Teoria współbieżności

2023/24

wykład 4

Automaty rozpoznające regularne języki śladów

Alfabet rozproszony $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_n$$

$$D = \Sigma_1^2 \cup \ldots \cup \Sigma_n^2 \subseteq \Sigma^2$$

Monoid $\Sigma_1^* \times \ldots \times \Sigma_n^*$

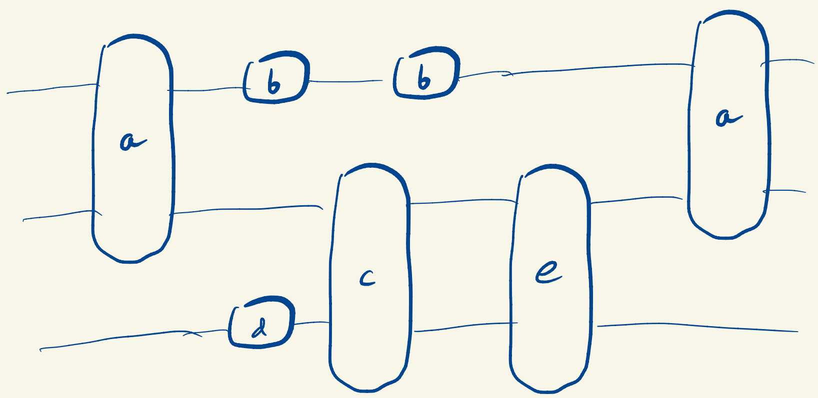
konkatenacja po współrzędnych

Przykład:

$$\{a,b,c,d,e\} = \{a,b\} \cup \{a,c,e\} \cup \{c,d,e\}$$

(abba, acea, dce)

historia



(abb~~a, c~~ea, dce)

(abba, ~~a~~eca, dce)

zależy tylko od D?

$$H_D \subseteq \Sigma_1^* \times \ldots \times \Sigma_n^* \quad \text{historie}$$

Lemat: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_n$, $D = \Sigma_1^2 \cup \ldots \cup \Sigma_n^2$

$$\left(\Sigma^*/_D, \cdot\right) \cong \left(H_D, \cdot\right)$$

Ustalmy alfabet rozproszony $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$

Produkt asynchroniczny I

$1 \le i \le n$

$$A_i = (Q_i,\ q_{0i},\ F_i,\ \delta_i \subseteq Q_i \times \Sigma_i \times Q_i)$$

$$A = A_1 \times \ldots \times A_n = (Q, q_0, F, \delta)$$

$$Q = Q_1 \times \ldots \times Q_n$$

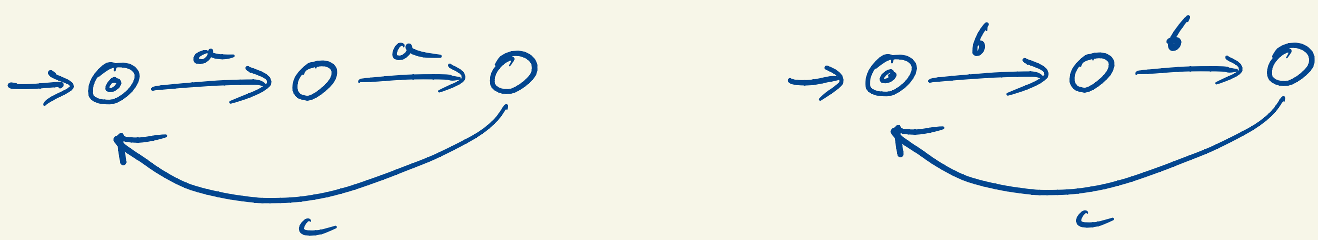
$$q_0 = (q_{01}, \ldots, q_{0n})$$

$$F = F_1 \times \ldots \times F_n$$

$$\delta(q_1 \ldots q_n, a, q_1' \ldots q_n') \iff$$

$$\forall i \begin{cases} a \in \Sigma_i \Rightarrow \delta_i(q_i, a, q_i') \\ a \notin \Sigma_i \Rightarrow q_i = q_i' \end{cases}$$

Przykład: $\Sigma_1 = \{a, c\}$ $\quad \Sigma_2 = \{b, c\}$



$$((aa \parallel bb)\, c)^*$$

Pytanie: Jakie języki rozpoznaje ten model?

Lemat: Ustalamy $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$.
Produkty asynchroniczne rozpoznają dokładnie języki prostokątne:

$$\underbrace{\Big(\forall i \quad \pi_i(w) \in \pi_i(L)\Big)}_{w \in \mathrm{rect}(L)} \Rightarrow w \in L \qquad \mathrm{rect}(L) = L$$

$$\overbrace{\Big(\forall i \quad \exists u_i \in L \quad \pi_i(w) = \pi_i(u_i)\Big)}^{w \in \mathrm{rect}(L)} \Rightarrow w \in L$$

Przykład: $\Sigma_1 = \{a\}$, $\Sigma_2 = \{b\}$

$a \parallel b \quad \cup \quad aa \parallel bb$

nie jest prostokątny, $w = abb$

obydwa składniki są

Produkt asynchroniczny II

$$F = \cancel{F_1 \times \ldots \times F_n} \qquad F \subseteq Q_1 \times \ldots \times Q_n$$

Pytanie: Jakie języki rozpoznaje ten model?

