Automaty nieskończone

2024/25

Wykład 10

Automaty z rejestrami - granice rozstrzygalności

[1]

- Dane/atomy $(\mathbb{N}, =) = \mathbb{A}$
- Słowa z danymi/atomami : alfabet $= \Sigma \times \mathbb{A}$

$\alpha, 1 \quad \beta, 1 \quad \beta, 3 \quad \alpha, 2 \quad \beta, 1 \quad \alpha, 3 \quad \dots$

- Stany $= Q \times (\mathbb{A} \cup \perp)^R$

Problemy decyzyjne:

- pustość $L(A) = \emptyset$? PSPACE, NP, P
- pełność $L(A) = (\Sigma \times \mathbb{A})^*$?

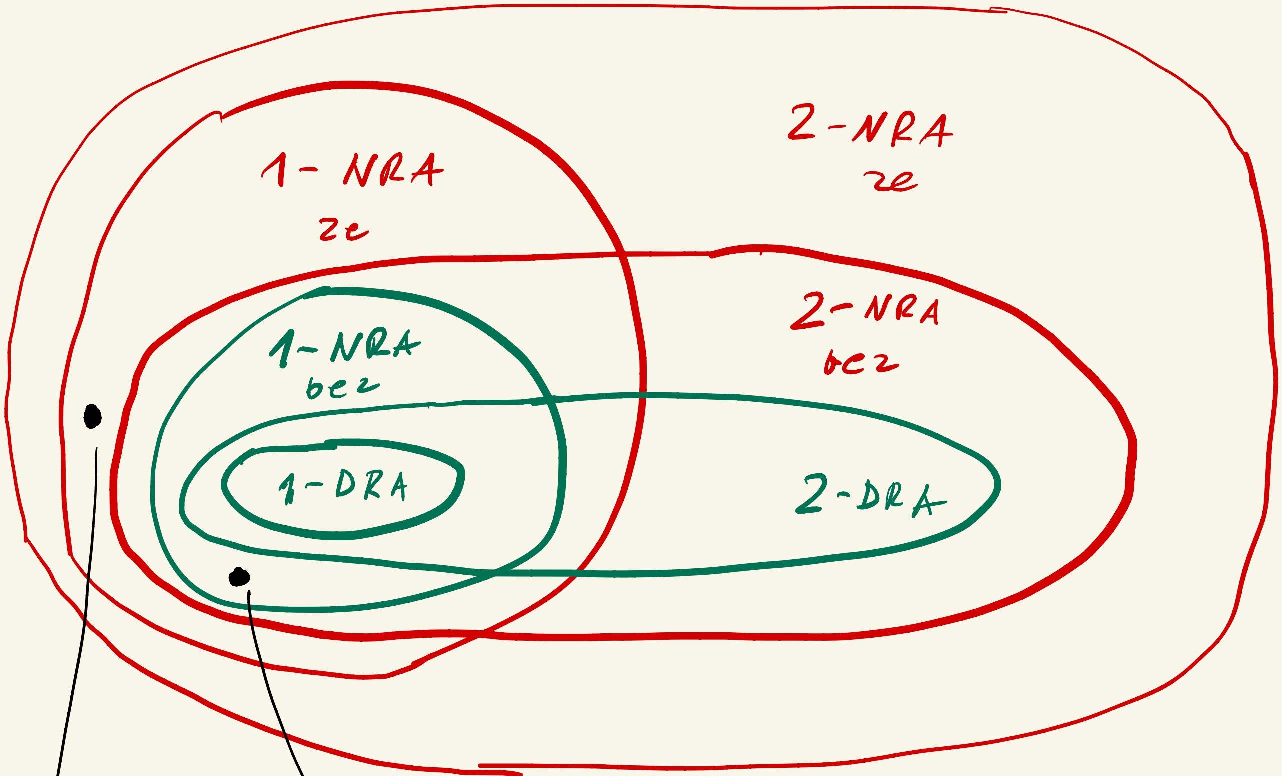
nierozstrzygalna dla:

- automatów z 2 rejestrami bez zgadywania
- automatów z 1 rejestrem ze zgadywaniem

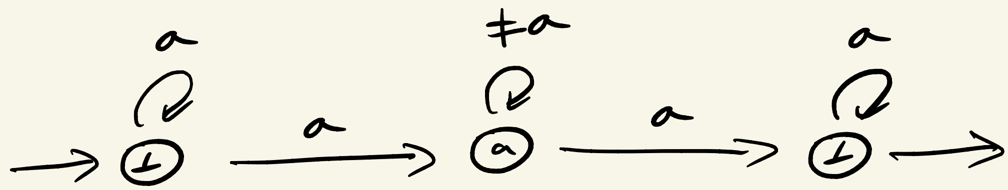
$\hookrightarrow$ ćw

Twierdzenie:

