Języki, automaty i obliczenia

Wykład 6: Automaty ze stosem

Sławomir Lasota

Uniwersytet Warszawski

10 kwietnia 2024

Plan

Automat ze stosem:

$$\mathcal{A} \;=\; (A, Q, q_0, F, S, s_0, \delta)$$

- A – alfabet wejściowy
- Q – zbiór stanów
- $q_0 \in Q$ – stan początkowy
- $F \subseteq Q$ – stany akceptujące

- S – alfabet stosowy
- $s_0 \in S$ – symbol początkowy
- $\delta \subseteq_{\text{fin}} Q \times S \times (\, A \cup \{\varepsilon\} \,) \times Q \times \, S^* \,$

Notacja

Przejście $(q, s, a, q', w) \in \delta$ będziemy zapisywać jako

$$q, s \xrightarrow{a} q', w \quad \text{albo} \quad q \xrightarrow{\textbf{pop}(s), a, \textbf{push}(w)} q'.$$

Przejście $q \xrightarrow{\textbf{pop}(s), a, \textbf{push}(w)} q'$:

- umożliwione jest w stanie q, jeśli na szczycie stosu jest symbol s
- czyta z wejścia $a \in \, A \cup \{\varepsilon\}$
- zmienia stan z q na q'
- zastępuje na stosie symbol s przez słowo w

Konfiguracje

- *Konfiguracja* automatu ze stosem: $c \;=\; (q, v) \in Q \times S^*$.
- Konfiguracja początkowa: $c_0 \;=\; (q_0, s_0)$.
- Konfiguracje akceptujące: $(q, v),\;\; q \in F$.
- Relacja przejścia pomiędzy konfiguracjami:

$$c \xrightarrow{a} c' \qquad (a \in A \cup \{\varepsilon\})$$

jeśli $q \xrightarrow{\mathbf{pop}(s), a, \mathbf{push}(w)} q'$, $\;c = (q, s\,v)$, $\;c' = (q', w\,v)$ dla pewnego $v \in S^*$.

- Rozszerzamy relację przejścia (*bieg* automatu na słowie w):

$$c \xrightarrow{w} c' \qquad (w \in A^*)$$

jeśli

$$c \xrightarrow{a_1} c_1 \xrightarrow{a_1} \ldots \xrightarrow{a_m} c_m \;=\; c'$$

dla $a_1, \ldots, a_m \in A \cup \{\varepsilon\}$ t.że $a_1 a_2 \ldots a_m \;=\; w$ (ale niekoniecznie $m \;=\; |w|$).

Język rozpoznawany przez automat ze stosem

$$L(\mathcal{A}) \;=\; \{\, w \in A^* \;:\; c_0 \xrightarrow{w} c \text{ dla jakiejś konfiguracji akceptującej } c \,\}$$

Przykład

- $A \;=\; \{a, b\}$
- $Q \;=\; \{q_0, q, q_f\}$
- $F \;=\; \{q_f\}$
- $S \;=\; \{s_0, s\}$

$$q_0 \xrightarrow{\mathbf{pop}(s_0), a, \mathbf{push}(ss_0)} q_0 \qquad q_0 \xrightarrow{\mathbf{pop}(s_0), \varepsilon, \mathbf{push}(s_0)} q \qquad q \xrightarrow{\mathbf{pop}(s_0), \varepsilon, \mathbf{push}(\varepsilon)} q_f$$

$$q_0 \xrightarrow{\mathbf{pop}(s), a, \mathbf{push}(ss)} q_0 \qquad q_0 \xrightarrow{\mathbf{pop}(s), \varepsilon, \mathbf{push}(s)} q \qquad q \xrightarrow{\mathbf{pop}(s), b, \mathbf{push}(\varepsilon)} q$$

$$(q_0, s_0) \xrightarrow{a} (q_0, ss_0) \xrightarrow{a} (q_0, sss_0) \xrightarrow{\varepsilon} (q, sss_0) \xrightarrow{b} (q, ss_0) \xrightarrow{b} (qs_0) \xrightarrow{\varepsilon} (q_f, \varepsilon)$$

$$L(\mathcal{A}) \;=\; ?$$

Pytanie

Czy podczas biegu stos może być pusty?

