

Języki, automaty i obliczenia

Wykład 13: Złożoność czasowa i pamięciowa. Klasa NP

Sławomir Lasota

Uniwersytet Warszawski

28 maja 2025

1 Złożoność czasowa i pamięciowa

2 Redukcje wielomianowe

3 NP-zupełność

$n = |w|$ długość słowa wejściowego w .

Rozważamy funkcje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ t.ż. $f(n) \geq n$.

Maszyna Turinga $\mathcal{M}$, deterministyczna lub nie,

- *działa w czasie $f(n)$* jeśli dla każdego słowa wejściowego w maszyna wykonuje co najwyżej $f(|w|)$ kroków.
- *działa w pamięci $f(n)$* jeśli dla każdego słowa wejściowego w maszyna odwiedza co najwyżej $f(|w|)$ komórek taśmy.

Fakt

Maszyna deterministyczna działająca w czasie $f(n)$ jest całkowita.

Deterministyczna maszyna $\mathcal{M}$:

	a	b	$\mathbb{B}$	$\#$
start $\rightarrow$	(cont $\rightarrow$, #, $\rightarrow$)	(check, b , $\rightarrow$)	(nok, $\mathbb{B}$, $\circ$)	(nok, #, $\circ$)
cont $\rightarrow$	(cont $\rightarrow$, a , $\rightarrow$)	(cont $\rightarrow$, b , $\rightarrow$)	(start $\leftarrow$, $\mathbb{B}$, $\leftarrow$)	(start $\leftarrow$, #, $\leftarrow$)
start $\leftarrow$	(cont $\leftarrow$, #, $\leftarrow$)	(nok, b , $\circ$)	(nok, $\mathbb{B}$, $\circ$)	(nok, #, $\circ$)
cont $\leftarrow$	(cont $\leftarrow$, a , $\leftarrow$)	(cont $\leftarrow$, b , $\leftarrow$)	(nok, $\mathbb{B}$, $\circ$)	(start $\rightarrow$, #, $\rightarrow$)
check	(nok, a , $\circ$)	(nok, b , $\circ$)	(ok, $\mathbb{B}$, $\circ$)	(ok, #, $\circ$)

$$L(\mathcal{M}) = \{a^n b a^n : n \in \mathbb{N}\}$$

$\mathcal{M}$ działa w czasie n^2 i pamięci n .

Pytanie

A gdyby $\mathcal{M}$ miała 2 taśmy?

klasa języków	języki rozpoznawane przez
$\text{DTIME}(f(n))$	deterministyczną maszynę w czasie $f(n)$
$\text{NTIME}(f(n))$	niedeterministyczną maszynę w czasie $f(n)$
$\text{DSpace}(f(n))$	deterministyczną maszynę w pamięci $f(n)$
$\text{NSpace}(f(n))$	niedeterministyczną maszynę w pamięci $f(n)$

Pytanie

Czy wystarczy ograniczyć się do obliczalnych funkcji f ?

Twierdzenie

Wszystkie klasy są właściwymi podklasami języków rozstrzygalnych.

Dowód:

$$L_p := \{ w_{\mathcal{M}} : w_{\mathcal{M}} \notin L_{\leq f}(\mathcal{M}) \}.$$

L_p jest rozstrzygalny, ale gdyby $L_p = L_{\leq f}(\mathcal{M})$, to

$$w_{\mathcal{M}} \in L_{\leq f}(\mathcal{M}) \iff w_{\mathcal{M}} \notin L_{\leq f}(\mathcal{M}).$$

klasa języków	języki rozpoznawane przez
$DTIME(f(n))$	deterministyczną maszynę w czasie $f(n)$
$NTIME(f(n))$	niedeterministyczną maszynę w czasie $f(n)$
$DSPACE(f(n))$	deterministyczną maszynę w pamięci $f(n)$
$NSPACE(f(n))$	niedeterministyczną maszynę w pamięci $f(n)$

Twierdzenie

$$DTIME(f(n)) \subseteq NTIME(f(n)) \subseteq DSPACE(f(n)) \subseteq NSPACE(f(n))$$

$$NSPACE(f(n)) \subseteq \bigcup_c DTIME(2^{c \cdot f(n)})$$

założenie!

