Języki, automaty i obliczenia

Wykład 4: Minimalizacja automatów

Sławomir Lasota

Uniwersytet Warszawski

20 marca 2024

Plan

1. Języki regularne mają skończenie wiele ilorazów lewostronnych
2. Minimalizacja automatów deterministycznych
3. *Minimalizacja automatów niedeterministycznych?

Równoważność syntaktyczna (równoważność Myhilla-Nerode'a)

Notacja

$w^{-1}L$ zamiast $\{w\}^{-1}L \; = \; \{\, u \in A^* \; : \; w\,u \in L \,\}$

Język $L \subseteq A^*$ określa relację równoważności w A^*:

$$w \sim_L v \iff w^{-1}L \; = \; v^{-1}L$$

Równoważnie:

$$w \sim_L v \iff \forall u \in A^*.\, (w\,u \in L \iff v\,u \in L)$$

Fakt ($\sim_L$ jest L-niezmiennicza)

$w \sim_L v \implies (w \in L \iff v \in L)$

rysunek

Dowód:

$$w \in L \iff \varepsilon \in w^{-1}L$$

Równoważność syntaktyczna

$$w \sim_L v \iff w^{-1}L = v^{-1}L \iff \forall u \in A^*. \, (w\,u \in L \iff v\,u \in L)$$

Przykład

$$A = \{a, b\} \qquad \varepsilon^{-1}L = L \qquad \varepsilon \sim_L ab \sim_L abab \sim_L \dots$$

$$L = (ab)^* \qquad a^{-1}L = bL \qquad a \sim_L aba \sim_L ababa \sim_L \dots$$

$$b^{-1}L = \emptyset \qquad b \sim_L aa \sim_L abb \sim_L \dots$$

$$A = \{a, b\} \qquad (a^k)^{-1}L = \{\, a^n b^{n+k} \;:\; n \in \mathbb{N} \,\}$$

$$L = \{\, a^n b^n \;:\; n \in \mathbb{N} \,\}$$

Twierdzenie (Myhill-Nerode 1958)

Niech $L \subseteq A^*$. Następujące warunki są równoważne:

- *L jest regularny*
- *$\sim_L$ ma skończony indeks*

Dowód (L regularny $\implies \sim_L$ ma skończony indeks)

Niech $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$ automat deterministyczny rozpoznający L.

Dla $q \in Q$, niech $L_q(\mathcal{A}) \; = \; \ldots$

Fakt

$L_{\widehat{\delta}(q_0, w)}(\mathcal{A}) \; = \; w^{-1}L$, *dla każdego* $w \in A^*$.

Zdefiniujmy relację równoważności $\sim_{\mathcal{A}}$ na A^*:

$$w \sim_{\mathcal{A}} v \iff \widehat{\delta}(q_0, w) = \widehat{\delta}(q_0, v).$$

Relacja ta ma skończony indeks. Używamy faktu powyżej, by dowieść

$$w \sim_{\mathcal{A}} v \implies w \sim_L v.$$

Czyli indeks relacji $\sim_L$ jest niewiększy niż indeks relacji $\sim_{\mathcal{A}}$.

Wniosek

Każdy automat deterministyczny rozpoznający język L ma przynajmniej indeks($\sim_L$) stanów.

Dowód ($\sim_L$ ma skończony indeks $\implies$ L regularny)

Konstruujemy automat deterministyczny $\mathcal{A}_L$ (*automat syntaktyczny*):

- $Q' \;=\; A^*/{\sim_L} = \{\, [w]_{\sim_L} \;:\; w \in A^* \,\}$
- $q_0' \;=\; [\varepsilon]_{\sim_L}$
- $F' \;=\; \{\, [w]_{\sim_L} \;:\; w \in L \,\}$
- $\delta'([w]_{\sim_L}, a) \;=\; [w\,a]_{\sim_L}$

Fakt ($\sim_L$ jest prawą kongruencją)

$w \sim_L v \quad\implies\quad w\,a \sim_L v\,a$

Dowód:

$$(w\,a)^{-1}L \;=\; a^{-1}(w^{-1}L) \;=\; a^{-1}(v^{-1}L) \;=\; (v\,a)^{-1}L$$

Fakt

$L(\mathcal{A}_L) \;=\; L$

Dowód:

$$w \in L(\mathcal{A}_L) \iff \widehat{\delta}'(q_0', w) \in F' \iff [w]_{\sim_L} \in F' \iff w \in L$$

