

4 Funkcje

Niech A i B będą zbiorami. *Funkcją* z A do B nazwiemy uporządkowaną trójkę $\langle f, A, B \rangle$, gdzie $f \subseteq A \times B$ jest relacją spełniającą następujące dwa warunki.

$$\text{Dla dowolnych } a \in A \text{ oraz } b_1, b_2 \in B, \text{ jeśli } \langle a, b_1 \rangle \in f \text{ oraz } \langle a, b_2 \rangle \in f, \text{ to } b_1 = b_2. \quad (7)$$

$$\text{Dla każdego } a \in A \text{ istnieje } b \in B \text{ taki, że } \langle a, b \rangle \in f. \quad (8)$$

W przypadku, gdy $\langle f, A, B \rangle$ jest funkcją z A do B , to mówimy zwykle, że f jest funkcją z A do B i oznaczamy to przez $f : A \rightarrow B$. Zauważmy, że funkcja jest zadana nie tylko przez relację f , ale również przez zbiory: A (zwany *dziedziną*) oraz B (zwany *przeciwdziedziną*). W szczególności może tak się zdarzyć, że mamy dwie różne funkcje $f : A \rightarrow B$ oraz $g : A \rightarrow C$, gdzie $B \neq C$ oraz relacje f i g są równe. Na przykład, $\langle I_A, A, A \rangle$ oraz $\langle I_A, A, B \rangle$, gdzie $A \subseteq B$ jest właściwym podzbiorem, są dwiema różnymi funkcjami (bo się różnią przeciwdziedziną). Tak więc, zgodnie z umową, mamy $I_A : A \rightarrow A$ oraz $I_A : A \rightarrow B$. Tę drugą funkcję zgrabniej jest oznaczyć, np. $\iota_{A,B} : A \rightarrow B$, podkreślając jej zależność od B , chociaż teoriomnogościowo, jako relacje mamy $I_A = \iota_{A,B}$. Będziemy się starali unikać używania niejednoznacznych nazw na funkcje.

Zbiór wszystkich funkcji z A w B oznaczamy symbolem B^A . Każdą trójkę $\langle f, A, B \rangle$ spełniającą (7) nazywamy *funkcją częściową* z A do B . Dziedziną funkcji częściowej f nazywamy zbiór

$$\text{Dom}(f) = \{a \in A \mid \text{istnieje } b \in B \text{ taki, że } \langle a, b \rangle \in f\}.$$

Zauważmy, że jeśli $f \subseteq A \times B$ jest funkcją częściową z A do B , to f jest funkcją z $\text{Dom}(f)$ do B . Jeśli $f : A \rightarrow B$ oraz $a \in A$, to $f(a)$ oznacza jedyny element ze zbioru B taki, że $\langle a, f(a) \rangle \in f$. Element $f(a)$ jest *wartością* funkcji f na elemencie a .

Zauważmy, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f : \emptyset \rightarrow A$, gdzie A jest dowolnym zbiorem. Jest to pusta relacja. Natomiast, jeśli $A \neq \emptyset$, to nie ma funkcji z A w $\emptyset$. W tym przypadku pusta relacja jest funkcją częściową, ale nie jest funkcją.

Przykład 4.1

- (i) Relacja I_A z przykładu 2.2 (i) jest funkcją z A do A . Relacje $\leq$ oraz Q nie są funkcjami. P jest funkcją częściową z N do N . Dziedziną tej funkcji jest zbiór wszystkich liczb będących kwadratami liczb naturalnych. Relacja P^{-1} jest funkcją z N do N oraz relacja Q^{-1} jest funkcją z Z do N .
- (ii) *Indeksowaną rodziną zbiorów* nazywamy dowolną funkcję ze zbioru indeksów I do rodziny zbiorów $\mathcal{A}$. Indeksowane rodziny zbiorów zwykle oznacza się przez $\{A_i\}_{i \in I}$. Sumę takiej rodziny oznaczamy przez $\bigcup_{i \in I} A_i$. Podobnie dla przecięć.

(iii) Niech A będzie dowolnym zbiorem. *Słowem* nad alfabetem A nazywamy skończony ciąg elementów zbioru A , czyli funkcję $w : n \rightarrow A$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Liczba n jest *długością* słowa w , oznaczaną przez $|w|$. A^* oznacza zbiór wszystkich słów nad alfabetem A . Szczególnym słowem nad każdym alfabetem jest *słowo puste*, oznaczane ε , które definiuje się jako (jedyne) słowo długości 0.

