Automaty nieskończone

2024/25

Wykład 9

Automaty z rejestrami

- Dane/atomy $(\mathbb{N}, =) = \mathbb{A}$
- Słowa z danymi/atomami: alfabet $= \Sigma \times \mathbb{A}$

$\alpha,1 \quad \beta,1 \quad \beta,3 \quad \alpha,2 \quad \beta,1 \quad \alpha,3 \quad \ldots$

- Języki – przykłady: alfabet $= \mathbb{A}$
  - pierwsza litera = ostatnia
  - pewna litera powtarza się
  - żadna litera się nie powtarza
  - pierwsza litera się powtarza
  - każde 3 kolejne litery są parami różne

Def. Automat z rejestrami:

- skończony składnik alfabetu Σ
- skończony zbiór lokacji Q (stanów)
- skończony zbiór rejestrów R
- stany pocz. i akceptujące $I, F \subseteq Q$
- relacja przejścia

Stany: $s \in Q \times (\mathbb{A} \cup \{\perp\})^R$ (konfiguracje)

Przejścia: $s \xrightarrow{\alpha,\, a} s'$ $\quad \alpha \in \Sigma$, $\; a \in \mathbb{A}$

Przykład: $q(2,\bot) \xrightarrow{\alpha,1} p(1,2)$

Relacja przejścia:

(1) Dla każdej trójki $(q,\alpha,q') \in Q \times \Sigma \times Q$,

Boolowska kombinacja warunków bazowych:

- rejestr $r \in R$ jest $\bot$ przed/po
- atom wejściowy $=$ rejestr r przed/po
- rejestr r przed/po $=$ rejestr s przed/po

(2) Niezmiennicza relacja (ekwiwariantna)

$$\delta \subseteq \underbrace{Q \times (\mathbb{A} \cup \{\bot\})^R}_{\text{stan przed}} \times \underbrace{\Sigma \times \mathbb{A}}_{\text{alfabet}} \times \underbrace{Q \times (\mathbb{A} \cup \{\bot\})^R}_{\text{stan po}}$$

ze względu na permutacje atomów: $\forall$ permutacji $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$,

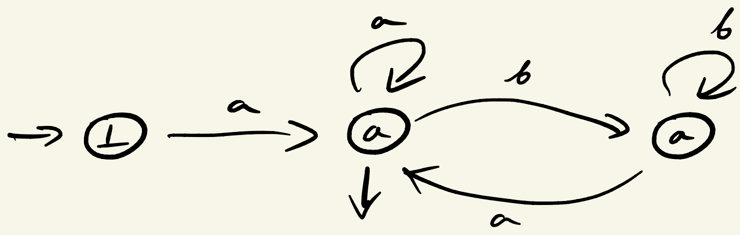
$$t \in \delta \Rightarrow \pi(t) \in \delta$$

Przykład: $q(2,\bot) \xrightarrow{\alpha,1} p(1,2)$

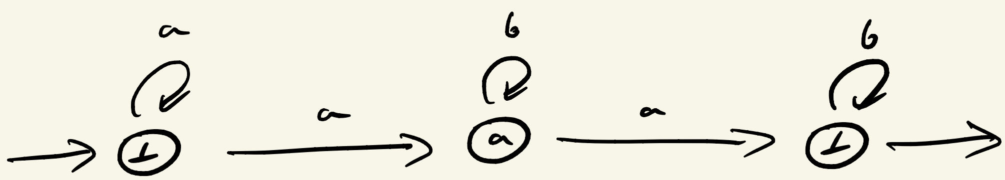
π: $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 5$, $5 \mapsto 1$

$\xrightarrow{\pi}$ $q(5,\bot) \xrightarrow{\alpha,2} p(2,5)$

Przykład: Automat <u>deterministyczny</u> dla „pierwsza litera = ostatnia"



Automat <u>niedeterministyczny</u> dla „pewna litera powtarza się"



Lemat: (1) = (2)

Dowód: $\Rightarrow$ warunki bazowe są niezmiennicze

$\Leftarrow$ każda <u>orbita</u> przejść zawarta w relacji δ jest Boolowską kombinacją warunków bazowych

$$\text{orbita}(t) = \{ \pi(t) : \underbrace{\pi : A \to A}_{\text{permutacja}} \}$$

Relacja δ jest skończoną sumą orbit

$L(A)$: język rozpoznawany przez A

$$q(\perp, \dots, \perp) \xrightarrow{\alpha_1, a_1} \dots \xrightarrow{\alpha_n, a_n} p(a_1, \dots, a_n)$$

$q \in I$ $\qquad$ $p \in F$

Lemat: Problem pustości jest rozstrzygalny

Dowód: Oblicz wszystkie orbity stanów osiągalnych

Przykład: $q(1, \perp, 1, 3)$

Pytanie: złożoność? $\longmapsto$ ćw.

Lemat: Problem ~~uniwersalności~~ pełności jest nierozstrzygalny.

Dowód: Kodowanie obliczenia maszyny Turinga:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccc} & q & & & & & & & & p & & & & & & & & & r & & & \\ \# & a & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \# & a & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \# & a & b & \_ & \_ & \_ & \_ & \# \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

$M \longmapsto$ automat niedet. z 2 rejestrami A

bez „zgadywania"

$L(A)$ = dopełnienie języka kodowań biegów akceptujących maszyny M

Inne atomy, np. $\mathbb{A} = (\mathbb{Q}, \leq)$