

6 Teoria mocy

Powiemy, że zbiory A, B są *równoliczne* (oznaczamy $A \sim B$), gdy istnieje bijekcja $f : A \rightarrow B$.

Przykład 6.1

- (i) $N \times N \sim N$, gdzie bijekcją $f : N \times N \rightarrow N$ jest funkcja określona w przykładzie 4.2 (5).
- (ii) N jest równoliczny ze zbiorem liczb parzystych Par , funkcją ustalającą równoliczność jest $f(n) = 2n$.
- (iii) Niech $a < b$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, wtedy odcinek otwarty (a, b) jest równoliczny z odcinkiem otwartym $(0, 1)$, gdzie bijekcją $f : (a, b) \rightarrow (0, 1)$ jest funkcja $f(x) = \frac{(x-a)}{(b-a)}$.
- (iv) Funkcja $\arctan$ ustala równoliczność odcinka otwartego $(-\pi/2, \pi/2)$ ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.
- (v) Dla każdego zbioru A , zbiór potęgowy $P(A)$ jest równoliczny z $\{0, 1\}^A$. Funkcją ustalającą równoliczność jest $\varphi : P(A) \rightarrow \{0, 1\}^A$ zdefiniowana następująco. Dla $X \in P(A)$, niech $\varphi(X) : A \rightarrow \{0, 1\}$ będzie funkcją *charakterystyczną* zbioru X zdefiniowaną następująco

$$\varphi(X)(a) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } a \in X \\ 0, & \text{jeśli } a \notin X. \end{cases}$$

Pozostawimy czytelnikowi jako ćwiczenie sprawdzenie, że φ jest istotnie bijekcją.

Następujące twierdzenie pokazuje, że $\sim$ zachowuje się jak relacja równoważności.⁶

Fakt 6.2 Dla dowolnych zbiorów A, B, C ,

- (i) $A \sim A$.
- (ii) Jeśli $A \sim B$, to $B \sim A$.
- (iii) Jeśli $A \sim B$ oraz $B \sim C$, to $A \sim C$.

⁶Ponieważ, jak się okaże w tym rozdziale, klasa wszystkich zbiorów nie jest zbiorem to $\sim$, z formalnego punktu widzenia, nie jest relacją.

Dowód: Pierwszy punkt wynika z tego, że $I_A : A \rightarrow A$ jest bijekcją. Drugi wynika z tego, że jeśli $f : A \rightarrow B$ jest bijekcją to $f^{-1} : B \rightarrow A$ jest też bijekcją (zob. Twierdzenie 4.4). Wreszcie trzeci punkt wynika z tego, że złożenie bijekcji jest bijekcją. ■

Zakładamy, że każdemu zbiorowi A możemy przyporządkować taki obiekt $|A|$, że dla dowolnych zbiorów A, B obiekty im przyporządkowane są równe wtedy i tylko wtedy, gdy te zbiory są równoliczne, tzn.

$$A \sim B \quad \text{wtw, gdy} \quad |A| = |B|. \quad (17)$$

Obiekt $|A|$ nazywamy *mocą* zbioru A . Zatem o mocy danego zbioru można myśleć jak o klasie wszystkich zbiorów równolicznych z tym zbiorem. W teorii mnogości tak można zdefiniować przyporządkowanie każdemu zbiorowi jego mocy, że moce są też zbiorami.⁷ Moce zbiorów są też nazywane *liczbami kardynalnymi*.

Powiemy, że zbiór A jest *skończony*, gdy istnieje $n \in N$ takie, że $A \sim n$. W tym przypadku mówimy, że A ma n elementów. Przyjmujemy, że moc zbioru n elementowego jest n . Zbiór, który nie jest skończony nazwiemy zbiorem *nieskończonym*.

Poniższe twierdzenie mówi, że przyporządkowanie zbiorom skończonym jako mocy liczby elementów tych zbiorów jest poprawne, tzn. (17) jest spełnione. Moc zbioru liczb naturalnych oznaczamy symbolem $\aleph_0$ (alef zero).

Twierdzenie 6.3

- (i) Dla każdego $n \in N$, nie istnieje funkcja różnowartościowa z $n \cup \{n\}$ w n .
- (ii) Dla $m, n \in N$, jeśli $m \sim n$, to $m = n$.
- (iii) żadna liczba naturalna nie jest równoliczna z N , a zatem N jest nieskończony.