Zgodnie z naszą notacją zbiór A^n można rozumieć na dwa sposoby—jako n -krotny iloczyn kartezjański zbioru A lub jako zbiór wszystkich funkcji ze zbioru n do A (czyli słów nad A długości n). Aby uniknąć takiej niejednoznaczności możemy utożsamiać n -tki uporządkowane elementów z A z funkcjami z n do A (w rozdziale dotyczącym relacji sprawę *implementacji* n -tek uporządkowanych pozostawiliśmy otwartą). Przy takim utożsamieniu n -tka $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ jest reprezentowana przez funkcję $w : n \rightarrow A$ taką, że $w(i) = a_{i+1}$, dla $i < n$.

Na zbiorze słów mamy następująco zdefiniowaną operację *składania*. Niech $w : n \rightarrow A$ oraz $u : m \rightarrow A$ będą słowami. Złożenie słów w oraz u jest słowem $wu : m + n \rightarrow A$ zdefiniowanym dla $i < m + n$ następująco.

$$(wu)(i) = \begin{cases} w(i), & \text{jeśli } i < n \\ u(i - n), & \text{jeśli } n \leq i < m + n \end{cases}$$

(iv) Niech A będzie dowolnym zbiorem. *Multizbiorem* nad A nazywamy dowolną funkcję $\mathcal{A} : A \rightarrow \mathbb{N}$. Multizbiory tym się różnią od zbiorów, że ich elementy występują z *krotnościami*, tzn. gdy $\mathcal{A}(x) = 4$, to mówimy, że element x występuje w $\mathcal{A}$ z krotnością 4. Elementy występujące z krotnością 0 nie należą do $\mathcal{A}$. Zbiory można oczywiście traktować jako te multizbiory, w których każdy element występuje z krotnością co najwyżej 1. Przez $\mathcal{M}(A)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich multizbiorów nad A .

Funkcję $f : A \rightarrow B$ nazwiemy *różnowartościową*, gdy dla dowolnych $a_1, a_2 \in A$, jeśli $f(a_1) = f(a_2)$, to $a_1 = a_2$. Funkcję f nazwiemy *na* B , jeśli dla każdego $b \in B$ istnieje $a \in A$ taki, że $f(a) = b$. Funkcję, która jest jednocześnie *na* oraz różnowartościowa nazywamy *bijekcją*.

Przykład 4.2

- (i) Identyczność $I_A : A \rightarrow A$ jest bijekcją.
- (ii) Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zdefiniowana wzorem $f(x) = x^2$ nie jest ani różnowartościowa ani na $\mathbb{R}$.
- (iii) Funkcja $f_1 : \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\} \rightarrow \mathbb{R}$, zdefiniowana $f_1(x) = x^2$ jest różnowartościowa, ale nie jest na $\mathbb{R}$. Funkcja f_1 jest *obcięciem* funkcji f do zbioru liczb rzeczywistych niedodatnich.

(iv) Funkcja $f_2 : R \rightarrow \{x \in R \mid 0 \leq x\}$, zdefiniowana $f_2(x) = x^2$ jest na, ale nie jest różnowartościowa.

(v) Funkcja $f : N \times N \rightarrow N$ zdefiniowana wzorem $f(m, n) = 2^n(2m+1) - 1$ jest bijekcją. Rzeczywiście, jeśli $2^{n_1}(2m_1+1) - 1 = 2^{n_2}(2m_2+1) - 1$, to $2^{n_1}(2m_1+1) = 2^{n_2}(2m_2+1)$. Zatem, z jednoznaczności rozkładu liczb na czynniki pierwsze wynika, że $n_1 = n_2$. Otrzymujemy więc $2m_1 + 1 = 2m_2 + 1$, czyli $m_1 = m_2$, co oznacza, że f jest funkcją różnowartościową. Żeby pokazać, że f jest na, weźmy dowolną liczbę naturalną k . Niech $n \in N$ będzie największą liczbą taką, że 2^n dzieli $k+1$. Zatem $(k+1)/2^n$ jest liczbą nieparzystą. Niech $m = ((k+1)/2^n - 1)/2$. Łatwo sprawdzić, że $f(m, n) = k$. Dowodzi to, że f jest funkcją na N .