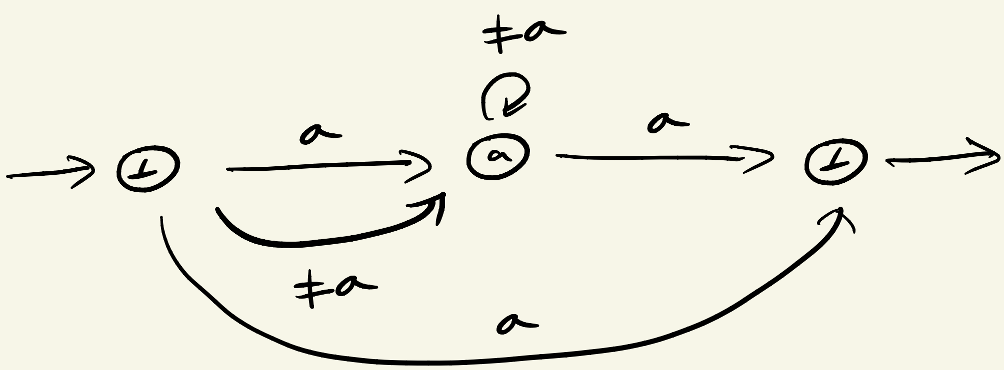
Pełność jest rozstrzygalna dla automatów z 1 rejestrem bez zgadywania.



„pewna litera powtarza się"



„ostatnia litera nie powtarza się"



L3

Dowód twierdzenia

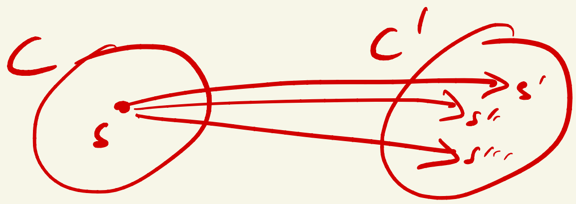
$\text{stany} = Q \times (A \cup \bot)$

$q(a) \quad q(\bot)$

- „determinizacja":

$\text{konfiguracje} = P_{fin}(\text{stany}) \qquad C = \{s_1 \ldots s_n\}$

$C \xrightarrow{\alpha, a} C' = \{ s' : \exists s \in . \ s \xrightarrow{\alpha, a} s' \}$



konfiguracja początkowa:

$C_0 = \{ q(\bot) : q \in I \}$

konfiguracje akceptujące : $q(-) \in C$, $q \in F$

zawierające jakiś stan akceptujący

Fakt: Automat jest pełny

$\Updownarrow$

wszystkie osiągalne konfiguracje są akceptujące

Def:

$C \precsim C' \iff \pi(C) \subseteq C'$ dla pewnej permutacji $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$

Przykład:

$$\begin{array}{cc} q(2) & \\ & p(3) \\ & p(\bot) \end{array} \quad \precsim \quad \begin{array}{ccc} q(6) & & \\ q(7) & p(7) & s(7) \\ q(\bot) & p(\bot) & \end{array}$$

Lemat 1: (konfiguracje, $\precsim$) jest WQO.

profil: konfiguracje $\longrightarrow P(Q) \times \mathbb{N}^{P(Q) \setminus \{\emptyset\}}$

$$\begin{array}{cc} q(2) & p(2) \\ & p(3) \\ q(8) & p(8) \\ & p(10) \\ & p(11) \\ q(\bot) & \end{array} \quad \longmapsto \quad \{q\}, \quad \begin{array}{lcl} \{q\} & \longmapsto & 0 \\ \{p\} & \longmapsto & 3 \\ \{q,p\} & \longmapsto & 2 \end{array}$$

Fakt: profil$(C) \sqsubseteq$ profil$(C') \implies C \precsim C'$

$\not\Leftarrow$ dlaczego?

Fakt: $\sqsubseteq$ jest WQO

Świadek niepełności:

$$c_0 \xrightarrow{d_1 a_1} c_1 \xrightarrow{d_2 a_2} \cdots \xrightarrow{d_n a_n} c_n$$

$\uparrow$ konfiguracja nieakceptująca

Świadek pełności:

zbiór konfiguracji akceptujących $X \subseteq$ konfiguracje:

- zamknięty w górę ze względu na $\preceq$
- zawiera początkową konf.
- jest zamknięty na tranzycje:

$$c \in X,\ c \xrightarrow{d,a} c' \Rightarrow c' \in X$$

<u>Lemat 2:</u> Można sprawdzić efektywnie, dla danego skończonego zbioru X, czy $X\uparrow$ jest świadkiem pustości.

<u>Lemat 3:</u> Automat jest pełny

$\Updownarrow$

istnieje świadek pełności

Dowód $\Downarrow$:

$X :=$ zbiór tych konfiguracji, z których nie da się osiągnąć konfiguracji nieakceptującej

LG

Fakt: Zbiór konfiguracji nieakceptujących jest zamknięty w dół ze względu na $\preceq$.

$$\begin{array}{cccc} \forall & C & \xrightarrow{\alpha, a} & D \\ & \rotatebox{90}{$\preceq$} & & \rotatebox{90}{$\preceq$} \\ \exists & C' & \xrightarrow{\alpha, a} & D' \end{array}$$

Fakt: Dopełnienie X jest zamknięte w dół ze względu na $\preceq$.

Fakt: X jest świadkiem.

Automaty dwukierunkowe z rejestrami:

dodajemy warunki bazowe:

- pierwsza / ostatnia / pozostała pozycja w słowie
- głowica idzie w lewo / prawo

Inne atomy, np. $\mathbb{A} = (\mathbb{Q}, \leq)$