Plan

1. Automaty ze stosem
2. Warianty automatów ze stosem
3. Równoważność gramatyk bezkontekstowych i automatów ze stosem
4. Motywacje

Warianty automatów ze stosem

Osłabienie:

- pojedyncze operacje na stosie: push, pop, nop
- brak stanów
- brak pustych przejść
- brak pustych przejść i stanów
- ...

Wzmocnienie:

- przepisywanie prefiksowe
- ...

Warianty akceptacji:

- akceptacja przez pusty stos
- akceptacja przez pusty stos i stan akceptujący
- ...

Pojedyncze operacje na stosie: push, pop, nop

$$\delta \subseteq Q \times \boxed{\{\, \mathbf{push}(s), \mathbf{pop}(s), \mathbf{nop} \;:\; s \in S \,\}} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times Q$$

Przykład

$(q_0, \mathbf{push}(s), a, q_0)$ $\quad$ $(q_0, \mathbf{nop}, \varepsilon, q)$ $\quad$ $(q, \mathbf{pop}(s_0), \varepsilon, q_f)$

$(q, \mathbf{pop}(s), b, q)$

$(q, \mathbf{push}(s), a, q')$ $\quad$ $q \xrightarrow{\mathbf{pop}(r), a, \mathbf{push}(sr)} q'$ $\quad$ $(r \in S)$

$(q, \mathbf{pop}(s), a, q')$ $\quad$ $q \xrightarrow{\mathbf{pop}(s), a, \mathbf{push}(\varepsilon)} q'$

$(q, \mathbf{nop}, a, q')$ $\quad$ $q \xrightarrow{\mathbf{pop}(r), a, \mathbf{push}(r)} q'$ $\quad$ $(r \in S)$

$q \xrightarrow{\mathbf{pop}(s), a, \mathbf{push}(s_3 s_2 s_1)} q'$ $\quad$ $(q, \mathbf{pop}(s), a, q_1)$ $\quad$ dodatkowe stany q_1, q_2, q_3

$(q_1, \mathbf{push}(s_1), \varepsilon, q_2)$

$(q_2, \mathbf{push}(s_2), \varepsilon, q_3)$

$(q_3, \mathbf{push}(s_3), \varepsilon, q')$

Przepisywanie prefiksowe

Skończony zbiór przejść:

$$\delta \ \subseteq_{\mathsf{fin}} \ Q \times \boxed{S^*} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times S^*$$

Przejście $q \xrightarrow{\mathbf{pop}(w), a, \mathbf{push}(w')} q'$:

- umożliwione jest w stanie q, jeśli na szczycie stosu jest słowo w
- czyta z wejścia $a \in A \cup \{\varepsilon\}$
- zmienia stan z q na q'
- zastępuje na stosie słowo w przez słowo w'

Twierdzenie

(przepisywanie prefiksowe) $\equiv$ *(automaty ze stosem).*

Dowód:

$$q \xrightarrow{\mathbf{pop}(r_3 r_2 r_1), a, \mathbf{push}(s_2 s_1)} q'$$

$$q \xrightarrow{\mathbf{pop}(r_3), \varepsilon, \mathbf{push}(\varepsilon)} q_2$$

dodatkowe stany q_1, q_2

$$q_2 \xrightarrow{\mathbf{pop}(r_2), \varepsilon, \mathbf{push}(\varepsilon)} q_1$$

$$q_1 \xrightarrow{\mathbf{pop}(r_1), a, \mathbf{push}(s_2 s_1)} q'$$

Akceptacja przez pusty stos

Konfiguracje akceptujące: $(q, \varepsilon),\ q \in Q$

Przykład

- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q, q_f\}$
- $S = \{s_0, s\}$

$$(q_0, \mathbf{push}(s), a, q_0) \qquad (q_0, \mathbf{nop}, \varepsilon, q) \qquad \begin{array}{l}(q, \mathbf{pop}(s_0), \varepsilon, q_f)\\ (q, \mathbf{pop}(s), b, q)\end{array}$$

Twierdzenie

(automaty ze stosem) $\equiv$ *(automaty ze stosem akceptujące przez pusty stos).*

