Rozwiązania poniższych pierwszych 4 zadań (lub ich części) proszę przynieść na kartkach do czwartku, 26.03.09, a zadania 5 i 6 można później. Proszę o staranne i formalne uzasadnienie odpowiedzi. Za każde zadanie można uzyskać dużo punktów.

Szymon Toruńczyk

Nieskończone drzewo binarne Niech T będzie nieskończonym drzewem binarnym, urangowanym (tzn. każdy wierzchołek ma wyróżnionego lewego syna i prawego syna). Każdy wierzchołek drzewa T opisany jest przez skończony ciąg składający się z zer i jedynek, czyli słowo nad alfabetem $\{0,1\}$. Np. słowo puste odpowiada *korzeniowi* drzewa (jest to jedyny wierzchołek który nie jest niczyim synem), słowo 0 odpowiada lewemu synowi korzenia, a słowo 01 odpowiada prawemu synowi lewego syna korzenia.

To co wyżej opisaliśmy to jest izomorfizm zbiorów T oraz $\{0,1\}^*$.

Drzewo T możemy poszerzyć o zbiór nieskończonych ścieżek (czyli ciągów wierzchołków zaczynających się w korzeniu i taki, że każdy następny element jest synem poprzedniego). Ten poszerzony zbiór oznaczmy przez $\bar{T}$. Nieskończone ścieżki odpowiadają nieskończonym słowom nad alfabetem $\{0,1\}$, czyli elementom zbioru $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Dla ujednolicenia opisu, elementy T, czyli wierzchołki drzewa, będziemy utożsamiać ze ścieżkami do niego prowadzącymi. Tak więc, $\bar{T}$ składa się ze skończonych oraz nieskończonych ścieżek w drzewie binarnym.

A zatem,

$$\bar{T} \simeq \{0,1\}^* \cup \{0,1\}^{\mathbb{N}},$$

tzn. zbiory te są izomorficzne. Dalej będziemy utożsamiać ze sobą te dwa zbiory.

Dla dwóch słów v, w nad alfabetem $\{0,1\}$, skończonych lub nie, niech $h(v,w)$ będzie pierwszą pozycją, na której słowa v oraz w się różnią. Jeżeli słowa się nie różnią, to $h(v,w) = \infty$. Inaczej mówiąc jeżeli, v oraz w są dwoma ścieżkami w drzewie T to $h(v,w)$ jest liczbą wierzchołków w ich części wspólnej.

Określamy metrykę d na zbiorze $\bar{T}$ w ten sposób, że

$$d(v,w) = 2^{-h(v,w)}.$$

Zadanie 1. *Pokazać, że tak określona funkcja d jest metryką na zbiorze $\bar{T}$.*

Zadanie 2. *Opisać kule oraz zbiory otwarte w przestrzeni $\bar{T}$.*

Definicja. Przestrzeń metryczna X jest zwarta, jeżeli każdy ciąg $x_1, x_2, \ldots$ jej elementów ma pewien podciąg który jest zbieżny do jakiegoś elementu tej przestrzeni.

Na przykład, domknięty odcinek jest zwarty, ponieważ każdy ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg monotoniczny, a ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Zadanie 3. *Pokazać, że przestrzeń metryczna $(\bar{T}, d)$ jest zwartą przestrzenią metryczną. Czy jej podzbiór składający się z nieskończonych ścieżek jest zwarty?*

Wskazówka. Skorzystać z lematu Königa, który mówi, że w każdym nieskóńcznoym drzewie którego każdy wierzchołek ma skończenie wielu synów (niekoniecznie dwóch) istnieje nieskończona ścieżka

Uwaga 1. Oczywiście, analogicznie możnaby dowodzić, że zbiór ścieżek w nieskończonym drzewie stopnia k jest zwarty, dla $k > 2$.

Definicja. Dwie przestrzenie metryczne X oraz Y są *homeomorficzne* jeżeli istnieje bijekcja $f\colon X \to Y$ która jest ciągła i której odwrotność f^{-1} jest ciągła.

Zadanie 4. *Pokazać, że przestrzeń metryczna $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ (czyli zbiór nieskończonych ścieżek w T) jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora $C \subset \mathbb{R}$.*

Kolorowanie grafów Niech $G = (V, E)$ będzie grafem nieskierowanym o zbiorze wierzchołków V oraz zbiorze krawędzi E oraz niech k będzie liczbą naturalną. *Kolorowaniem* grafu G za pomocą k-kolorów jest przyporządkowanie każdej krawędzi $e \in E$ pewnego *koloru* $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tak, żeby żadne dwie sąsiednie krawędzie nie miały tego samego koloru. Jeżeli takie kolorowanie istnieje, to mówimy, że G jest *k-kolorowalny.*

Na przykład, trójkąt jest 3-kolorowalny ale nie jest 2-kolorowalny.

Zadanie 5. *Niech G będzie nieskierowanym grafem o zbiorze wierzchołków $\bar{N}$. Pokazać, że G jest k-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podgraf jest k-kolorowalny.*

Uwaga. Chodzi o rozwiązanie korzystające z pojęcia zwartości.
Wskazówka. Częściowo pokolorowany graf odpowiada ścieżce w nieskończonym drzewie stopnia $k + 1$, które jest zwarte. Niech G_n będzie podgrafem grafu G wyznaczonym przez wierzchołki $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ciąg k-kolorowań grafów G_n musi mieć podciąg zbieżny. Granica tego podciągu będzie k-kolorowaniem grafu G.

Kafelkowanie płaszczyzny *Kafelek* jest kwadratem ma cztery boki i każdy bok ma swój *rodzaj*. Dwa kafelki mogą się stykać tylko wzdłuż boków tego samego rodzaju.

Niech X będzie ustalonym skończonym zbiorem kafelków. *Kafelkowanie* płaszczyzny to jest wypełnienie jej całej kafelkami ze zbioru X tak, by sąsiednie kafelki stykały się w dozwolony sposób.

Zadanie 6. *Pokazać, że płaszczyznę się da się wykafelkować wtedy i tylko wtedy, gdy da się wykafelkować dowolnie duże prostokąty.*

Uwaga. Chodzi o rozwiązanie korzystające z pojęcia zwartości.