

1 Zbiory i operacje na zbiorach

Teorię mnogości, czyli teorię zbiorów, buduje się w oparciu o pojęcia pierwotne: *zbiór* oraz związek $\in$ “*być elementem*”. Napis $x \in A$ czytamy: “ x należy do A ”. Pojęcia pierwotne oznaczają kategorię pojęć, których się nie definiuje. Ponadto przyjmuje się pewien zestaw własności dotyczących tych pojęć zwanych *aksjomatami*. Aksjomaty są własnościami, które przyjmuje się bez dowodu. Cały taki zestaw nazywa się *aksjomatyczną teorią*. W zależności od tego jakie przyjmuje się pojęcia i własności pierwotne — możemy mieć różne teorie aksjomatyczne dotyczące tego samego działu matematyki. Nasze wprowadzenie do teorii mnogości będzie się opierać na znanej aksjomatyce *Zermelo-Fraenkla*. Nie będziemy jednak w jawny sposób odwoływać się do aksjomatów teorii mnogości.²

Do porównywania zbiorów służy następująca zasada *ekstensjonalności*:

$$A = B \text{ wtw, gdy dla każdego } x, (x \in A \text{ wtw, gdy } x \in B).$$

Tak więc dwa zbiory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy. Mówimy, że zbiór A jest *zawarty* w zbiorze B (oznaczamy $A \subseteq B$), gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B . Gdy $A \subseteq B$, to mówimy też, że A jest *podzbiorem* B . Zasadę ekstensjonalności można wyrazić przy pomocy zawierania:

$$A = B \text{ wtw, gdy } A \subseteq B \text{ oraz } B \subseteq A.$$

Ważnym przykładem zbioru jest zbiór nie mający żadnych elementów — *zbiór pusty*. Oznaczamy go przez $\emptyset$. Na mocy zasady ekstensjonalności istnieje co najwyżej jeden zbiór pusty.³ Zbiory mające skończoną liczbę elementów możemy definiować przez wymienienie tych elementów. Na przykład, zbiór $\{a, b, 0\}$ składa się z trzech elementów: a, b oraz 0 , zakładając, że $a, b, 0$ są trzema różnymi obiektami. Jeśli $\varphi(x)$ jest pewną własnością⁴ zależną od x oraz A jest zbiorem, to napis $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ oznacza zbiór wszystkich tych elementów x ze zbioru A , które spełniają własność φ .

Następnie zdefiniujemy pewne operacje na zbiorach. Niech A, B będą zbiorami. *Sumą* zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \cup B$, którego elementami są te i tylko te obiekty, które są elementami A lub elementami B . *Przecięciem* zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \cap B$, którego elementami są te i tylko te obiekty, które są jednocześnie elementami A i B . *Różnicą* zbiorów A i B nazywamy zbiór $A - B$, którego elementami są te elementy zbioru A , które nie należą do B . *Zbiorem potęgowym* zbioru A nazywamy zbiór $P(A)$, którego elementami są wszystkie podzbiory zbioru A .

²Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do książki K. Kuratowski, A Mostowski “*Teoria Mnogości*”, PWN, Warszawa, 1978.

³Istnienie zbioru pustego trzeba postulować aksjomatem.

⁴Obecne wprowadzenie jest intuicyjne — nie będziemy formalnie definiować pojęcia własności.

Działania sumy i przecięcia są operacjami dwuargumentowymi. Można łatwo uogólnić te operacje na dowolne rodziny zbiorów. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną zbiorów. Sumą tej rodziny nazwiemy zbiór $\bigcup \mathcal{A}$, taki że dla dowolnego elementu x ,

$$x \in \bigcup \mathcal{A} \text{ wtw, gdy istnieje } A \in \mathcal{A}, \text{ taki że } x \in A.$$

Dualnie definiujemy *przecięcie* rodziny $\mathcal{A}$, o ile $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Jest to zbiór $\bigcap \mathcal{A}$, taki że dla dowolnego elementu x ,

$$x \in \bigcap \mathcal{A} \text{ wtw, gdy dla każdego } A \in \mathcal{A}, \text{ zachodzi } x \in A.$$

Dla przykładu, pokażemy dwie tożsamości algebry zbiorów.