...

$$\text{EXPSPACE} = \bigcup_p \text{DSPACE}(2^{p(n)}) = \bigcup_p \text{NSPACE}(2^{p(n)})$$

$$\text{NEXPTIME} = \bigcup_p \text{NTIME}(2^{p(n)})$$

$$\text{EXPTIME} = \bigcup_p \text{DTIME}(2^{p(n)})$$

$$\text{PSPACE} = \bigcup_p \text{DSPACE}(p(n)) = \bigcup_p \text{NSPACE}(p(n))$$

$$NP = \text{NPTIME} = \bigcup_p \text{NTIME}(p(n))$$

$$P = \text{PTIME} = \bigcup_p \text{DTIME}(p(n))$$

($p \in \text{wielomiany}$)

Problem spełnialności formuły zdaniowej (SAT)

Dane: formuła zdaniowa ϕ .
Wynik: czy ϕ jest spełnialna?

np. $\phi \equiv (x \wedge y) \vee \neg(x \wedge (\neg y \vee z))$

3-SAT

Dane: formuła zdaniowa ϕ w postaci 3-CNF.
Wynik: czy ϕ jest spełnialna?

np. $\phi \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$

3-kolorowalność

Dane: graf G .
Wynik: czy da się pokolorować wierzchołki G trzema kolorami tak, żeby kolory sąsiadów były różne?

1 Złożoność czasowa i pamięciowa

2 Redukcje wielomianowe

3 NP-zupełność

Problem $K \subseteq A^*$ *redukuje się wielomianowo* do problemu $L \subseteq B^*$ jeśli istnieje funkcja obliczalna *w czasie wielomianowym*

$$f : A^* \rightarrow B^*$$

taka, że

$$w \in K \iff f(w) \in L, \quad \text{dla każdego } w \in A^*.$$

Ozn. $K \leq_p L$.

Fakt

Jeśli $L \leq_p K$ to $\bar{L} \leq_p \bar{K}$.

Przykład

$\text{SAT} \leq_p \text{3-SAT} \leq_p \text{3-kolorowalność}$.

funkcja obliczalna w czasie wiel.:

ϕ

$\mapsto$

ψ w postaci 3-CNF

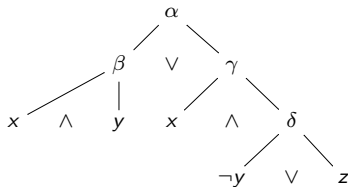
poprawność:

ϕ spełnialna

$\iff$

ψ spełnialna

$$\phi \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge (\neg y \vee z)) \quad \mapsto \quad \alpha \wedge (\alpha \iff \beta \vee \gamma) \wedge (\beta \iff x \wedge y) \\ \wedge (\gamma \iff x \wedge \delta) \wedge (\delta \iff \neg y \vee z)$$



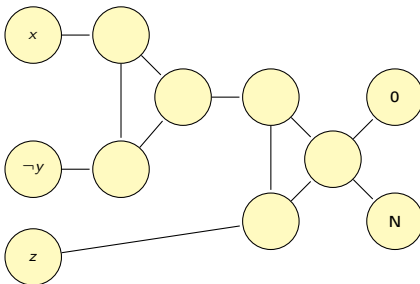
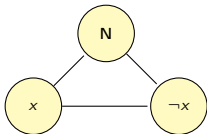
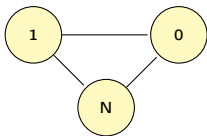
$$\alpha \iff \beta \vee \gamma$$

$$(\neg \alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge ((\neg \beta \wedge \neg \gamma) \vee \alpha)$$

$$(\neg \alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\neg \beta \vee \alpha) \wedge (\neg \gamma \vee \alpha)$$

funkcja obliczalna w czasie wiel.:	ϕ w postaci 3-CNF	$\mapsto$	G_ϕ
poprawność:	ϕ spełnialna	$\iff$	G_ϕ 3-kolorowalny

np. $\phi \equiv (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg z \vee u) \wedge \dots$



Fakt

Niech $\mathcal{C}$ – klasa złożoności z listy poniżej. Jeśli $L \leq_p K$ i $K \in \mathcal{C}$ to $L \in \mathcal{C}$.