Dowód ($\sim_L$ ma skończony indeks $\implies$ L regularny)

Konstruujemy automat deterministyczny $\mathcal{A}_L$ (*automat syntaktyczny*):

- $Q' \;=\; \{\, w^{-1}L \;:\; w \in A^* \,\}$
- $q_0' \;=\; L \;=\; \varepsilon^{-1}L$
- $F' \;=\; \{\, M \in Q' \;:\; \varepsilon \in M \,\}$
- $\delta'(M, a) \;=\; a^{-1}M$

Fakt

$\widehat{\delta}'(q_0', w) \;=\; w^{-1}L$

Dowód:

$$a^{-1}(w^{-1}L) \;=\; (w\,a)^{-1}L$$

Fakt

$L(\mathcal{A}_L) \;=\; L$

Dowód:

$$w \in L(\mathcal{A}_L) \iff \widehat{\delta}'(q_0', w) \in F' \iff \varepsilon \in w^{-1}L \iff w \in L$$

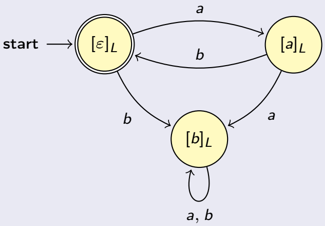
Automat $\mathcal{A}_L$ (przykład)

- $Q' \;=\; A^*/{\sim_L} = \{\,[w]_{\sim_L} \;:\; w \in A^*\,\}$
- $q_0' \;=\; [\varepsilon]_{\sim_L}$
- $F' \;=\; \{\,[w]_{\sim_L} \;:\; w \in L\,\}$
- $\delta'([w]_{\sim_L}, a) \;=\; [w\,a]_{\sim_L}$

- $Q' \;=\; \{\,w^{-1}L \;:\; w \in A^*\,\}$
- $q_0' \;=\; L \;=\; \varepsilon^{-1}L$
- $F' \;=\; \{\,M \in Q' \;:\; \varepsilon \in M\,\}$
- $\delta'(M, a) \;=\; a^{-1}M$

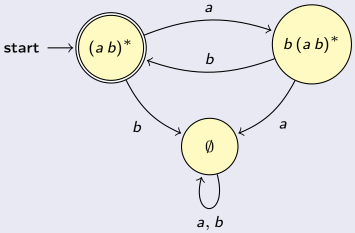
Przykład

$L = (a\,b)^*$



Przykład

$L = (a\,b)^*$



Automat minimalny

Wniosek

Każdy automat deterministyczny rozpoznający L ma przynajmniej indeks$(\sim_L)$ stanów.

Automat $\mathcal{A}_L$ ma indeks$(\sim_L)$ stanów.

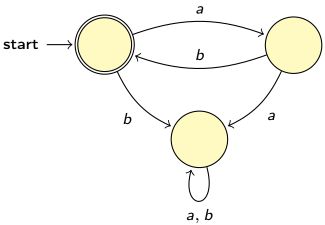
Czyli $\mathcal{A}_L$ to minimalny automat deterministyczny rozpoznający język L.

Pytanie

Czy automat minimalny jest wyznaczony jednoznacznie?

Dowodzenie minimalności (przykład)

Czy ten automat jest minimalny?



Tak!

Każdy automat deterministyczny rozpoznający $L = (a\,b)^*$ ma przynajmniej 3 stany.

Dowód:

	ε	a	b
ε	$\times$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{a\,b}$
a	$\times$	$\times$	$\mathbf{b}$
b	$\times$	$\times$	$\times$

$\varepsilon\,\mathbf{b} \notin L$ $\qquad a\,\mathbf{b} \in L$

$\varepsilon\,\mathbf{a\,b} \in L$ $\qquad b\,\mathbf{a\,b} \notin L$

$a\,\mathbf{b} \in L$ $\qquad b\,\mathbf{b} \notin L$

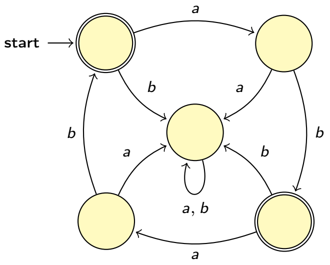
Plan

Kongruencja

Niech $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$ automat deterministyczny.