Fakt 1.1

$$(i) \quad A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C).$$

$$(ii) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Dowód: Dla dowodu równości pokażemy dwa zawierania: $A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C)$ oraz $(A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cup C)$. Aby pokazać, że $A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C)$ należy dowieść, że każdy element zbioru $A - (B \cup C)$ należy do $(A - B) \cap (A - C)$. Weźmy więc dowolny element $x \in A - (B \cup C)$. Oznacza to, że $x \in A$ oraz $x \notin B \cup C$. Zatem $x \notin B$ oraz $x \notin C$. Tak więc $x \in A$ oraz $x \notin B$, czyli $x \in A - B$. Podobnie, $x \in A - C$. Łącznie dostajemy $x \in (A - B) \cap (A - C)$. Wobec dowolności wyboru elementu x udowodniliśmy zawieranie

$$A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C). \quad (1)$$

Zawieranie w stronę przeciwną pokazujemy w podobny sposób. Jeśli $x \in (A - B) \cap (A - C)$ to $x \in A$ oraz $x \notin B$ i $x \notin C$. Zatem $x \notin B \cup C$ i dostajemy $x \in A - (B \cup C)$. Wobec dowolności wyboru x mamy dowód zawierania

$$(A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cup C). \quad (2)$$

Zawierania (1) i (2) dają dowód pierwszej części Faktu 1.1.

Powyższe rozumowanie można skrócić zauważając, że wszystkie kroki w dowodzie pierwszego zawierania dają się odwrócić, a tym samym dają dowód równości. Zilustrujemy to na przykładzie dowodu drugiej części faktu.

Niech x będzie dowolnym elementem. Wtedy następujące zdania są równoważne.

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

$$x \in A \text{ oraz } (x \in B \text{ lub } x \in C)$$

$$(x \in A \text{ oraz } x \in B) \text{ lub } (x \in A \text{ oraz } x \in C)$$

$$x \in (A \cap B) \text{ lub } x \in (A \cap C)$$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Równoważność powyższych pięciu zdań wynika z wprost z definicji operacji $\cap$ i $\cup$ oraz z własności *spójników logicznych* “i” oraz “lub”. ■

Poniżej podamy rozwiązania dwóch przykładowych zadań.

Przykład 1.2

- (i) Sprawdźmy czy równość $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ zachodzi dla dowolnych zbiorów A, B, C . Niech x będzie dowolnym obiektem. Pisząc warunki opisujące należenie x do lewej i do prawej strony powyższej równości łatwo jest stwierdzić, że równoważność nie będzie zachodziła w sytuacji gdy x nie będzie należał do A oraz będzie należał do C . Rzeczywiście, dla zbiorów $A = B = \emptyset$ oraz $C = \{5\}$ powyższa równość nie zachodzi.
- (ii) Sprawdźmy dla jakich zbiorów A, B , zachodzi $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$. Zauważmy, że jeśli istnieją elementy $a \in A - B$ oraz $b \in B - A$, to $\{a, b\} \in P(A \cup B)$, ale $\{a, b\}$ nie należy ani do $P(A)$ ani do $P(B)$. Czyli jeśli $A - B \neq \emptyset$ oraz $B - A \neq \emptyset$, to $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$. Z drugiej strony, jeśli $A - B = \emptyset$ to $A \subseteq B$ i wtedy mamy $P(A) \subseteq P(B)$ oraz $P(A \cup B) = P(B) = P(A) \cup P(B)$. Podobnie pokazujemy równość gdy $B - A = \emptyset$. Zatem $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ wtw, gdy $A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$.

Chcielibyśmy podkreślić, że aby dowieść że pewna równość jest prawem rachunku zbiorów trzeba ją udowodnić dla dowolnych zbiorów. Natomiast aby pokazać, że pewna równość nie jest prawem rachunku zbiorów wystarczy pokazać, że nie zachodzi ona dla pewnych konkretnych zbiorów. Wystarczy tu podać konkretny zestaw zbiorów, nie siląc się na ogólność. Im prostsze zbiory wybierzemy na kontrprzykład tym lepiej.

Zadania

- 1.1. Dowieść, że dla dowolnych zbiorów A, B , jeśli $A - B = B - A$, to $A = B$.
- 1.2. Dowieść, że dla dowolnych zbiorów A, B , jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \subseteq P(B)$.

1.3. Czy dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$?

1.4. Wyznaczyć wszystkie zbiory A, B, C takie, że $(A - C) \cup B = (A \cup B) - C$.

1.5. Niech A będzie rodziną zbiorów. Dowieść, że

$$A \subseteq P(A) \quad \text{wtw, gdy} \quad \bigcup A \subseteq A$$

1.6. Która z implikacji w poniższej równoważności jest prawdziwa dla dowolnej rodziny zbiorów A ?

$$P(A) \subseteq A \quad \text{wtw, gdy} \quad A \subseteq \bigcup A$$

1.7. Dowieść, że dla każdego zbioru A zachodzi $\bigcup P(A) = A$.

1.8. Niech A, B będą dowolnymi rodzinami zbiorów. Dowieść, że $\bigcup(A \cup B) = (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$. Czy równość $\bigcup(A \cap B) = (\bigcup A) \cap (\bigcup B)$ zachodzi?