Dowód: Zaczniemy od dowodu (i). Dowód jest przez indukcję. Dla $n = 0$ teza oczywiście zachodzi, bo nie istnieje funkcja ze zbioru niepustego w $\emptyset$. Załóżmy, że teza zachodzi dla n i niech

$$f : n \cup \{n\} \cup \{n'\} \rightarrow n \cup \{n\}$$

będzie funkcją różnowartościową. Jeśli f nie przyjmuje wartości n , lub jeśli $f(n') = n$, to obcinając f do zbioru $n \cup \{n\}$ (czyli biorąc funkcję $f \cap (n' \times n')$) dostaniemy funkcję różnowartościową z $n \cup \{n\}$ w n , co daje sprzeczność z założeniem indukcyjnym. Jeśli natomiast $f(i) = n$, dla pewnego $i \leq n$, to niech j będzie wartością f na elemencie n' .

⁷Klasa wszystkich zbiorów równolicznych danemu zbiorowi A nie jest zbiorem, o ile $A \neq \emptyset$.

Ponieważ f jest różnowartościowa, to $j < n$. Wówczas funkcja $g : n \cup \{n\} \rightarrow n$ zdefiniowana wzorem

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jeśli } x \neq i \\ j, & \text{jeśli } x = i \end{cases}$$

jest funkcją różnowartościową (łatwy dowód pozostawiamy czytelnikowi). Otrzymana sprzeczność dowodzi, że f nie może być różnowartościowa. To kończy dowód (i).

Dla dowodu (ii) pokażemy indukcyjnie dla $m, n \in N$, że

$$\text{jeśli istnieje różnowartościowa funkcja z } m \text{ w } n, \text{ to } m \subseteq n. \quad (18)$$

Indukcje prowadzimy ze względu na m . Dla $m = 0$ teza jest oczywista. Załóżmy więc, że (18) zachodzi i niech $f : m' \rightarrow n$ będzie funkcją różnowartościową. Ponieważ $m \subseteq m'$, to istnieje funkcja różnowartościowa z m w n , a zatem, na mocy założenia indukcyjnego, $m \subseteq n$. Przypadek $m = n$ na mocy poprzedniego punktu jest niemożliwy. Zatem $m \neq n$ i korzystając z Twierdzenia 3.3 (iv) dostajemy $m \in n$. Zatem $m' = m \cup \{m\} \subseteq n$, co kończy dowód (18). Zauważmy, że (ii) wynika natychmiast z (18).

Ostatnia część twierdzenia wynika bezpośrednio z pierwszej, bowiem jeśli $f : N \rightarrow n$ jest funkcją różnowartościową, to jej obcięcie do $n \cup \{n\}$ dawałoby funkcję różnowartościową z $n \cup \{n\}$ w n , co przeczy (i). ■

6.1 Zbiory przeliczalne

Zbiór A nazwiemy *przeliczalnym* gdy A jest skończony lub równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Poniższe twierdzenie charakteryzuje zbiory przeliczalne jako te, które można ustawić w ciąg.

Twierdzenie 6.4 *Zbiór A jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \emptyset$ lub istnieje funkcja z N na A .*

Dowód: Implikacja z lewej w prawo jest oczywista. Udowodnimy implikację odwrotną. Ponieważ każdy skończony zbiór jest przeliczalny, to przyjmijmy, że istnieje funkcja f z N na A oraz, że A jest nieskończony. Zdefiniujemy nową funkcję $g : N \rightarrow A$, która będzie poprawioną wersją funkcji f . Funkcję g definiujemy przez indukcję (zob. Twierdzenie 4.11). Niech $g(0) = f(0)$. Dalej, niech $g(n') = f(k)$, gdzie k jest najmniejszą liczbą o tej własności, że

$$f(k) \notin \{g(0), \dots, g(n)\}$$

Liczba k o powyższych własnościach istnieje bo A jest nieskończony. Natomiast istnienie najmniejszej liczby o powyższej własności wynika z Zasady Minimum (zob. Twierdzenie 3.2).

Polecamy czytelnikowi jako ćwiczenie określenie funkcji h z Twierdzenia 4.11 dla powyższej indukcyjnej definicji.

