Teoria współbieżności

2023/24

wykład 3

ŚLADY MAZURKIEWICZA

sieć elementarna $\longmapsto$ graf konfiguracji $\longmapsto$ drzewo konfiguracji (czas rozgałęziony)

sieć elementarna $\longmapsto$ język biegów akceptujących (czas liniowy)

$L = \{ w \in T^* : M_0 \xrightarrow{t} F \}$

- niezależność : $(t,u) \in I \iff {}^\bullet t^\bullet \cap {}^\bullet u^\bullet = \emptyset$
- zależność : $(t,u) \in D \iff (t,u) \notin I$

Fakt : $M_0 \xrightarrow{w\,t\,u\,v} M \quad (t,u) \in I \implies M_0 \xrightarrow{w\,u\,t\,v} M$

Alfabet z zależnością :

$(\Sigma, D) \qquad D \subseteq \Sigma^2$ zwrotna, symetryczna

$I = \Sigma^2 \setminus D$

Równoważność śladowa : $\equiv_D \subseteq (\Sigma^*)^2$

najmniejsza t.że $w\,ab\,v \equiv_D w\,ba\,v$

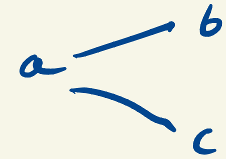
dla każdych $w, v \in \Sigma^*$, $(a,b) \in I$

Ślad = klasa abstrakcji $\equiv_D$

$[w]_{\equiv_D}$

$[w]_D$

$[w]$

<u>Przykład</u>: $\Sigma = \{a, b, c\}$ $D =$ 

$[abbca]_D = \{abbca, abcba, acbba\}$

$M \xrightarrow{[w]} M'$ w sieci elementarnej

<u>Fakt</u>: konkatenacja zachowuje $\equiv_D$ ← kongruencja w $(\Sigma^*, \cdot)$

$$\Sigma^*/_{\equiv_D} = \{[w]_D : w \in \Sigma^*\}$$

Monoid śladów $\left(\Sigma^*/D, \cdot\right)$

Przypadki szczególne:

- $D = \Sigma^2$ słowa Σ^*
- $D = Id_\Sigma$ multizbiory skończone $\Sigma^\oplus$
- $D = \Sigma_1^2 \cup \Sigma_2^2$ $(\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \phi)$ $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$
- D przechodnia $\Sigma_1^* \times \ldots \times \Sigma_n^*$
- I przechodnia $\left(\Sigma_1^\oplus \cup \ldots \cup \Sigma_n^\oplus\right)^*$

Przykład: prefiksy śladu $[abbcab]$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & {[ac]} \arrow[dr] & & & & \\
{[\varepsilon]} \arrow[r] & {[a]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[abc]} \arrow[dr] & & & \\
 & & {[ab]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[abbc]} \arrow[r] & {[abbca]} \arrow[d] & \\
 & & & {[abb]} \arrow[ur] & & {[abbcab]} &
\end{tikzcd}$$