1.9. Dowieść, że każdy zbiór jest sumą wszystkich swoich skończonych podzbiorów.

2 Relacje

Parą uporządkowaną o współrzędnych a i b nazywamy obiekt $\langle a, b \rangle$, jednoznacznie wyznaczony przez a , b oraz ich kolejność wystąpienia. Tak więc podstawową cechą pary uporządkowanej wynikającą wprost z powyższej definicji jest następująca własność. Dla dowolnych obiektów a, b, c, d

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \quad \text{wtw, gdy} \quad a = c \text{ oraz } b = d. \quad (3)$$

Następujące twierdzenie pokazuje, że definicję pary uporządkowanej można oprzeć na konstrukcji teoriomnogościowej.

Fakt 2.1 Dla dowolnych a, b, c, d ,

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \quad \text{wtw, gdy } a = c \text{ oraz } b = d.$$

Dowód: Implikacja z prawej strony w lewą jest oczywista. Załóżmy, że

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

Jeśli $a = b$, to zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ ma jeden element, a zatem zbiór po prawej stronie równości też musi mieć jeden element czyli $a = b = c = d$.

Założmy więc, że $a \neq b$. Wtedy zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ ma dwa elementy. Zatem $c \neq d$. Ponieważ $\{a\}$ jest jedynym jednoelementowym zbiorem po lewej stronie więc musi on być równy jednemu zbiorowi jednoelementowemu po prawej stronie. Zatem

$$\{a\} = \{c\} \quad \text{oraz} \quad \{a, b\} = \{c, d\},$$

skąd natychmiast otrzymujemy $a = c$ oraz $b = d$. ■

Konstrukcji spełniających własność (3) jest wiele. Zwykle nie będziemy się odwoływać do konkretnej konstrukcji pary uporządkowanej bowiem zwykle własności pary wynikają już bezpośrednio z (3) i nie zależą od specyficznej konstrukcji. Przykładem własności zależącej od konkretnej konstrukcji pary z powyższego twierdzenia jest $a \in \bigcup \langle a, b \rangle$.

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A, B nazywamy zbiór $A \times B$, którego elementami są wszystkie pary uporządkowane $\langle a, b \rangle$, takie że $a \in A$ oraz $b \in B$. Iloczyn $A \times A$ oznaczamy przez A^2 . Podzbiory zbioru $A \times B$ nazywamy *relacjami* w $A \times B$. Podzbiory zbioru A^2 nazywamy *relacjami binarnymi* w A . Jeśli $R \subseteq A \times B$ jest relacją to notacja aRb oznacza $\langle a, b \rangle \in R$. Podamy kilka przykładów relacji.

Przykład 2.2

- (i) (*Identyczność*) Niech A będzie zbiorem, $I_A = \{\langle a, a \rangle \in A \times A \mid a \in A\}$.
- (ii) Niech R oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Zwykle uporządkowanie zbioru R wyznacza relację $\leq = \{\langle r_1, r_2 \rangle \in R \times R \mid r_1 \leq r_2\}$.
- (iii) Zbiór $P = \{\langle k, m \rangle \in N \times N \mid k = m^2\}$ jest binarną relacją w zbiorze N wszystkich liczb naturalnych.
- (iv) Zbiór $Q = \{\langle k, m \rangle \in N \times Z \mid k = m^2\}$ jest relacją w $N \times Z$, gdzie Z oznacza zbiór wszystkich liczb całkowitych.

Niech $n > 0$ będzie liczbą naturalną. Powyższe definicje można łatwo uogólnić na przypadek gdy współrzędnych jest n . Uporządkowaną n -tką o współrzędnych $a_1, \dots, a_n$ nazwiemy obiekt $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ wyznaczony jednoznacznie przez swoje współrzędne oraz kolejność ich występowania. Zatem w tym przypadku mamy następującą cechę n -tek uporządkowanych. Dla dowolnych obiektów $a_1, \dots, a_n$ oraz $b_1, \dots, b_n$,

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \text{ wtw, gdy } a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n.$$

Podobnie jak w przypadku par uporządkowanych nie będziemy wnikać w strukturę wewnętrzną n -tek uporządkowanych. Używając konstrukcji pary można n -tkę uporządkowaną zdefiniować na przykład następująco.