Kongruencja w $\mathcal{A}$ to relacja równoważności $R \subseteq Q \times Q$ taka, że

$$R(q,p) \implies (q \in F \iff p \in F)$$
$$R(q,p) \implies R(\delta(q,a), \delta(p,a)), \qquad \text{dla każdego } a \in A.$$



Automat ilorazowy

Niech $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$ automat deterministyczny.

Kongruencja w $\mathcal{A}$ to relacja równoważności $R \subseteq Q \times Q$ taka, że

$$R(q,p) \implies (q \in F \iff p \in F)$$
$$R(q,p) \implies R(\delta(q,a), \delta(p,a)), \quad \text{dla każdego } a \in A.$$

Automat ilorazowy $\mathcal{A}/R$:

- $A' = A$
- $Q' = Q/R = \{ [q]_R : q \in Q \}$
- $q_0' = [q_0]_R$
- $F' = F/R = \{ [q]_R : q \in F \}$
- $\delta'([q]_R, a) = [\delta(q,a)]_R$

Fakt

$L(\mathcal{A}/R) = L(\mathcal{A})$

Dowód:

$$\widehat{\delta}'([q_0]_R, w) = [\widehat{\delta}(q_0, w)]_R$$

Automat minimalny jako automat ilorazowy

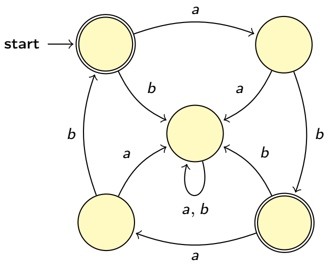
Niech $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$ automat deterministyczny. Niech $L = L(\mathcal{A})$. Załóżmy, że wszystkie stany automatu $\mathcal{A}$ są osiągalne.

Definiujemy kongruencję w $\mathcal{A}$ następująco:

$$q \equiv_{\mathcal{A}} p \text{ wtw. gdy } L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A})$$

Czy to jest kongruencja? Należy sprawdzić:

$$L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A}) \implies (q \in F \iff p \in F)$$
$$L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A}) \implies L_{\delta(q,a)}(\mathcal{A}) = L_{\delta(p,a)}(\mathcal{A}), \quad \text{dla każdego } a \in A.$$



Automat minimalny jako automat ilorazowy

Niech $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$ automat deterministyczny. Niech $L = L(\mathcal{A})$. Załóżmy, że wszystkie stany automatu $\mathcal{A}$ są osiągalne.

Definiujemy kongruencję w $\mathcal{A}$ następująco:

$$q \equiv_{\mathcal{A}} p \ \text{ wtw. gdy } \ L_q(\mathcal{A}) \ = \ L_p(\mathcal{A})$$

Fakt

Automaty $\mathcal{A}/{\equiv_{\mathcal{A}}}$ i $\mathcal{A}_L$ są izomorficzne.

Dowód:

- $Q' \ = \ \{ L_q(\mathcal{A}) \ : \ q \in Q \}$
- $q_0' \ = \ L_{q_0}(\mathcal{A})$
- $F' \ = \ \{ L_q(\mathcal{A}) \ : \ q \in F \}$
- $\delta'(L_q(\mathcal{A}), a) \ = \ L_{\delta(q,a)}(\mathcal{A})$

- $Q' \ = \ \{ w^{-1}L \ : \ w \in A^* \}$
- $q_0' \ = \ L \ = \ \varepsilon^{-1}L$
- $F' \ = \ \{ M \in Q' \ : \ \varepsilon \in M \}$
- $\delta'(M, a) \ = \ a^{-1}M$

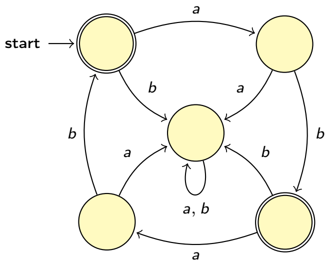
Użyjmy faktu:

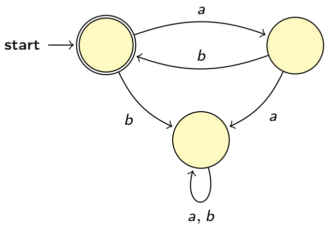
$$L_{\widehat{\delta}(q_0, w)}(\mathcal{A}) \ = \ w^{-1}L, \qquad \text{dla każdego } w \in A^*.$$

Wniosek

Automat minimalny $\mathcal{A}_L$ jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu).