Twierdzenie 4.3 *Jeśli $f : A \rightarrow B$ oraz $g : B \rightarrow C$ są funkcjami, to relacja $gf \subseteq A \times C$ jest funkcją z A do C . Dla $a \in A$, $(gf)(a) = g(f(a))$. Ponadto, jeśli funkcje f, g są obie różnowartościowe lub obie na, to gf jest też różnowartościowa, lub odpowiednio, na.*

Dowód: Niech $a \in A$ będzie dowolnym elementem. Wtedy istnieje $b \in B$ oraz $c \in C$, takie że $\langle a, b \rangle \in f$ oraz $\langle b, c \rangle \in g$. Zatem istnieje $c \in C$ takie, że $\langle a, c \rangle \in gf$. Oznacza to, że

$$(gf)(a) = g(f(a)), \quad (9)$$

o ile pokażemy, że gf jest funkcją.

Dla pokazania jednoznaczności założmy, że $\langle a, c_1 \rangle \in gf$ oraz $\langle a, c_2 \rangle \in gf$. Wtedy istnieją $b_1, b_2 \in B$ takie, że $\langle a, b_1 \rangle \in f$, $\langle a, b_2 \rangle \in f$, $\langle b_1, c_1 \rangle \in g$ oraz $\langle b_2, c_2 \rangle \in g$. Ponieważ f jest funkcją to $b_1 = b_2$ a zatem, ponieważ g jest funkcją, to $c_1 = c_2$. Tak więc pokazaliśmy, że złożenie gf jest funkcją.

Jeśli f i g są różnowartościowe oraz $(gf)(a_1) = (gf)(a_2)$, to z różnowartościowości g oraz (9) wynika, że $f(a_1) = f(a_2)$. Zatem, z różnowartościowości f otrzymujemy $a_1 = a_2$, co dowodzi różnowartościowości gf .

Założmy, że f i g są na, i niech $c \in C$ będzie dowolnym elementem. Ponieważ g jest na C to istnieje $b \in B$ taki, że $g(b) = c$. Z faktu, że f jest na B otrzymujemy, że istnieje $a \in A$ taki, że $f(a) = b$. Zatem $(gf)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$, co dowodzi, że gf jest na C . ■

Niech $f : A \rightarrow B$ będzie funkcją. Funkcję $g : B \rightarrow A$ nazwiemy *odwrotną* do f jeśli

$$gf = I_A \text{ oraz } fg = I_B.$$

Twierdzenie 4.4 *Niech $f : A \rightarrow B$ będzie funkcją. Następujące warunki są równoważne*

- (i) f ma funkcję odwrotną,
- (ii) f jest bijekcją,

(iii) Relacja odwrotna f^{-1} jest funkcją.

Dowód: Załóżmy (i) i niech $g : B \rightarrow A$ będzie funkcją odwrotną do f . Jeśli $f(a_1) = f(a_2)$, to $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Ponieważ $gf = I_A$ to $a_1 = a_2$. Zatem f jest różnowartościowa. Dla pokazania, że f jest na weźmy dowolny $b \in B$. Niech $a = g(b)$. Wtedy $f(a) = f(g(b)) = b$, ponieważ $fg = I_B$. Zatem f jest bijekcją.

Założmy teraz (ii). Pokażemy, że relacja f^{-1} jest funkcją. Weźmy dowolny $b \in B$. Ponieważ f jest na, to istnieje $a \in A$ takie że $f(a) = b$. Oznacza to, że $\langle b, a \rangle \in f^{-1}$. Jeśli natomiast $\langle b, a_1 \rangle \in f^{-1}$ oraz $\langle b, a_2 \rangle \in f^{-1}$ to mamy $f(a_1) = f(a_2)$ i z różnowartościowości f otrzymujemy $a_1 = a_2$. W ten sposób udowodniliśmy, że f^{-1} jest funkcją.