Lemat: Ustalmy $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$.
Uogólnione produkty asynchroniczne rozpoznają dokładnie skończone sumy języków prostokątnych

Przykład: $\Sigma_1 = \{a, c\}$ $\quad \Sigma_2 = \{b, c\}$

$$\Big(\big(a \| b \;\cup\; aa \| bb \big)\, c \Big)^*$$

Automat asynchroniczny:

$$\Sigma_1^2 \cup \ldots \cup \Sigma_n^2 = D$$
$$(\subseteq D)$$

$$A = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, Q_1, \ldots, Q_n, q_0 \in Q = Q_1 \times \ldots \times Q_n, F \subseteq Q, (\delta_a)_{a \in \Sigma})$$

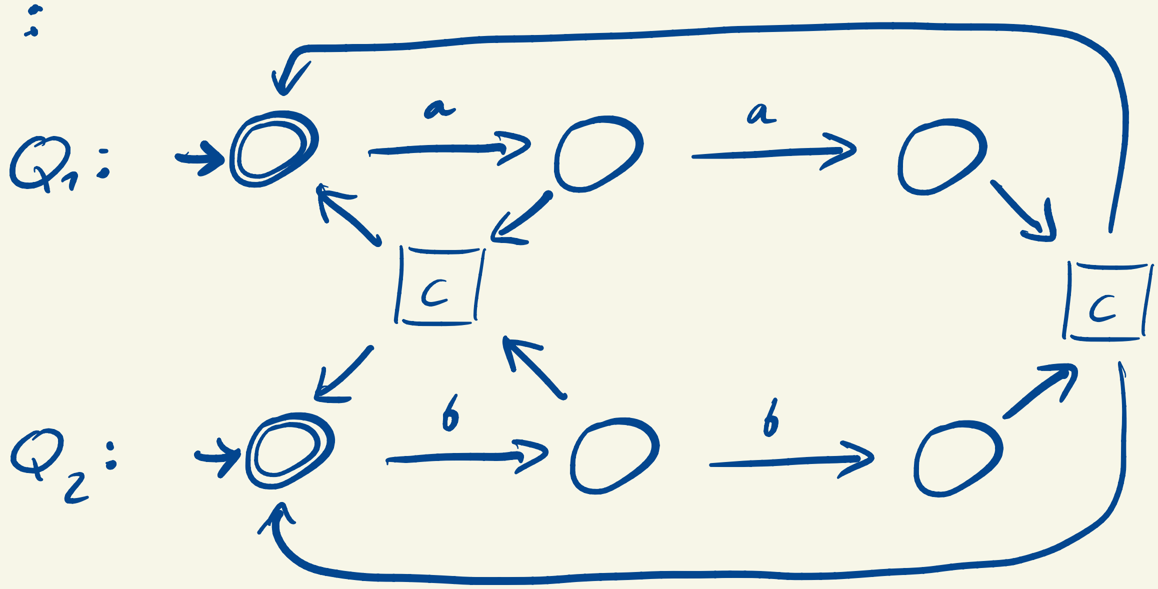
- $\mathrm{dom}(a) = \{ i : a \in \Sigma_i \}$
- $\delta_a \subseteq \prod_{i \in \mathrm{dom}(a)} Q_i \times \prod_{i \in \mathrm{dom}(a)} Q_i$

$$\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$$

$$\delta(q_1 \ldots q_n, a, q_1' \ldots q_n') \iff$$

- $\delta_a(q_1 \ldots q_n |_{\mathrm{dom}(a)}, q_1' \ldots q_n' |_{\mathrm{dom}(a)})$
- $q_1 \ldots q_n |_{\overline{\mathrm{dom}(a)}} = q_1' \ldots q_n' |_{\overline{\mathrm{dom}(a)}}$

Przykład:



Twierdzenie: Ustalmy (Σ, D).

Automaty asynchroniczne rozpoznają dokładnie regularne języki śladów.

dowolny alfabet rozproszony odpowiadający (Σ, D)

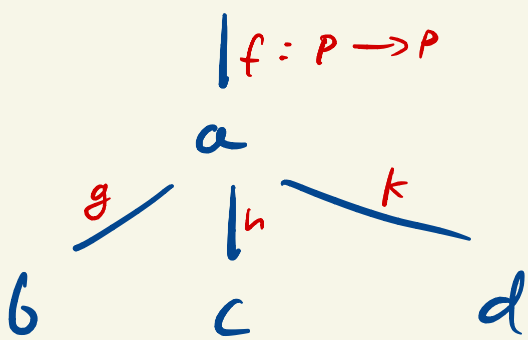
Dowód: [przy założeniu, że D jest acykliczna]

drzewo uporządkowane

automat deterministyczny (minimalny)

$\big\downarrow$ stany P

deterministyczny automat asynchroniczny



$f_a : P \longrightarrow P$

$$(f, g, h, k) \longmapsto (f\, g\, h\, k\, f_a, \mathrm{Id}, \mathrm{Id}, \mathrm{Id})$$