Pokażemy, że g jest bijekcją. Najpierw pokażemy, że

$$\text{dla każdego } k \text{ istnieje } n \text{ takie, że } f(k) = g(n). \quad (19)$$

Udowodnimy to przez indukcję względem k . Dla $k = 0$ wynika to z definicji g w 0. Weźmy $k > 0$. Jeśli dla pewnego $m \leq k$ mamy $f(m) = f(k)$, to stosując założenie indukcyjne do m otrzymujemy n takie, że $f(m) = g(n)$. Oczywiście jest to szukane n dla k . W przeciwnym przypadku wiemy, że dla wszystkich $m < k$ zachodzi $f(k) \neq f(m)$. Z założenia indukcyjnego wynika, że dla każdego $m < k$ istnieje n_m takie, że $f(m) = g(n_m)$. Niech n będzie największą liczbą w zbiorze $\{n_m \mid m < k\}$. Istnienie takiej liczby wynika z Twierdzenia 3.4. Z konstrukcji funkcji g wynika, że $\{f(m) \mid m < k\} = \{g(0), g(1), \dots, g(n)\}$ oraz że $g(n') = f(k)$. Zatem n' jest liczbą odpowiadającą k . To kończy dowód (19). Niech $a \in A$ będzie dowolnym elementem. Ponieważ f jest na A to istnieje k takie, że $f(k) = a$. Zatem, na mocy (19), istnieje n takie, że $g(n) = a$. Oznacza to, że g jest na A .

Dla dowodu różnowartościowości g zauważmy, że

$$\text{dla każdego } n, g(n) \notin \{g(i) \mid i < n\}. \quad (20)$$

Dla $n = 0$ (20) oczywiście zachodzi. Natomiast dla $n > 0$ wynika on natychmiast z definicji g .

Zatem g jest różnowartościowa i na A , co oznacza, że $N \sim A$, czyli A jest zbiorem przeliczalnym. To kończy dowód twierdzenia. ■

Następujące twierdzenie wymienia operacje na zbiorach, które zachowują klasę zbiorów przeliczalnych.

Twierdzenie 6.5

- (i) *Podzbiór zbioru przeliczalnego jest przeliczalny.*
- (ii) *Jeśli $f : A \rightarrow B$ jest dowolną funkcją oraz $X \subseteq A$ jest zbiorem przeliczalnym, to obraz $\vec{f}(X)$ jest też zbiorem przeliczalnym.*
- (iii) *Jeśli A, B są przeliczalne, to $A \times B$ jest też przeliczalny.*
- (iv) *Jeśli $\{A_i \mid i \in I\}$ jest przeliczalną rodziną zbiorów przeliczalnych (tzn. I jest przeliczalny oraz każde A_i jest zbiorem przeliczalnym), to $\bigcup_{i \in I} A_i$ jest też zbiorem przeliczalnym.*

Dowód: Niech A będzie niepustym zbiorem przeliczalnym oraz niech $B \subseteq A$ będzie niepustym podzbiorem. Na mocy Twierdzenia 6.4 istnieje funkcja f z N na A . Niech $b_0 \in B$. Definiujemy funkcję $g : A \rightarrow B$ następująco

$$g(b) = \begin{cases} b & \text{jeśli } b \in B, \\ b_0 & \text{jeśli } b \notin B. \end{cases}$$

Oczywiście g jest na B a zatem gf jest funkcją z N na B więc na mocy Twierdzenia 6.4, B jest zbiorem przeliczalnym. To dowodzi (i).

Dla dowodu drugiego punktu niech $f : A \rightarrow B$ będzie dowolną funkcją i niech $X \subseteq A$ będzie zbiorem przeliczalnym. Jeśli $X = \emptyset$, to $\vec{f}(X) = \emptyset$ jest zbiorem przeliczalnym. Jeśli $X \neq \emptyset$, to z Twierdzenia 6.4 wynika, że istnieje funkcja $g : N \rightarrow X$ na X . Niech $f' : X \rightarrow \vec{f}(X)$ będzie ograniczeniem f do X , tzn. niech $f' = f \cap (X \times B)$. Oczywiście f' jest na $\vec{f}(X)$ i złożenie $(f'g) : N \rightarrow \vec{f}(X)$ jest też funkcją na $\vec{f}(X)$. Korzystając ponownie z Twierdzenia 6.4 wnioskujemy, że $\vec{f}(X)$ jest zbiorem przeliczalnym.

