

3 Liczby naturalne

Rodzina zbiorów $\mathcal{A}$ jest *induktywna* gdy

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- dla każdego zbioru $X \in \mathcal{A}$, zbiór $X \cup \{X\}$ należy do $\mathcal{A}$.

Operację, która zbiorowi X przyporządkowuje $X \cup \{X\}$ nazywamy operacją *następnika*. Następnik zbioru X oznaczamy X' . Istnienie zbiorów induktywnych jest postulowane aksjomatem zwanym *aksjomatem nieskończoności*. Aksjomat ten wyraża istnienie zbiorów nieskończonych.

Twierdzenie 3.1 *Istnieje najmniejszy zbiór induktywny, tzn. istnieje taki zbiór induktywny $\mathcal{A}_0$, że dla każdego zbioru induktywnego $\mathcal{B}$, zachodzi $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}$.*

Dowód: Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem induktywnym i niech

$$\Delta = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \mid \mathcal{B} \text{ jest zbiorem induktywnym}\}.$$

Ponieważ oczywiście przecięcie dowolnej niepustej rodziny zbiorów induktywnych jest zbiorem induktywnym to $\mathcal{A}_0 = \bigcap \Delta$ jest zbiorem induktywnym. Pokażemy, że jest to najmniejszy zbiór induktywny. Niech $\mathcal{B}$ będzie dowolnym zbiorem induktywnym. Oczywiście $\mathcal{B} \cap \mathcal{A} \in \Delta$. Zatem, z definicji przecięcia,

$$\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{A}.$$

Ponieważ $\mathcal{B} \cap \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, to $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}$. Zatem $\mathcal{A}_0$ jest najmniejszym zbiorem induktywnym. ■

Najmniejszy zbiór induktywny nazywamy *zbiorem liczb naturalnych* i oznaczamy go przez N . Zbiór N , jak każdy zbiór induktywny, musi zawierać $\emptyset$ – element ten reprezentuje liczbę naturalną 0. Ponadto N jest zamknięty na operację następnika, a zatem zawiera następnik 0 (który jest oczywiście oznaczany przez 1), następnik następnika 0 (czyli następnik 1, oznaczany przez 2), itd.

Twierdzenie 3.2 (Zasada indukcji)

Jeśli $P \subseteq N$ jest zbiorem liczb naturalnych takim, że

- $0 \in P$,
- dla każdej liczby n , jeśli $n \in P$, to $n' \in P$,

to P zawiera wszystkie liczby naturalne, tzn. $P = N$.

Dowód: Wynika bezpośrednio z faktu, że N jest najmniejszym zbiorem induktywnym. ■

Następujące twierdzenie zbiera pewne własności liczb naturalnych, które będą wykorzystywane w dalszych częściach tego wykładu.

Twierdzenie 3.3 Dla dowolnych liczb $m, n \in N$,

- (i) Jeśli $m \in n$, to $m \subseteq n$.
- (ii) $n \notin n$.
- (iii) Jeśli $m' = n'$, to $m = n$.
- (iv) Jeśli $m \subseteq n$ oraz $m \neq n$, to $m \in n$.
- (v) Zachodzi: $m \subseteq n$ lub $n \subseteq m$.
- (vi) Zachodzi dokładnie jedna z możliwości: $m \in n$, $m = n$, $n \in m$.

Dowód: Twierdzenie to będziemy dowodzić przez indukcję. Dla dowodu (i) rozważmy zbiór

$$P = \{n \in N \mid \text{dla każdego } m \in n, m \subseteq n\}.$$

Pokażemy, że P jest zbiorem induktywnym. Oczywiście $0 \in P$. Załóżmy, że $n \in P$. Dla pokazania, że $n' \in P$ weźmy dowolny $m \in n'$. Ponieważ $n' = n \cup \{n\}$, to mamy dwa przypadki do rozpatrzenia. Jeśli $m \in n$ to z założenia indukcyjnego mamy $m \subseteq n$ a zatem $m \subseteq n'$. Jeśli natomiast $m = n$, to oczywiście $m \subseteq n'$. Tak więc w każdym przypadku m jest zawarte w n' , co dowodzi że $n' \in P$.

Dla dowodu (ii) rozważmy zbiór

$$P = \{n \in N \mid n \notin n\}.$$

Oczywiście $0 \in P$. Załóżmy, że $n \in P$ i przypuśćmy, że

$$n' \in n \cup \{n\}. \quad (4)$$

Zatem albo $n' \in n$ lub $n' = n$. W pierwszym przypadku, korzystając z (i) otrzymujemy $n \cup \{n\} \subseteq n$ a zatem $n \in n$, co daje sprzeczność z założeniem indukcyjnym. W drugim przypadku bezpośrednio otrzymujemy $n \in n$, co daje ponownie sprzeczność. Tak więc (4) jest niemożliwe, co dowodzi $n' \in P$.

Aby udowodnić (iii) załóżmy, że

$$m \cup \{m\} = n \cup \{n\}.$$

Zatem m musi należeć do prawej strony powyższej równości. Jeśli $m \in n$, to korzystając z (i) mamy $m \subseteq n$. Jeśli natomiast $m = n$, to oczywiście też mamy $m \subseteq n$. Z symetrii założeń wynika, że również $n \subseteq m$. Zatem $m = n$.