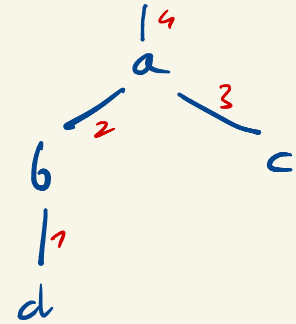
Niezmiennik: po przeczytaniu słowa w, złożenie wszystkich funkcji $P \to P$ w kolejności pre-order daje f_w

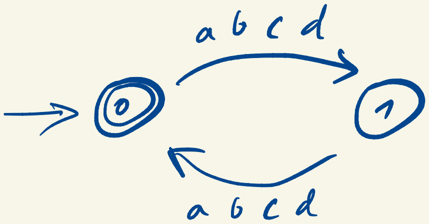
Akceptacja: złożenie (stan pocz) $\in$ stany akceptujące

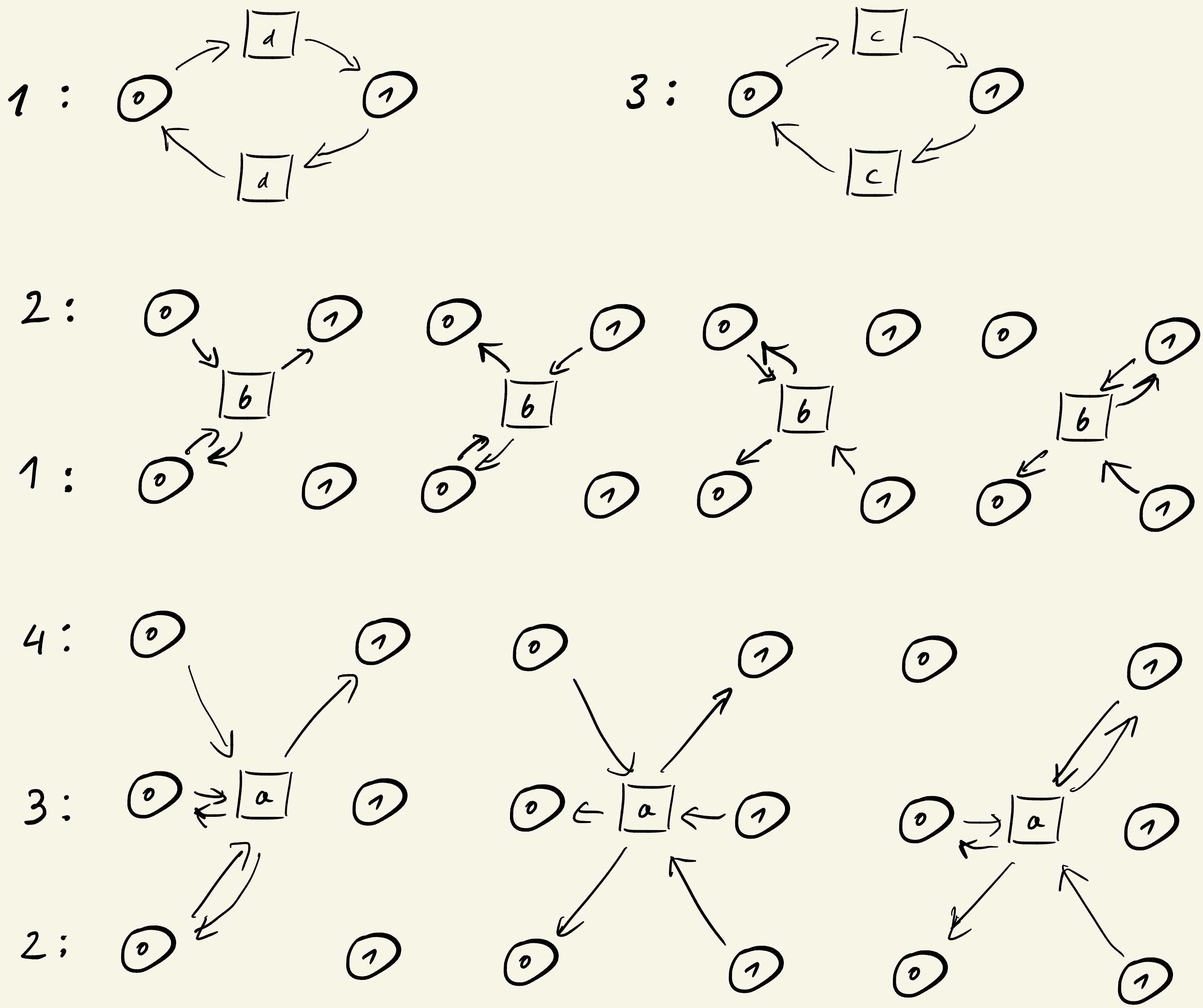
Przykład: $\Sigma = \{a, b, c, d\}$

L = parzysta długość

$D =$







$$F = \{ (p, q, r, s) : p + q + r + s \equiv 0 \mod 2 \}$$