$$[abb][cab] = [ac][bbab]$$

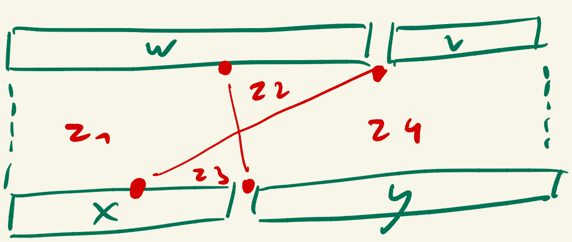
Lemat: $w, v, x, y \in \Sigma^*/_D$

$$wv = xy \implies \exists\ z_1\ z_2\ z_3\ z_4 \in \Sigma^*/_D$$

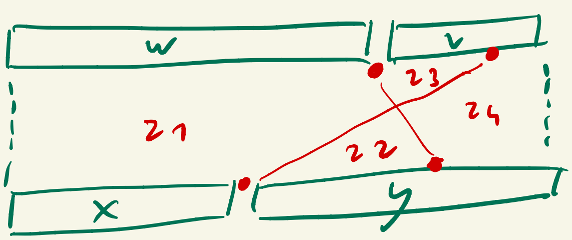
$$w = z_1 z_2 \qquad v = z_3 z_4$$

$$x = z_1 z_3 \qquad y = z_2 z_4$$

$$z_2 \ I \ z_3$$



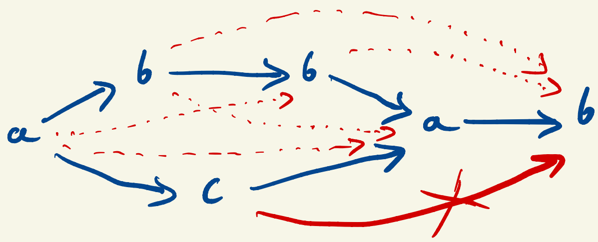
$z_1 = w \sqcap x$

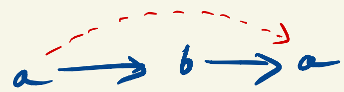


Lepsza reprezentacja śladów?

Grafy zależności

Przykład: $[a\,b\,b\,c\,a\,b]$ $\qquad$ $[a\,b\,a]$





Graf zależności: $(V, E, \ell : V \to \Sigma)$

- skończony acykliczny graf skierowany
- wierzchołki etykietowane literami alfabetu
- $(v, v') \in E \cup E^{-1} \iff (\ell(v), \ell(v')) \in D$
  $v \neq v'$

$$\begin{tikzcd}
\text{Ślady } \Sigma^*/D \arrow[r, bend left, "?"] & \text{grafy zależności } G_D \arrow[l, bend left, "\text{linearyzacje domknięcia przechodniego}"]
\end{tikzcd}$$

etykietowany porządek cz.

Konkatenacja grafów:

$V := V_1 \uplus V_2$

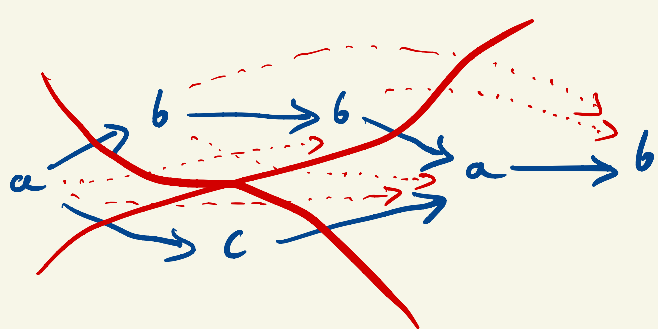
$\ell := \ell_1 \uplus \ell_2$

$E := E_1 \cup E_2 \cup \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 : (\ell(v_1), \ell(v_2)) \in D\}$

Lemma: $(\Sigma^*/D, \cdot) \cong (G_D, \cdot)$

Przykład:

$[a\,b\,b]\,[c\,a\,b] = [a\,c]\,[b\,b\,a\,b]$



$S \subseteq \Sigma^*/_D$ $\qquad\qquad$ $L \subseteq \Sigma^*$

języki śladów $\approx$ języki słów zamknięte na $\equiv_D$

$$\begin{tikzcd} \text{języki słów zamknięte na } \equiv_D \\ \text{języki słów} \arrow[u, "cl(-)"'] \end{tikzcd}$$

$cl(L) = \{ w \in \Sigma^* : \exists v \in L .\ v \equiv_D w \}$

<u>Regularne języki śladów:</u>

- $cl(L)$, $L \subseteq \Sigma^*$ regularny
- → $L = cl(L)$, $L \subseteq \Sigma^*$ regularny

<u>Przykład</u>: $\Sigma = \{a, b\}$, $D = Id$, $L = (ab)^*$

$cl(L) = \{ w : \#a(w) = \#b(w) \}$

$S = h^{-1}(A)$, $A \subseteq M$

$L = h^{-1}(A)$, $A \subseteq M$

$$\begin{tikzcd} \Sigma^*/_D \arrow[dr, "h"] & \\ \Sigma^* \arrow[u] \arrow[r, "h"] & M \end{tikzcd}$$

finite

Pytanie: czy sieci elementarne rozpoznają wszystkie regularne języki śladów?

$$L(S) = \{ w \in T^* : M_0 \xrightarrow{w} F \}$$

konfiguracje akceptujące

Przykład: $L = \{ \varepsilon, a, aa \}$

$L = \{ \varepsilon, a, ba \}$

Model automatu rozpoznającego dokładnie regularne języki śladów ?