Udowodnimy teraz (iii). Jeśli A lub B jest zbiorem pustym, to $A \times B$ jest też zbiorem pustym, a więc przeliczalnym. Załóżmy więc, że $A \neq \emptyset \neq B$ i niech $f : N \rightarrow A$ oraz $g : N \rightarrow B$ będą funkcjami, odpowiednio na A oraz na B . Definiujemy funkcję $h : N \times N \rightarrow A \times B$ wzorem $h(m, n) = \langle f(m), g(n) \rangle$. Oczywiście h jest funkcją na $A \times B$. Zatem $A \times B$ jest zbiorem przeliczalnym jako obraz zbioru przeliczalnego (zob. (ii) oraz Przykład 6.1 (i)).

Dla dowodu (iv) weźmy przeliczalną rodzinę $\{A_i \mid i \in I\}$ zbiorów przeliczalnych. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że zbiór indeksów I oraz wszystkie zbiory A_i są niepuste. Niech $f : N \rightarrow I$ będzie na I oraz dla każdego $i \in I$ niech $g_i : N \rightarrow A_i$ będzie na A_i . Definiujemy funkcję $h : N \times N \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ wzorem $h(m, n) = g_{f(m)}(n)$. Funkcja h jest na $\bigcup_{i \in I} A_i$ bowiem jeśli $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ to istnieje $i \in I$ takie, że $a \in A_i$. Istnieją wówczas $m, n \in N$ takie, że $f(m) = i$ (bo f jest na I) oraz $g_i(n) = a$ (bo g_i jest na A_i). Zatem

$$h(m, n) = g_{f(m)}(n) = g_i(n) = a,$$

co pokazuje, że h jest na $\bigcup_{i \in I} A_i$. Zatem $\bigcup_{i \in I} A_i$ jest zbiorem przeliczalnym, jako obraz zbioru przeliczalnego (zob. (ii)). To kończy dowód twierdzenia. ■

Przykład 6.6

- (i) Zbiór Z liczb całkowitych można przedstawić jako sumę zbioru liczb naturalnych oraz zbioru liczb całkowitych ujemnych. Ponieważ ten drugi zbiór jest przeliczalny, to całość też.
- (ii) Zbiór Q liczb wymiernych można przedstawić jako podzbiór produktu $Z \times N$, a zatem jest przeliczalny.

- (iii) Jeśli A jest zbiorem przeliczalnym, to dla każdego $n \in N$, zbiór A^n wszystkich funkcji z n w A jest zbiorem przeliczalnym. Zatem zbiór $A^* = \bigcup \{A^n \mid n \in N\}$ wszystkich słów skończonych nad A jest zbiorem przeliczalnym.

6.2 Zbiory nieprzeliczone

Twierdzenie 6.7 (Cantor)

Dla żadnego zbioru A , nie istnieje funkcja z A na zbiór potęgowy $P(A)$.

Dowód: Załóżmy, że $f : A \rightarrow P(A)$ jest funkcją na $P(A)$. Niech

$$A_0 = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}.$$

Ponieważ f jest na $P(A)$, to istnieje $a_0 \in A$ taki, że $f(a_0) = A_0$. Tak więc

$$a_0 \in A_0 \text{ wtw, gdy } a_0 \in f(a_0).$$

Innymi słowy,

$$a_0 \in A_0 \text{ wtw, gdy } a_0 \notin A_0.$$

Otrzymana w ten sposób sprzeczność dowodzi, że f nie może być na $P(A)$, co dowodzi twierdzenie. ■

Wniosek 6.8

- (i) Zbiór potęgowy $P(A)$ nie jest równoliczny z żadnym podzbiorem zbioru A .
- (ii) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych oraz zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach 0,1 są zbiorami nieprzeliczalnymi (zob. Przykład 6.1 (v)).
- (iii) Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

Dowód: Udowodnimy tylko ostatnią część wniosku. Pozostałe części wynikają natychmiast z Twierdzenia 6.7. Gdyby A był zbiorem wszystkich zbiorów, to każdy podzbiór A , będąc zbiorem, należałby do A . Zatem $P(A) \subseteq A$. Wówczas $P(A)$ byłby równoliczny z pewnym podzbiorem A , co daje sprzeczność z pierwszą częścią tego wniosku. ■

Moc zbioru $P(N)$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych nazywamy *continuum* i oznaczamy przez $\mathfrak{c}$.