Na zakończenie dowodu załóżmy (iii). Wówczas dla dowolnego $a \in A$, mamy $\langle a, a \rangle \in f^{-1}f$, bo $\langle a, f(a) \rangle \in f$. Zatem $I_A \subseteq f^{-1}f$. Z drugiej strony, jeśli $\langle a_1, a_2 \rangle \in f^{-1}f$, to istnieje $b \in B$, takie że $\langle a_1, b \rangle \in f$ oraz $\langle b, a_2 \rangle \in f^{-1}$. Więc $\langle b, a_1 \rangle \in f^{-1}$ i ponieważ f^{-1} jest funkcją to $a_1 = a_2$. To dowodzi, że $f^{-1}f = I_A$.

Dowód równości $ff^{-1} = I_B$ jest analogiczny i pozostawiamy go czytelnikowi. ■

Oczywiście funkcję odwrotną do danej funkcji f oznaczamy f^{-1} .

Niech $f : A \rightarrow B$ będzie funkcją i niech $X \subseteq A$. Obrazem zbioru X przy przekształceniu f nazwiemy zbiór

$$\vec{f}(X) = \{b \in B \mid \text{istnieje } a \in X, \text{ taki że } f(a) = b\}.$$

Dla zbioru $Y \subseteq B$, przeciwwobrazem zbioru Y przy przekształceniu f nazwiemy zbiór

$$\vec{f}^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}.$$

Twierdzenie 4.5 Niech $f : A \rightarrow B$ będzie funkcją, niech $\mathcal{X}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru A oraz niech $\mathcal{Y}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru B . Wtedy

$$(i) \quad \vec{f}(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup \{\vec{f}(X) \mid X \in \mathcal{X}\},$$

$$(ii) \quad \text{Jeśli } \mathcal{X} \neq \emptyset, \text{ to } \vec{f}(\bigcap \mathcal{X}) \subseteq \bigcap \{\vec{f}(X) \mid X \in \mathcal{X}\},$$

$$(iii) \quad \vec{f}^{-1}(\bigcup \mathcal{Y}) = \bigcup \{\vec{f}^{-1}(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\},$$

$$(iv) \quad \text{Jeśli } \mathcal{Y} \neq \emptyset, \text{ to } \vec{f}^{-1}(\bigcap \mathcal{Y}) = \bigcap \{\vec{f}^{-1}(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\}.$$

Dowód: Udowodnimy (i). Niech $b \in B$ będzie dowolnym elementem. Mamy następujący ciąg równoważności.

$b \in \vec{f}(\bigcup \mathcal{X})$	wtw, gdy
istnieje $a \in \bigcup \mathcal{X}$ takie, że $f(a) = b$	wtw, gdy
istnieje $a \in A$ oraz istnieje $X \in \mathcal{X}$ takie, że $a \in X$ oraz $f(a) = b$	wtw, gdy
istnieje $X \in \mathcal{X}$ oraz istnieje $a \in A$ takie, że $a \in X$ oraz $f(a) = b$	wtw, gdy
istnieje $X \in \mathcal{X}$ takie, że $b \in \vec{f}(X)$ oraz $f(a) = b$	wtw, gdy
$b \in \bigcup \{\vec{f}(X) \mid X \in \mathcal{X}\}$.	

Dla dowodu (ii) weźmy dowolny $b \in \vec{f}(\bigcap \mathcal{X})$. Oznacza to, że istnieje $a \in \bigcap \mathcal{X}$ taki, że $f(a) = b$. Zatem dla każdego $X \in \mathcal{X}$ mamy: $a \in X$ oraz $f(a) = b$. Tak więc b należy do każdego obrazu $\vec{f}(X)$, dla X przebiegających $\mathcal{X}$, czyli $b \in \bigcap \{\vec{f}(X) \mid X \in \mathcal{X}\}$, co kończy dowód.

Powyższy dowód można rozpisać na podobne kroki tak jak w poprzednim przypadku. Dostaniemy ciąg równoważności za wyjątkiem jednego przejścia, które jest tylko w jedną stronę (które?).

Natępnie udowodnimy (iii). Niech $a \in A$ będzie dowolnym elementem. Mamy następujący ciąg równoważności.

$a \in \vec{f}^{-1}(\bigcup \mathcal{Y})$	wtw, gdy
$f(a) \in \bigcup \mathcal{Y}$	wtw, gdy
istnieje $Y \in \mathcal{Y}$ takie, że $f(a) \in Y$	wtw, gdy
istnieje $Y \in \mathcal{Y}$ takie, że $a \in \vec{f}^{-1}(Y)$	wtw, gdy
$a \in \bigcup \{\vec{f}^{-1}(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\}$.	