Alfabet rozproszony $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$$

$$D = \Sigma_1^2 \cup \dots \cup \Sigma_n^2 \subseteq \Sigma^2$$

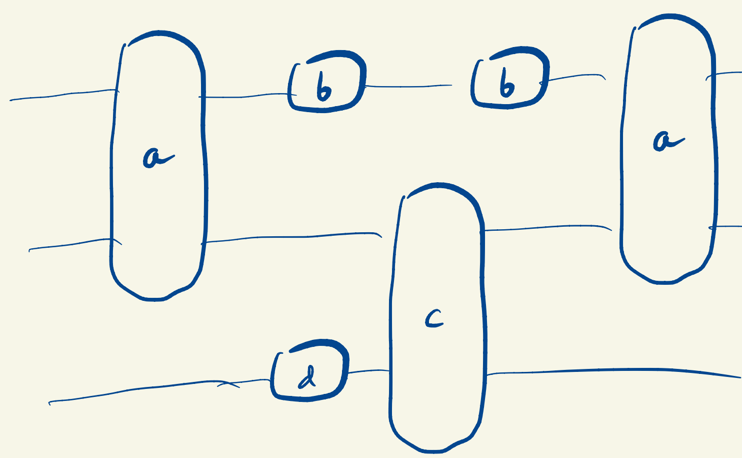
Monoid $\Sigma_1^* \times \dots \times \Sigma_n^*$

konkatenacja po współrzędnych

Przykład: $\{a,b,c,d\} = \{a,b\} \cup \{a,c\} \cup \{c,d\}$

$(abba, aca, dc)$

historia



$\cancel{(cabba, ca, dc)}$

nie

Historie:

$\pi_i : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma_i^*$ rzutowanie

$\pi : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma_1^* \times \dots \times \Sigma_n^*$ $\quad w \longmapsto (\pi_1(w), \dots, \pi_n$

$H_D = \pi(\Sigma^*) \subseteq \Sigma_1^* \times \dots \times \Sigma_n^*$ historie

podmonoid generowany przez historie atomowe $\{\pi(a) : a \in \Sigma\}$

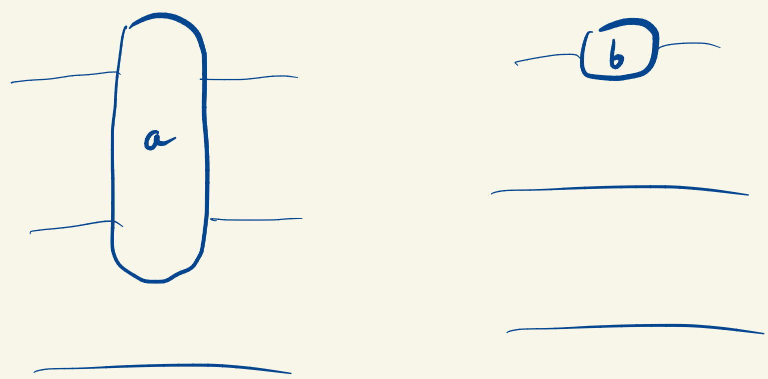
Przykład: $\pi(abdcba) = (abba, aca, dc)$

$\pi(a) = (a, a, \varepsilon)$

$\pi(b) = (b, \varepsilon, \varepsilon)$

$\pi(c) = (\varepsilon, c, c)$

$\pi(d) = (\varepsilon, \varepsilon, d)$



Lemat: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$, $\quad D = \Sigma_1^2 \cup \dots \cup \Sigma_n^2$

$$(\Sigma^*/_D, \cdot) \cong (H_D, \cdot)$$