Akceptacja przez stany a akceptacja przez pusty stos

$$\mathcal{A} = (A, Q, q_0, S, s_0, \delta) \quad \longmapsto \quad \mathcal{A}' = (A, Q', q_0', F', S', s_0', \delta')$$

- $Q' = Q \cup \{q_0', q_f\}$
- $F' = \{q_f\}$
- $S' = S \cup \{s_0'\}$
- $\delta' = \delta \cup \{q_0' \xrightarrow{\mathbf{pop}(s_0'),\varepsilon,\mathbf{push}(s_0\, s_0')} q_0\} \cup \{\, q \xrightarrow{\mathbf{pop}(s_0'),\varepsilon,\mathbf{push}(\varepsilon)} q_f \;:\; q \in Q\,\}$

$$\mathcal{A} = (A, Q, q_0, F, S, s_0, \delta) \quad \longmapsto \quad \mathcal{A}' = (A, Q', q_0', S', s_0', \delta')$$

- $Q' = Q \cup \{q_0', q_\varepsilon\}$
- $S' = S \cup \{s_0'\}$
- $\delta' = \delta \cup \begin{array}{l} \{q_0' \xrightarrow{\mathbf{pop}(s_0'),\varepsilon,\mathbf{push}(s_0\, s_0')} q_0\} \cup \\ \{\, q \xrightarrow{\mathbf{pop}(s),\varepsilon,\mathbf{push}(s)} q_\varepsilon \;:\; q \in F, s \in S'\,\} \cup \\ \{\, q_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{pop}(s),\varepsilon,\mathbf{push}(\varepsilon)} q_\varepsilon \;:\; s \in S'\,\} \end{array}$

Pytanie

A automaty ze stosem akceptujące przez pusty stos i stan akceptujący ?

Warianty automatów ze stosem

Osłabienie:

- pojedyncze operacje na stosie: push, pop, nop
- brak stanów
- brak pustych przejść
- brak pustych przejść i stanów
- ...

Wzmocnienie:

- przepisywanie prefiksowe
- ...

Warianty akceptacji:

- akceptacja przez pusty stos
- akceptacja przez pusty stos i stan akceptujący
- ...

Plan

Automaty bez stanów (z jednym stanem)

Automat ze stosem bez stanów:

$$\mathcal{A} \;=\; (A, S, s_0, \delta)$$

- A – alfabet wejściowy
- S – alfabet stosowy
- $s_0 \in S$ – symbol początkowy
- $\delta \subseteq_{\text{fin}} S \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times S^*$ $\qquad s \xrightarrow{a} w$

Twierdzenie

(automaty ze stosem) $\equiv$ *(automaty ze stosem bez stanów).*

Dowód:

Niech $\mathcal{A} \;=\; (A, Q, q_0, S, s_0, \delta)$. Definiujemy $\mathcal{A}' \;=\; (A, S', s'_0, \delta')$:

- $S' \;=\; Q \times S \times Q$
- $s'_0 \;=\; (q_0, s_0, q)$, q – dowolny stan

$$s'_0 \;=\; \left\langle \begin{array}{c} q_0 \\ s_0 \\ q \end{array} \right\rangle$$

Konstrukcja równoważnego automatu bez stanów

- dla każdego przejścia $\left(q \xrightarrow{\mathbf{pop}(s),a,\mathbf{push}(\varepsilon)} p\right) \in \delta$, relacja δ' zawiera przejście

$$\left\langle \begin{matrix} q \\ s \\ p \end{matrix} \right\rangle \xrightarrow{a} \varepsilon$$

- dla każdego przejścia $\left(q \xrightarrow{\mathbf{pop}(s),a,\mathbf{push}(s_n s_{n-1} \dots s_2 s_1)} p\right) \in \delta$ $(n \geq 1)$, i dowolnych stanów $q_1, q_2, \dots, q_n$, relacja δ' zawiera przejścia

$$\left\langle \begin{matrix} q \\ s \\ q_1 \end{matrix} \right\rangle \xrightarrow{a} \begin{matrix} \left\langle \begin{matrix} p \\ s_n \\ q_n \end{matrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{matrix} q_n \\ s_{n-1} \\ q_{n-1} \end{matrix} \right\rangle \\ \dots \\ \left\langle \begin{matrix} q_3 \\ s_2 \\ q_2 \end{matrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{matrix} q_2 \\ s_1 \\ q_1 \end{matrix} \right\rangle \end{matrix}$$

Konstrukcja równoważnego automatu bez stanów (c.d.)

