}$ łańcucha $\mathcal{L}$. Zatem, na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna, $\mathcal{R}$ ma element maksymalny r_* . Liniowość porządku r_* wynika natychmiast z następującego faktu, który też pozostawiamy czytelnikowi do udowodnienia.

Fakt 7.33 *Częściowy porządek r na A jest maksymalnym elementem w zbiorze wszystkich częściowych porządków na A (ze względu na relację zawierania), wtw, gdy r jest liniowym porządkiem.*

Zadania

- 7.1.** Dowieść, że dla dowolnego drzewa $s \in FT_{k \leq}$, oraz słów v, w takich, że $vw \in s$, zachodzi $(s|_v)|_w = s|_{vw}$.
- 7.2.** Dowieść, że relacja “być podtermem” jest relacją częściowego porządku w zbiorze wszystkich termów $FT(\Sigma)$.
- 7.3.** Dowieść, że w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle P(A), \subseteq \rangle$ kres górny dowolnej rodziny zbiorów pokrywa się z sumą teoriomnogościową oraz kres dolny dowolnej niepustej rodziny zbiorów pokrywa się z przecięciem teoriomnogościowym.
- 7.4.** Dowieść, że $\bigsqcup \{\sigma_n \mid n \geq 1\} = \sigma$, w porządku z Przykładu 7.15 dla wyrażeń arytmetycznych.
- 7.5.** Dowieść, że $\bigsqcup \{\pi_n \in T_{2 \leq}(\Sigma) \mid n \in N\} = \pi$, w porządku z Przykładu 7.16 dla drzew formalnych obliczeń.
- 7.6.** Dowieść, że funkcja f z Przykładu 7.25 (i) ma dokładnie jeden punkt stały.

¹¹Ponieważ $\mathcal{L} \neq \emptyset$, to $r_0 \subseteq \bigcup \mathcal{L}$.

7.7. Dowieść, że dla dowolnych zbiorów A, B , zbiór $PF(A, B)$ wszystkich funkcji częściowych z A w B , uporządkowany relacją zawierania jest zupełnym porządkiem.

7.8. Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ oraz $\langle B, \leq_B \rangle$ będą zupełnymi porządkami. W produkcie $A \times B$ definiujemy relację $\leq$ w następujący sposób: $\langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle a_2, b_2 \rangle$ wtw, gdy $a_1 \leq_A a_2$ oraz $b_1 \leq_B b_2$. Dowieść, że $\langle A \times B, \leq \rangle$ jest zupełnym porządkiem.

7.9. Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ oraz $\langle B, \leq_B \rangle$ będą zupełnymi porządkami. Niech $[A, B]$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych z A w B . Niech $\leq$ będzie relacją w $[A, B]$ zdefiniowaną następująco: $f \leq g$ wtw, gdy dla każdego $a \in A$ zachodzi $f(a) \leq_B g(a)$. Dowieść, że $\langle [A, B], \leq \rangle$ jest zupełnym porządkiem.

7.10. Dowieść, że każda funkcja stała pomiędzy zupełnymi porządkami jest ciągła.

7.11. Niech $f \in \Sigma_n$, zdefiniujemy $\varphi_f : T_{k \leq}(\Sigma)^n \rightarrow T_{k \leq}(\Sigma)$ następująco dla $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1} \in T_{k \leq}(\Sigma)$,

$$||\varphi_f(\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1})|| = \{\varepsilon\} \cup \bigcup_{i < n} \{i w \mid w \in ||\sigma_i||\},$$

oraz

$$\varphi_f(\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1})(w) = \begin{cases} f, & \text{gdy } w = \varepsilon, \\ \sigma_i(u), & \text{gdy } i < n \text{ oraz } w = i u. \end{cases}$$

Dowieść, że φ_f jest funkcją ciągłą.

7.12. Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ oraz $\langle B, \leq_B \rangle$ będą zupełnymi porządkami. Niech $\varphi : [A, B] \times A \rightarrow B$ będzie funkcją zdefiniowaną dla $f \in [A, B]$ oraz $a \in A$ następująco,

$$\varphi(f, a) = f(a)$$

Dowieść, że φ jest funkcją ciągłą.

7.13. Dowieść, że dla dowolnych zbiorów A, B, C , funkcja $\varphi : PF(A, B) \times PF(B, C) \rightarrow PF(A, C)$ zdefiniowana wzorem $\varphi(f, g) = gf$ jest funkcją ciągłą.

7.14. Dowieść, że dla dowolnych zbiorów A, B, C , funkcja $\varphi : PF(A, B) \times PF(A, C) \rightarrow PF(A, B \times C)$ zdefiniowana wzorem

$$\varphi(f, g)(a) = \begin{cases} \langle f(a), g(a) \rangle, & \text{gdy } a \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g), \\ \text{nieokreślone}, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

jest funkcją ciągłą.

7.15. Niech $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dowieść, że funkcja $\varphi : PF(A_1, B) \times PF(A_2, B) \rightarrow PF(A_1 \cup A_2, B)$ zdefiniowana wzorem $\varphi(f, g) = f \cup g$ jest funkcją ciągłą.

7.16. Niech $C \subseteq A$. Dowieść, że funkcja $\varphi : PF(A, B) \rightarrow PF(C, B)$, zdefiniowana wzorem $\varphi(f) = f \cap (C \times B)$ jest funkcją ciągłą.

7.17. Dowieść, że następująca operacja definiowania warunkowego jest funkcją ciągłą.

Niech $A_1, A_2 \subseteq A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Niech $\varphi : PF(A, B) \times PF(A, B) \rightarrow PF(A, B)$ będzie zdefiniowana następującym wzorem dla $f, g \in PF(A, B)$ oraz $a \in A$,

$$\varphi(f, g)(a) = \begin{cases} f(a), & \text{gdy } a \in A_1 \cap \text{Dom}(f), \\ g(a), & \text{gdy } a \in A_2 \cap \text{Dom}(g), \\ \text{nieokreślone,} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dowieść, że φ jest funkcją ciągłą.

7.18. Udowodnić Fakt 7.32 oraz Fakt 7.33.