6.3 Porównywanie liczb kardynalnych

Powiemy, że moc zbioru A jest *mniej* lub *równa* mocy zbioru B , oznaczamy to przez $|A| \leq |B|$, gdy istnieje funkcja różnowartościowa z A w B . Zauważmy, że powyższa definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru reprezentantów A i B .

Lemat 6.9 *Jeśli $A \sim A'$ oraz $B \sim B'$, to istnieje funkcja różnowartościowa z A w B wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja różnowartościowa z A' w B' .*

Dowód: Niech $\varphi : A \rightarrow A'$ oraz $\psi : B \rightarrow B'$ będą bijekcjami. Wówczas, jeśli $f : A' \rightarrow B'$ jest funkcją różnowartościową, to $\psi f \varphi^{-1} : A \rightarrow B$ jest też funkcją różnowartościową. Podobnie, jeśli $g : A' \rightarrow B'$ jest funkcją różnowartościową, to $\psi^{-1} g \varphi : A \rightarrow B$ jest też funkcją różnowartościową. ■

Powiemy, że moc zbioru A jest *mniej* od mocy B (oznaczamy to przez $|A| < |B|$), gdy $|A| \leq |B|$ oraz $|B| \not\leq |A|$.

Twierdzenie 6.10 (Lemat Banacha)

Dla dowolnych funkcji $f : A \rightarrow B$ oraz $g : B \rightarrow A$, istnieją zbiory $A_1, A_2 \subseteq A$ oraz $B_1, B_2 \subseteq B$, takie, że

- (i) $A_1 \cup A_2 = A, A_1 \cap A_2 = \emptyset$,
- (ii) $B_1 \cup B_2 = B, B_1 \cap B_2 = \emptyset$,
- (iii) $\vec{f}(A_1) = B_1$,
- (iv) $\vec{g}(B_2) = A_2$.

Lemat Banacha będzie udowodniony w dalszej części notatek (zob. Przykład 7.25) — jego dowód będzie wykorzystywał metodę punktu stałego. Lemat Banacha będzie użyty w dowodzie następnego twierdzenia zwanego twierdzeniem Cantora-Bernsteina. Najpierw udowodnimy jeszcze pewien lemat.

Lemat 6.11 *Jeśli $A \sim A', B \sim B'$ oraz $A \cap B = \emptyset$ i $A' \cap B' = \emptyset$, to $A \cup B \sim A' \cup B'$.*

Dowód: Jeśli $f : A \rightarrow A'$ oraz $g : B \rightarrow B'$ są bijekcjami, to $f \cup g$ jest bijekcją ustalającą równoliczność $A \cup B \sim A' \cup B'$. Fakt, że $f \cup g$ jest funkcją wynika z tego, że $A \cap B = \emptyset$. Natomiast to, że jest ona funkcją różnowartościową wynika z $A' \cap B' = \emptyset$. ■

Czytelnik z łatwością znajdzie przykład świadczący o tym, że założenia o pustości przecięcia A i B oraz A' i B' są istotne dla Lematu 6.11.

Twierdzenie 6.12 Dla dowolnych zbiorów A, B, C ,

$$(i) |A| \leq |A|,$$

$$(ii) \text{ Jeśli } |A| \leq |B| \text{ oraz } |B| \leq |C|, \text{ to } |A| \leq |C|,$$

$$(iii) \text{ (Twierdzenie Cantora-Bernsteina) Jeśli } |A| \leq |B| \text{ oraz } |B| \leq |A|, \text{ to } |A| = |B|.$$