Dowód (iv) jest zupełnie analogiczny do powyższego dowodu i dlatego pozostawimy go czytelnikowi. ■

Przykład 4.6 Zawieranie w punkcie (ii) powyższego twierdzenia nie może być zastąpione równością o czym świadczy następujący przykład. Niech f będzie funkcją z Przykładu 4.2 (ii). Niech $A = \{-1\}$ oraz $B = \{1\}$. Wówczas

$$\vec{f}(A \cap B) = \vec{f}(\emptyset) = \emptyset,$$

ale

$$\vec{f}(A) \cap \vec{f}(B) = \{1\}.$$

Dla funkcji różnowartościowych zawieranie w Twierdzeniu 4.5 (ii) można zastąpić równością.

4.1 Definiowanie funkcji przez indukcję

W zbiorze liczb naturalnych możemy definiować funkcje wykorzystując własność zbioru N polegającą na tym, że jest to najmniejszy zbiór zawierający 0 i zamknięty na operację następnika.

Rozważmy następujący przykład.

Przykład 4.7 Chcemy zdefiniować operację dodawania w zbiorze liczb naturalnych opierając się jedynie na operacji następnika. Oczywiście dodawanie $f : N \times N \rightarrow N$ jest funkcją spełniającą następujące warunki.

$$\begin{aligned} f(m, 0) &= m \\ f(m, n') &= f(m, n)'. \end{aligned}$$

Zauważmy, że powyższe równości można traktować jak opis sposobu na obliczanie dodawania dwóch liczb naturalnych. Pierwsza równość dotyczy sytuacji gdy drugi argument w f jest równy 0, podczas gdy drugie równanie definiuje wynik dodawania m do następnika n odwołując się do wyniku dodawania m do n , a więc do pary argumentów, dla której możemy założyć, że umiemy policzyć wartość. Liczba m w powyższej definicji jest dowolna ale ustalona. Nazywamy ją *parametrem* tej definicji.

Do definiowania funkcji powyższą metodą służy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.8 (O definiowaniu funkcji przez indukcję)

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami takimi, że $B \neq \emptyset$. Niech $g : A \rightarrow B$ oraz $h : B \times A \times N \rightarrow B$ będą dowolnymi funkcjami. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja $f : A \times N \rightarrow B$ spełniająca następujące warunki dla dowolnego $a \in A$ oraz $n \in N$,

$$\begin{aligned} f(a, 0) &= g(a) \\ f(a, n') &= h(f(a, n), a, n). \end{aligned}$$

W powyższym twierdzeniu A jest zbiorem *parametrów*. Dowód Twierdzenia 4.8 będzie podany później – w dziale o punktach stałych.

Tak więc wynika z powyższego twierdzenia, że istnieją dokładnie jedna funkcja f spełniająca równania Przykładu 4.7. Funkcje g i h dla tego przykładu wyglądają następująco: $g = I_N$, $h(x, y, z) = x'$, dla $x, y, z \in N$. Wartość $f(m, n)$ oczywiście oznaczamy przez $m + n$. Podamy jeszcze dwa przykłady definicji indukcyjnych.

Przykład 4.9 Używając operacji dodawania możemy zdefiniować indukcyjnie mnożenie. Jest to (jedyna) funkcja $f : N \times N \rightarrow N$ spełniająca równania

$$\begin{aligned} f(m, 0) &= 0 \\ f(m, n') &= m + f(m, n). \end{aligned}$$

Funkcją g dla tego przykładu jest $g(x) = 0$ dla $x \in N$. Natomiast funkcją h jest $h(x, y, z) = y + x$ dla $x, y, z \in N$.

Przykład 4.10 Zbiór parametrów oczywiście nie musi być zbiorem liczb naturalnych. Poniższy układ równań definiuje operację iteracji $Iter : P(A \times A) \times N \rightarrow P(A \times A)$ dowolnej relacji binarnej w A , gdzie A jest dowolnym zbiorem.