Poprawność wynika z obserwacji:

$$\left\langle \begin{array}{c} q \\ s \\ p \end{array} \right\rangle \xrightarrow{w} \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad (q, s) \xrightarrow{w} (p, \varepsilon),$$

którą nietrudno dowieść przez indukcję względem długości biegu.

rysunek

Udowodniliśmy:

Twierdzenie

(automaty ze stosem) $\equiv$ *(automaty ze stosem bez stanów).*

Pytanie

Czy (automaty ze stosem) $\equiv$ (automaty ze stosem bez pustych przejść)?

Automaty ze stosem a gramatyki bezkontekstowe

Twierdzenie

(automaty ze stosem) $\equiv$ *(gramatyki bezkontekstowe).*

Dowód:

Zakładamy, że słowo puste nie należy do języka.

- Niech $\mathcal{A} = (A, S, s_0, \delta)$ automat ze stosem bez stanów. Definiujemy gramatykę $\mathcal{G} = (A, S, s_0, \alpha)$:

$$(s, a, w) \in \delta \iff s \longrightarrow_{\mathcal{G}} a\, w \qquad (s \in S, a \in A \cup \{\varepsilon\}, w \in S^*)$$

- Niech $\mathcal{G} = (A, N, s_0, \alpha)$ w postaci Greibach. Definiujemy automat bez stanów $\mathcal{A} = (A, N, s_0, \delta)$:

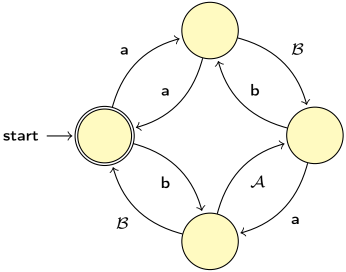
$$(s, a, w) \in \delta \iff s \longrightarrow_{\mathcal{G}} a\, w \quad (s \in N,\ a \in A,\ w \in N^*)$$

Wniosek

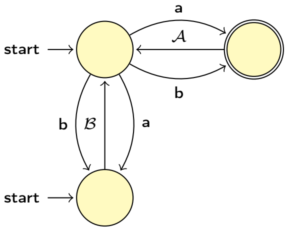
(automaty ze stosem) $\equiv$ *(automaty ze stosem bez pustych przejść i bez stanów).*

Plan

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



Weryfikacja

Automat ze stosem $\mathcal{A} = (A, Q, q_0, F, S, s_0, \delta)$

Twierdzenie

Zbiór konfiguracji osiągalnych jest efektywnie regularny.

Konfiguracja: $c = (q, v) \in Q \times S^*$.
$c = qv \in QS^*$.

Zbiór konfiguracji osiągalnych $L \subseteq QS^*$.

Lemat

Dla regularnego zbioru konfiguracji $L \subseteq QS^*$, zbiór konfiguracji osiągalnych z L jest efektywnie regularny.

Lemat

Dla regularnego zbioru konfiguracji $L \subseteq QS^*$, zbiór konfiguracji osiągalnych z L jest efektywnie regularny.

Przykład

$(q_0, \textbf{push}(s), a, q_0)$ $(q_0, \textbf{nop}, \varepsilon, q)$ $(q, \textbf{pop}(s_0), \varepsilon, q_f)$
$(q, \textbf{pop}(s), b, q)$

$(q_0, \textbf{push}(s), \_, q_0)$ $(q_0, \textbf{nop}, \_, q)$ $(q, \textbf{pop}(s_0), \_, q_f)$
$(q, \textbf{pop}(s), \_, q)$ rysunek

$q_0 \longrightarrow q_0 s$ $q_0 \longrightarrow q$ $qs_0 \longrightarrow q_f$
$qs \longrightarrow q$

W następnym odcinku:

- pompowanie języków bezkontekstowych
- deterministyczne automaty ze stosem
- własności domknięcia
- ...