Dowód: Pierwsze dwie części są zupełnie oczywiste. Udowodnimy tylko trzecią część. Niech $f : A \rightarrow B$ oraz $g : B \rightarrow A$ będą funkcjami różnowartościowymi. Zastosujmy Lemat Banacha otrzymując rozbicia $A_1, A_2 \subseteq A$ oraz $B_1, B_2 \subseteq B$ takie, że

$$A_1 \cup A_2 = A, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad (21)$$

$$B_1 \cup B_2 = B, \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset \quad (22)$$

$$\vec{f}(A_1) = B_1 \quad (23)$$

$$\vec{g}(B_2) = A_2 \quad (24)$$

Z (23) wynika, że $A_1 \sim B_1$, natomiast z (24) wynika $A_2 \sim B_2$. Zatem z (21), (22) oraz z Lematu 6.11 wynika, że $A \sim B$, co kończy dowód twierdzenia. ■

Twierdzenie Cantora-Bernsteina jest bardzo pożyteczne przy wyznaczaniu mocy zbiorów. Zilustrujemy to na jednym przykładzie.

Twierdzenie 6.13 Zbiór liczb rzeczywistych jest równoliczny ze zbiorem $\{0, 1\}^N$, a zatem jest zbiorem mocy continuum.

Dowód: Najpierw pokażemy, że $|\{0, 1\}^N| \leq |R|$. Niech $\varphi : \{0, 1\}^N \rightarrow R$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco dla $f : N \rightarrow \{0, 1\}$,

$$\varphi(f) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{2^n} & \text{gdy } \vec{f}^{-1}(\{0\}) \text{ jest nieskończony,} \\ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{2^n} & \text{gdy } \vec{f}^{-1}(\{0\}) \text{ jest skończony.} \end{cases}$$

Pokażemy, φ jest różnowartościowa. Po pierwsze zauważmy, że jeśli $\vec{f}^{-1}(\{0\})$ jest nieskończony, to $\varphi(f) \geq 0$, natomiast gdy jest skończony, to $\varphi(f) < 0$. Przypuśćmy, że f oraz g są dwoma różnymi nieskończonymi ciągami zawierającymi nieskończenie wiele zer. Niech k będzie najmniejszą liczbą taką, że $f(k) \neq g(k)$. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $f(k) = 0$ oraz $g(k) = 1$. Jeśli $\varphi(f) = \varphi(g)$, to odejmując pierwsze $k - 1$ wyrazów w odpowiadających szeregach dostajemy

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f(n)}{2^n} = \frac{1}{2^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{g(n)}{2^n}. \quad (25)$$

Zatem szereg po lewej stronie ma sumę mniejszą (bo f zawiera nieskończenie wiele zer) od $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k}$. Natomiast szereg po prawej stronie ma sumę co najmniej $\frac{1}{2^k}$. Zatem równość (25) jest niemożliwa, co dowodzi $\varphi(f) \neq \varphi(g)$. W przypadku, gdy f i g zawierają tylko skończenie wiele zer to postępujemy podobnie. Wówczas szereg po lewej stronie równości (25) zbiega do sumy nie większej niż $\frac{1}{2^k}$, natomiast szereg po prawej stronie zbiega do sumy większej (bo g zawiera tylko skończenie wiele zer) od $\frac{1}{2^k}$. Zatem równość (25) jest w tym przypadku też niemożliwa. Tym samym udowodniliśmy różnowartościowość przekształcenia φ oraz

$$|\{0, 1\}^N| \leq |R|.$$

Dla dowodu nierówności przeciwnej określamy przekształcenie $\psi : (0, 1) \rightarrow \{0, 1\}^N$, które przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej $0 < r < 1$ jej rozwinięcie binarne, tzn. ciąg $f : N \rightarrow \{0, 1\}$ taki, że

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{2^n}.$$

Ponadto umawiamy się, że jeśli dana liczba ma dwa rozwinięcia binarne: o skończonej i o nieskończonej liczbie zer, to wybieramy to które ma nieskończenie wiele zer. ψ jest oczywiście różnowartościowa, a zatem

$$|(0, 1)| \leq |\{0, 1\}^N|.$$

Ponieważ, z Przykładu 6.1 (iii) oraz (iv) wiemy, że $(0, 1) \sim R$, to korzystając z twierdzenia Cantora-Bernsteina dostajemy tezę naszego twierdzenia. ■

6.4 Operacje na liczbach kardynalnych

Niech $A \cap B = \emptyset$. Sumę mocy, $|A| + |B|$ określa się jako moc zbioru $A \cup B$. Należy stwierdzić poprawność powyższej operacji, tzn. pokazać, że nie zależy ona od wyboru reprezentantów. Wynika to natychmiast z Lematu 6.11.