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_1, \langle a_2, \dots, \langle a_{n-1}, a_n \rangle \dots \rangle \rangle.$$

Iloczynem kartezjańskim zbiorów $A_1, \dots, A_n$ nazywamy zbiór $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ wszystkich n -tek uporządkowanych $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ takich, że $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$. Iloczyn kartezjański n -krotny zbioru A ze sobą oznaczamy przez A^n . Relacją w $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ nazywamy dowolny podzbiór tego zbioru. Relacją n -argumentową w zbiorze A nazywamy dowolny podzbiór zbioru A^n .

Niech $R \subseteq A \times B$, oraz $S \subseteq B \times C$ będą relacjami. *Złożeniem* relacji R i S nazwiemy relację⁵

$$SR = \{\langle a, c \rangle \in A \times C \mid \text{istnieje } b \in B \text{ taki, że } \langle a, b \rangle \in R \text{ oraz } \langle b, c \rangle \in S\}.$$

Relacją odwrotną do R nazwiemy relację $R^{-1} \subseteq B \times A$,

$$R^{-1} = \{\langle b, a \rangle \in B \times A \mid \langle a, b \rangle \in R\}.$$

⁵Kolejność relacji występująca w złożeniu jest być może niezgodna z intuicją czytelnika. Taka kolejność jest podyktowana tym, że funkcje są szczególnym przypadkiem relacji, a składanie funkcji historycznie oznacza się właśnie w tej kolejności. Niektórzy autorzy oznaczają złożenie relacji w odwrotnym porządku, tzn. RS . Dla uniknięcia sytuacji, w której będziemy zmuszeni mieć do czynienia z dwoma operacjami składania relacji: jako ogólnych relacji i jako funkcji—zdecydowaliśmy się wprowadzić od początku odwrotną kolejność składania dla dowolnych relacji.

Twierdzenie 2.3 Niech $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, oraz $T \subseteq C \times D$. Wtedy

$$(i) \quad T(SR) = (TS)R.$$

$$(ii) \quad (SR)^{-1} = R^{-1}S^{-1}.$$

Dowód: Udowodnimy najpierw (i). Niech $\langle a, d \rangle \in T(SR)$. Zachodzą następujące równości.

$$\langle a, d \rangle \in T(SR) \quad \text{wtw, gdy}$$

$$\text{istnieje } c \in C, \quad \text{takie że } \langle a, c \rangle \in SR \quad \text{oraz } \langle c, d \rangle \in T, \quad \text{wtw, gdy}$$

$$\text{istnieją } c \in C \text{ oraz } b \in B, \quad \text{takie że } \langle a, b \rangle \in R \text{ oraz } \langle b, c \rangle \in S \text{ oraz } \langle c, d \rangle \in T, \quad \text{wtw, gdy}$$

$$\text{istnieje } b \in B, \quad \text{takie że } \langle a, b \rangle \in R \text{ oraz } \langle b, d \rangle \in TS, \quad \text{wtw, gdy}$$

$$\langle a, d \rangle \in (TS)R$$

Dla dowodu (ii) weźmy dowolną parę $\langle c, a \rangle \in C \times A$. Wtedy

$$\langle c, a \rangle \in (SR)^{-1} \quad \text{wtw, gdy}$$

$$\langle a, c \rangle \in SR \quad \text{wtw, gdy}$$

$$\text{istnieje } b \in B \text{ takie, że } \langle a, b \rangle \in R \text{ oraz } \langle b, c \rangle \in S, \quad \text{wtw, gdy}$$

$$\text{istnieje } b \in B \text{ takie, że } \langle b, a \rangle \in R^{-1} \text{ oraz } \langle c, b \rangle \in S^{-1}, \quad \text{wtw, gdy}$$

$$\langle c, a \rangle \in R^{-1}S^{-1}$$

■

Zadania

2.1. Dla każdego z poniższych warunków sprawdzić czy istnieje relacja $R \subseteq N \times N$, gdzie N oznacza zbiór liczb naturalnych, spełniająca

a.) $R^{-1} \not\subseteq R$.

b.) $R \neq \emptyset$, $RR = R$ oraz $R \cap I_N = \emptyset$.

c.) $R^{-1} = N^2 - R$.

2.2. Niech $\mathcal{R}$ będzie niepustą rodziną relacji w $A \times B$ i niech $S \subseteq B \times C$. Dowieść

a.) $S(\bigcup \mathcal{R}) = \bigcup \{SR \mid R \in \mathcal{R}\}$.

b.) $S(\bigcap \mathcal{R}) \subseteq \bigcap \{SR \mid R \in \mathcal{R}\}$. Czy zawieranie można zastąpić równością?

c.) $(\bigcup \mathcal{R})^{-1} = \bigcup \{R^{-1} \mid R \in \mathcal{R}\}$.

d.) $(\bigcap \mathcal{R})^{-1} = \bigcap \{R^{-1} \mid R \in \mathcal{R}\}$.