Dla dowodu (iv) bierzemy zbiór

$$P = \{n \in N \mid \text{dla każdego } m \subseteq n, \text{ jeśli } m \neq n, \text{ to } m \in n\}.$$

Oczywiście $0 \in P$ (bo zbiór pusty nie zawiera właściwych podzbiorów). Załóżmy, że $n \in P$ i niech

$$m \subseteq n'. \quad (5)$$

Założmy, że m jest właściwym podzbiorem zbioru n' . Pokażemy, że $m \in n'$. Jeśli $n \in m$ to na mocy (i) $n \subseteq m$ więc także $n' \subseteq m$ i z (5) wynika, że $n' = m$, sprzeczność. Mamy więc $n \notin m$. Z (5) otrzymujemy

$$m \subseteq n.$$

Jeśli $m = n$, to oczywiście $m \in n'$. Niech więc $m \neq n$. Ponieważ m jest właściwym podzbiorem n , to z założenia indukcyjnego otrzymujemy $m \in n$, co daje $m \in n'$. To kończy dowód (iv)

Dla dowodu (v) rozważmy zbiór

$$P = \{n \in N \mid \text{dla każdego } m \in N, \text{ jeśli } n \not\subseteq m \text{ to } m \subseteq n\}.$$

Dla dowodu induktywności zbioru P zauważmy, że $0 \in P$ oraz założmy, że $n \in P$. Weźmy dowolny m taki, że

$$n' \not\subseteq m. \quad (6)$$

Z założenia indukcyjnego wynika, że $m \subseteq n$ lub $n \subseteq m$. Jeśli $m \subseteq n$ to oczywiście $m \subseteq n'$ i nie musimy nic robić. Założmy więc, że $n \subseteq m$ i $n \neq m$. Z (iv) mamy $n \in m$. Zatem $n' \subseteq m$, co jest sprzeczne z (6). Otrzymana sprzeczność dowodzi, że założony przypadek nie może zajść. Zatem $n' \in P$.

Warunek (vi) wynika bezpośrednio z udowodnionych już punktów. Zachodzenie jednej z wymienionych możliwości wynika z (iv) i (v). Natomiast niemożliwość zajścia jednocześnie dwóch z wymienionych przypadków wynika z (ii) i (i). ■

W przypadku liczb naturalnych relację zawierania oznacza się zwyczajowo $\leq$, natomiast relację $\in$ oznacza się $<$. Jeśli $n \in m$, to mówimy, że n jest *mniejsze* od m oraz, że m jest *większe* od n . Następnik liczby n oznaczamy oczywiście przez $n + 1$. Liczba naturalna n jest jednocześnie zbiorem wszystkich liczb naturalnych mniejszych od niej, tzn.

$$n = \{k \in N \mid k < n\}.$$

Poniższe twierdzenie mówi o tym, że każdy skończony niepusty zbiór liczb naturalnych ma element największy.

Twierdzenie 3.4 *Dla każdej liczby naturalnej n i dla każdego niepustego zbioru $X \subseteq n$ istnieje $n_0 \in X$ takie, że dla każdego $m \in X$, zachodzi $m \leq n_0$, tzn. n_0 jest największą liczbą w X .*

Dowód: Niech P będzie zbiorem tych wszystkich liczb naturalnych n , że dla każdego niepustego $X \subseteq n$, istnieje $n_0 \in X$ taki, że dla każdego $m \in X$, zachodzi $m \leq n_0$. Pokażemy, że P jest zbiorem induktywnym. Oczywiście $0 \in P$.

Założmy, że $n \in P$ i niech $X \subseteq n'$ będzie dowolnym niepustym podzbiorem. Rozważmy dwa przypadki.

Jeśli $n \in X$ to oczywiście szukany element n_0 jest n . Jeśli natomiast $n \notin X$, to $X \subseteq n$ i z założenia indukcyjnego wnioskujemy o istnieniu $n_0 \in X$ o odpowiednich własnościach. ■

Na zakończenie podamy ważne twierdzenie zwane *zasadą minimum*.

Twierdzenie 3.5 (Zasada minimum)

Każdy niepusty zbiór liczb naturalnych ma liczbę najmniejszą, tzn. jeśli $X \subseteq N$ oraz $X \neq \emptyset$, to istnieje $n_0 \in X$ takie, że dla każdego $m \in X$, $n_0 \leq m$.

Dowód: Niech X będzie niepustym zbiorem liczb naturalnych nie mającym najmniejszego elementu. Niech

$$P = \{n \in N \mid n \cap X = \emptyset\}.$$

Pokażemy, że P jest zbiorem induktywnym. Oczywiście $0 \in P$. Założmy, że $n \in P$ oraz, że $n' \cap X \neq \emptyset$. Zatem $n \in X$ oraz dla każdego $m < n$ mamy $m \notin X$. Oznacza to, że n jest najmniejszym elementem X . Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $n' \cap X = \emptyset$, a zatem $n' \in P$.

Z zasady indukcji wynika, że $P = N$ a zatem $X = \emptyset$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że X musi mieć element najmniejszy. ■

Zadania

3.1. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \neq 0$, zachodzi $(\bigcup n)' = n$.

3.2. Dowieść, że $\bigcup N = N$.

3.3. Niech $n > 0$ będzie liczbą naturalną. Ile elementów ma najmniejszy zbiór A spełniający poniższe warunki?

a.) dla $1 \leq i \leq n$, zbiór $\{i\}$ należy do A ;

b.) jeśli $X, Y \in A$, to $X \cup Y \in A$.

3.4. Ile elementów ma zbiór $P(n)$, gdzie n jest liczbą naturalną?

3.5. Ile elementów ma zbiór $m \times n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi?

3.6. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$,

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \dots (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup (A_1 \cap \dots \cap A_n).$$