Iloczyn mocy $|A||B|$ definiuje się jako moc produktu $A \times B$. Następujący lemat dowodzi poprawności powyższej operacji.

Lemat 6.14 *Jeśli $A \sim A'$ oraz $B \sim B'$, to $A \times B \sim A' \times B'$.*

Dowód: Jeśli $f : A \rightarrow A'$ oraz $g : B \rightarrow B'$ są bijekcjami, to funkcja $h : A \times B \rightarrow A' \times B'$ zdefiniowana wzorem

$$h(a, b) = \langle f(a), g(b) \rangle$$

jest bijekcją. Łatwy dowód pozostawimy czytelnikowi. ■

Potęę mocy $|A|^{|B|}$ definiuje się jako moc zbioru funkcji A^B . Poprawność wynika z następującego lematu.

Lemat 6.15 *Jeśli $A \sim A'$ oraz $B \sim B'$, to $A^B \sim A'^{B'}$.*

Dowód: Jeśli $f : A \rightarrow A'$ oraz $g : B \rightarrow B'$ są bijekcjami, to niech $\varphi : A^B \rightarrow A'^{B'}$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco: dla dowolnej funkcji $h : A \rightarrow B$,

$$\varphi(h) = ghf^{-1}.$$

Ponieważ funkcją odwrotną do φ jest $\psi : A'^{B'} \rightarrow A^B$ zdefiniowana dla $h' : A' \rightarrow B'$,

$$\psi(h') = g^{-1}h'f,$$

to na mocy Twierdzenia 4.4, funkcja φ jest bijekcją. ■

Przykład 6.1 (i) pokazuje, że $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$ i ogólnie, że dla każdego $n > 0$, zachodzi $\aleph_0^n = \aleph_0$. Natomiast Przykład 6.1 (v) pokazuje, że $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Powyższe trzy operacje na liczbach kardynalnych, zastosowane do liczb naturalnych (jako mocy zbiorów skończonych) pokrywają się ze zwykłymi operacjami arytmetycznymi dodawania, mnożenia i potęgowania.

Przykładem prawa dla liczb naturalnych, które przenosi się na dowolne liczby kardynalne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.16 *Dla dowolnej liczby kardynalnej $|A|$ zachodzi*

$$|A| < 2^{|A|}.$$

Dowód: Oczywiście funkcja $\varphi : A \rightarrow P(A)$ zdefiniowana dla $a \in A$,

$$\varphi(a) = \{a\}$$

jest różnowartościowa. Zatem

$$|A| \leq 2^{|A|}.$$

Z twierdzenia Cantora (Twierdzenie 6.7) wynika natychmiast, że $|A| \neq |P(A)|$. Zatem z twierdzenia Cantora-Bernsteina (Twierdzenie 6.12 (iii)) oraz powyższej nierówności wynika, że $|P(A)| \not\leq |A|$. Dowodzi to tezy naszego twierdzenia. ■

Innym przykładem prawa dla liczb kardynalnych, które jest uogólnieniem znanego prawa dla arytmetyki liczb naturalnych jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.17 Dla dowolnych zbiorów A, B, C ,

$$(|A|^{|B|})^{|C|} = |A|^{|B||C|}.$$

Dowód: Pokażemy, że $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$. Niech $\varphi : (A^B)^C \rightarrow A^{B \times C}$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco: dla $f : C \rightarrow A^B$ oraz $b \in B$ i $c \in C$,

$$\varphi(f)(b, c) = (f(c))(b).$$

Zauważmy, że w powyższym wzorze $\varphi(f)$ jest funkcją z $B \times C$ w A , natomiast $f(c)$ jest funkcją z B w A .