...

$$\text{EXPSPACE} = \bigcup_p \text{DSpace}(2^{p(n)}) = \bigcup_p \text{NSpace}(2^{p(n)})$$

$$\text{NEXPTIME} = \bigcup_p \text{NTIME}(2^{p(n)})$$

$$\text{EXPTIME} = \bigcup_p \text{DTIME}(2^{p(n)})$$

$$\text{PSPACE} = \bigcup_p \text{DSpace}(p(n)) = \bigcup_p \text{NSpace}(p(n))$$

$$NP = \bigcup_p \text{NTIME}(p(n))$$

1 Złożoność czasowa i pamięciowa

2 Redukcje wielomianowe

3 NP-zupełność

Problem L jest *C-trudny* jeśli każdy problem $K \in \mathcal{C}$ redukuje się wielomianowo do L .

Problem L jest *C-zupełny* jeśli jest $\mathcal{C}$ -trudny i należy do $\mathcal{C}$.

Fakt

Jeśli $K \leq_p L$ i K jest $\mathcal{C}$ -trudny to L jest $\mathcal{C}$ -trudny.

...

$$\text{EXPSPACE} = \bigcup_p \text{DSpace}(2^{p(n)}) = \bigcup_p \text{NSpace}(2^{p(n)})$$

$$\text{NEXPTIME} = \bigcup_p \text{NTIME}(2^{p(n)})$$

$$\text{EXPTIME} = \bigcup_p \text{DTIME}(2^{p(n)})$$

$$\text{PSPACE} = \bigcup_p \text{DSpace}(p(n)) = \bigcup_p \text{NSpace}(p(n))$$

$$\text{NP} = \bigcup_p \text{NTIME}(p(n))$$

Problem L jest *C-trudny* jeśli każdy problem $K \in \mathcal{C}$ redukuje się wielomianowo do L .

Problem L jest *C-zupełny* jeśli jest $\mathcal{C}$ -trudny i należy do $\mathcal{C}$.

Twierdzenie (Cook 1971, Levin 1973)

SAT jest NP-zupełny.

SAT, 3-SAT, 3-kolorowalność

Cykl Hamiltona

Dane: graf skierowany G .

Wynik: czy G ma cykl Hamiltona ?

Problem plecakowy (szczególny przypadek)

Dane: zbiór liczb $\{n_1, \dots, n_k\}$ i liczba m , reprezentowane binarnie.

Wynik: czy istnieje podzbiór $\{n_{i_1}, \dots, n_{i_l}\}$ taki, że $n_{i_1} + \dots + n_{i_l} = m$?

Pytanie: A gdyby liczby były reprezentowane unarnie ?

PCP z ograniczeniem

Dane: ciąg par słów $(w_1, v_1), \dots, (w_n, v_n)$ i liczba k reprezentowana unarnie.

Wynik: czy istnieje niepusty ciąg $(i_1, \dots, i_m)$, $m \leq k$, t. że

$$w_{i_1} \dots w_{i_m} = v_{i_1} \dots v_{i_m} ?$$

Programowanie całkowitoliczbowe

Dane: układ równań liniowych U o całkowitych współczynnikach.

Wynik: czy U ma nieujemne całkowite rozwiązanie ?

np. $2x - 3y = -8$

$$3x + y = 9$$

Nierówność wyrażeń regularnych bez *

Dane: dwa wyrażenia regularne R, R' bez *.

Wynik: czy $L(R) \neq L(R')$?

np. $(a + b)(a + \varepsilon)b + abb \neq (a + \varepsilon)(a + b)b + bab$?

Problem stopu po n krokach

Dane: Niedeterministyczna maszyna Turinga $\mathcal{M}$ i słowo wejściowe w .

Wynik: czy $\mathcal{M}$ akceptuje w po co najwyżej $|w|$ krokach ?

W następnym odcinku:

Pamięć wielomianowa i języki kontekstowe