Dla $r \subseteq A \times A$ oraz $n \in N$ definiujemy

$$\begin{aligned} Iter(r, 0) &= I_A \\ Iter(r, n') &= r \circ Iter(r, n). \end{aligned}$$

Oczywiście $Iter(r, n)$ jest n -krotnym złożeniem relacji r ze sobą. Funkcją $g : P(A \times A) \rightarrow P(A \times A)$ jest $g(r) = I_A$, dla $r \in P(A \times A)$. Natomiast funkcją $h : P(A \times A) \times P(A \times A) \times N \rightarrow P(A \times A)$ jest zdefiniowana następująco: $h(r_1, r_2, n) = r_2 r_1$, dla $r_1, r_2 \in P(A \times A)$ oraz $n \in N$.

Zdarzają się sytuacje, jak zobaczymy później, w których będziemy definiowali indukcyjnie funkcję odwołując się nie tylko do jej wartości dla liczby poprzedniej, ale uzależniając wynik od wszystkich dotąd obliczonych wartości. W tym celu udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.11 Niech A i B będą dowolnymi zbiorami takimi, że $B \neq \emptyset$. Niech $g : A \rightarrow B$ oraz $h : B^* \times A \times N \rightarrow B$ będą dowolnymi funkcjami. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja $f : A \times N \rightarrow B$ spełniająca następujące warunki dla dowolnego $a \in A$ oraz $n \in N$,

$$\begin{aligned} f(a, 0) &= g(a) \\ f(a, n') &= h((f(a, 0) \cdots f(a, n)), a, n). \end{aligned}$$

W powyższym równaniu $(f(a, 0) \cdots f(a, n))$ jest słowem w B^* o literach $f(a, 0), \dots, f(a, n)$.

Dowód: Oczywiście istnieje co najwyżej jedna funkcja f spełniająca warunki powyższego twierdzenia. Jeśli f_1 i f_2 są dwiema takimi funkcjami, to bez trudu pokazujemy przez indukcję, że dla dowolnych $n \in N$ oraz $a \in A$,

$$f_1(a, n) = f_2(a, n).$$

Łatwy dowód powyższej równości pozostawimy czytelnikowi.

Dla dowodu istnienia f zastosujemy Twierdzenie 4.8. Niech $\tilde{B} = B^*$ i niech $\tilde{g} : A \rightarrow \tilde{B}$ będzie zdefiniowana tak, że $\tilde{g}(a)$ jest słowem jednoliterowym $g(a)$. Dalej, niech $\tilde{h} : \tilde{B} \times A \times N \rightarrow \tilde{B}$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco

$$\tilde{h}(w, a, n) = w h(w, a, n),$$

tnzn. do słowa w jest dopisywana litera $h(w, a, n)$.

Niech $\tilde{f} : A \times N \rightarrow \tilde{B}$ będzie jedyną funkcją zdefiniowaną indukcyjnie przez warunki

$$\begin{aligned}\tilde{f}(a, 0) &= \tilde{g}(a) \\ \tilde{f}(a, n') &= \tilde{h}(\tilde{f}(a, n), a, n).\end{aligned}$$

Niech $\ell : B^* \rightarrow B$ będzie funkcją przyporządkowującą dowolnemu niepustemu słowu w ostatnią, tj. najbardziej prawą literę w tym słowie. Ponadto przyjmijmy $\ell(\varepsilon) = b_0$, gdzie $b_0 \in B$ jest dowolnym, ustalonym elementem. Niech $f : A \times N \rightarrow B$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco

$$f(a, n) = \ell(\tilde{f}(a, n)).$$

Najpierw pokażemy, że

$$\tilde{f}(a, n) = (f(a, 0) \cdots f(a, n)). \quad (10)$$

Dowód (10) jest przez indukcję ze względu na n . Dla $n = 0$ mamy

$$\tilde{f}(a, 0) = \tilde{g}(a) = (g(a)) = (\ell(\tilde{g}(a))) = (\ell(\tilde{f}(a, 0))) = (f(a, 0)).$$

Ponadto

$$\begin{aligned}\tilde{f}(a, n') &= \tilde{h}(\tilde{f}(a, n), a, n) = \tilde{f}(a, n)h(\tilde{f}(a, n), a, n) = \\ &= (f(a, 0) \cdots f(a, n))\ell(\tilde{f}(a, n')) = (f(a, 0) \cdots f(a, n)f(a, n')).\end{aligned}$$