Następnie, niech $\psi : A^{B \times C} \rightarrow (A^B)^C$ będzie funkcją, która każdej funkcji $g : B \times C \rightarrow A$ przyporządkowuje funkcję $\psi(g) : C \rightarrow A^B$ określoną następująco. Dla $c \in C$, funkcja $(\psi(g))(c) : B \rightarrow A$ jest zdefiniowana równaniem

$$((\psi(g))(c))(b) = g(b, c).$$

Pokażemy, że ψ jest funkcją odwrotną do φ . Niech $f : C \rightarrow A^B$ będzie dowolną funkcją. Wówczas dla dowolnych $b \in B$ oraz $c \in C$ mamy

$$((\psi(\varphi(f)))(c))(b) = \varphi(f)(b, c) = (f(c))(b).$$

Zatem, ponieważ powyższe równości zachodzą dla dowolnego $b \in B$, to

$$(\psi(\varphi(f)))(c) = f(c),$$

co wobec dowolności $c \in C$ oznacza, że

$$\psi(\varphi(f)) = f.$$

Na zakończenie dowodu weźmy dowolną funkcję $g : B \times C \rightarrow A$ oraz dowolne $b \in B$ i $c \in C$. Wówczas

$$(\varphi(\psi(g)))(b, c) = ((\psi(g))(c))(b) = g(b, c),$$

co wobec dowolności $b \in B$ oraz $c \in C$ daje

$$(\varphi(\psi(g))) = g.$$

Zatem ψ jest funkcją odwrotną do φ , co na mocy Twierdzenia 4.4, oznacza, że φ jest bijekcją ustalającą żadaną równoliczność. ■

Korzystając z twierdzenia 6.17 możemy pokazać, że

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Zadania

- 6.1.** Jaka jest moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych z R w R ?
- 6.2.** Niech $f : R \rightarrow R$ będzie dowolną funkcją monotoniczną, tzn. spełniającą warunek: $r_1 \leq r_2$ implikuje $f(r_1) \leq f(r_2)$. Jaka może być największa moc zbioru wszystkich punktów nieciągłości f ?
- 6.3.** Jaka jest moc wszystkich skończonych podzbiorów zbioru N ?
- 6.4.** Jaka jest moc zbioru wszystkich funkcji z N w N ?
- 6.5.** Jaka może być maksymalna moc rodziny podzbiorów N parami rozłącznych?
- 6.6.** Niech $r \subseteq N^N \times N^N$ będzie relacją zdefiniowaną następująco: $\langle f, g \rangle \in r$ wtw, gdy $f(n) - g(n)$ jest liczbą parzystą. Jaka jest moc klasy abstrakcji zawierającej identyczność I_N ? Jaka jest moc zbioru wszystkich klas abstrakcji r ?
- 6.7.** Jaka jest moc zbioru wszystkich funkcji monotonicznych $f : N \rightarrow N$, tzn. spełniających warunek: $n_1 \leq n_2$ implikuje $f(n_1) \leq f(n_2)$? Jaka jest moc zbioru wszystkich funkcji antymonotonicznych $f : N \rightarrow N$, tzn. spełniających warunek: $n_1 \leq n_2$ implikuje $f(n_2) \leq f(n_1)$?
- 6.8.** Jaka jest moc zbioru wszystkich ciągów liczb wymiernych, które są zbieżne do zera?
- 6.9.** Jak dużej mocy może być zbiór liter $\mathbf{T}$ na płaszczyźnie R^2 takich, że żadne dwie litery nie przecinają się?
- 6.10.** Jakiej największej mocy może być rodzina zbiorów $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{N})$ taka, że dla dowolnych $A, B \in \mathcal{K}$, zachodzi $A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$?
- 6.11.** Jakiej mocy jest zbiór wszystkich relacji równoważności w N ?
- 6.12.** Czy istnieje relacja równoważności $r \subseteq R \times R$, której każda klasa abstrakcji jest mocy $\aleph_0$ oraz
- Zbiór R/r jest mocy $\aleph_0$?
 - Zbiór R/r jest mocy c ?
- 6.13.** Które z poniższych zdań jest prawdziwe a które fałszywe?
- Jeśli $f : A \rightarrow B$ jest różnowartościowa oraz nie jest na B , to $|A| < |B|$.
 - Jeśli $|A| < |B|$ i $C \neq \emptyset$, to $|A \times C| < |B \times C|$.

6.14. Które z następujących zbiorów są równoliczne?

$$\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \{0, 1\}^*, \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, P(\mathbb{Q}), P(\mathbb{R}).$$

6.15. Dowieść, że jeśli X jest zbiorem nieprzeliczalnym oraz A jest zbiorem przeliczalnym, to $X \cup A \sim X$. Wywnioskować stąd, że moc zbioru liczb niewymiernych jest $\mathfrak{c}$.