Tak więc pokazaliśmy (10). Pozostaje pokazać, że f spełnia zadane warunki. Oczywiście mamy

$$f(a, 0) = \ell(\tilde{f}(a, 0)) = \ell(\tilde{g}(a)) = g(a).$$

Ponadto

$$\begin{aligned}f(a, n') &= \ell(\tilde{f}(a, n')) = \ell(\tilde{h}(\tilde{f}(a, n), a, n)) = \\ &= \ell(\tilde{f}(a, n)h(\tilde{f}(a, n), a, n)) = h(\tilde{f}(a, n), a, n) = \\ &= h((f(a, 0) \cdots f(a, n)), a, n).\end{aligned}$$

Ostatnia równość w powyższym ciągu równości wynika z (10). Tak więc f jest żadaną funkcją. ■

Zadania

4.1. Niech $I \neq \emptyset$. Udowodnić, że dla każdej rodziny indeksowanej $\{A_{i,j}\}_{i \in I, j \in J}$ zachodzi

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}$$

4.2. Niech $f : A^A \rightarrow P(A)$ będzie taka, że $f(\varphi) = \vec{\varphi}(A)$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $P(A)$? Przedyskutować odpowiedź w zależności od zbioru A .

4.3. Niech $A \neq \emptyset$ i niech $f : A \rightarrow A$. Udowodnić, że dla dowolnego $a \in A$ istnieje najmniejszy zbiór $X \subseteq A$ taki, że $a \in X$ oraz $\vec{f}^{-1}(X) \subseteq X$.

4.4. Niech $f : P(N) \times P(N) \rightarrow P(N)$ będzie taka, że $f(A, B) = A \cap B$, dla dowolnych $A, B \subseteq N$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $P(N)$? Wyznaczyć $\vec{f}^{-1}(\{N\})$. Niech $C \subseteq N$ będzie dowolnym zbiorem. Wyznaczyć $\vec{f}(P(C) \times P(C))$.

4.5. Niech $f : N^N \rightarrow P(N)$ będzie taka, że $f(\varphi) = \vec{\varphi}^{-1}(\{1\})$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $P(N)$? Znaleźć obraz zbioru wszystkich funkcji stałych i przeciwobrazy zbiorów $\{\{5\}\}$ i $\{5\}$.

4.6. Niech $f : A \rightarrow B$ i niech $X \subseteq A$ oraz $Y \subseteq B$. Dowieść, że

$$X \subseteq \vec{f}^{-1}(Y) \quad \text{wtw, gdy} \quad \vec{f}(X) \subseteq Y.$$

4.7. Podać przykład takiej funkcji f oraz zbiorów A, B , że $\vec{f}^{-1}(\vec{f}(A)) \neq A$ oraz $\vec{f}(\vec{f}^{-1}(B)) \neq B$.

4.8. Niech $f : A \rightarrow B$. Udowodnić, że f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru C i dowolnych $g, h : C \rightarrow A$, jeśli $fg = fh$, to $g = h$.

4.9. Niech $f : A \rightarrow B$. Udowodnić, że f jest na B wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru C i dowolnych $g, h : B \rightarrow C$, jeśli $gf = hf$, to $g = h$.

4.10. Niech $f : P(R) \rightarrow P(P(R))$ będzie taka, że $f(A) = P(A)$, dla $A \subseteq R$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $P(P(R))$? Znaleźć $\vec{f}^{-1}(P(P(Q)))$, gdzie R oznacza zbiór liczb rzeczywistych a Q zbiór liczb wymiernych.

4.11. Dowieść, że funkcja $f : P(A)^B \rightarrow P(A \times B)$ taka, że dla $\varphi \in P(A)^B$,

$$f(\varphi) = \{\langle a, b \rangle \in A \times B \mid a \in \varphi(b)\}$$

jest bijekcją.

4.12. Dowieść, że funkcja $g : P(A \times B) \rightarrow P(A)^B$ taka, że dla $R \subseteq A \times B$ oraz $b \in B$,

$$g(R)(b) = \{a \in A \mid \langle a, b \rangle \in R\}$$

jest bijekcją. Czy g jest funkcją odwrotną do funkcji f z poprzedniego zadania?