$L = (a\,b)^*$





Problem minimalizacji

Problem obliczeniowy

Dane: automat deterministyczny $\mathcal{A}$

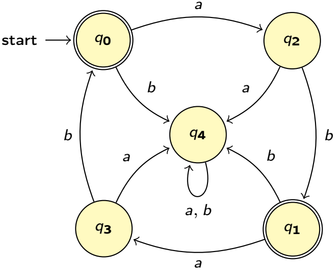
Wynik: automat (izomorficzny do automatu) $\mathcal{A}_L$

Algorytm minimalizacji

- `usuń stany nieosiągalne z automatu` $\mathcal{A}$
- `oblicz relację` $\equiv_{\mathcal{A}}$ $\quad q \equiv_{\mathcal{A}} p$ `wtw. gdy` $L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A})$
- `oblicz automat ilorazowy` $\mathcal{A}/{\equiv_{\mathcal{A}}}$

Jak obliczyć relację $\equiv_{\mathcal{A}}$?

$q \equiv_{\mathcal{A}} p$ wtw. gdy $L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A})$



	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_0			×	×	×
q_1			×	×	×
q_2	×	×			
q_3	×	×			
q_4	×	×	×		

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_0			×	×	×
q_1			×	×	×
q_2	×	×			×
q_3	×	×			×
q_4	×	×	×	×	

Początkowa równoważność:

$$q \equiv_0 p \iff (q \in F \iff p \in F)$$

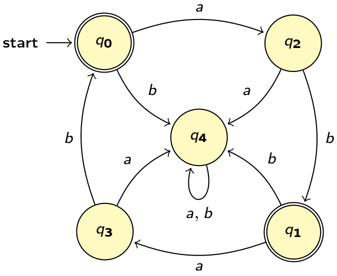
Uszczegółowienie:

$$q \equiv_{n+1} p \iff q \equiv_n p \quad \wedge \quad \forall a \in A \;\; \delta(q,a) \equiv_n \delta(p,a)$$

$q \equiv_{\mathcal{A}} p \iff \forall n \;\; q \equiv_n p$

Jak obliczyć relację $\equiv_{\mathcal{A}}$?

$q \equiv_{\mathcal{A}} p$ wtw. gdy $L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A})$



	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_0			×	×	×
q_1			×	×	×
q_2	×	×			
q_3	×	×			
q_4	×	×	×		

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_0			×	×	×
q_1			×	×	×
q_2	×	×			×
q_3	×	×			×
q_4	×	×	×	×	

Skonstruuj graf:

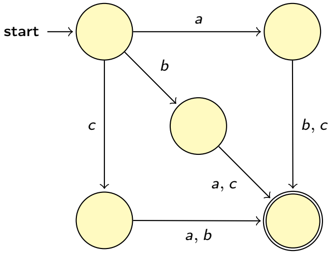
wierzchołki: Q^2

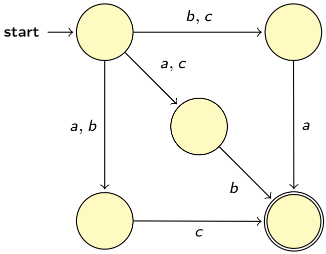
krawędzie: $(q, p) \to (\delta(q, a), \delta(p, a))$

$q \equiv_{\mathcal{A}} p \iff$ nie ma ścieżki z wierzchołka (q, p) do $F \times (Q - F) \cup (Q - F) \times F$

Algorytm Brzozowskiego *

- $\mathcal{A} \mapsto R(\mathcal{A})$ $\qquad L(R(\mathcal{A})) = L(\mathcal{A})^R$





- $\mathcal{A} \mapsto P(\mathcal{A})$ konstrukcja podzbiorowa

- $\mathcal{A} \mapsto P(R(P(R(\mathcal{A}))))$

$$P(\underbrace{R(P(R(\mathcal{A})))}_{\text{ko-deterministyczny automat } \mathcal{A}'})$$

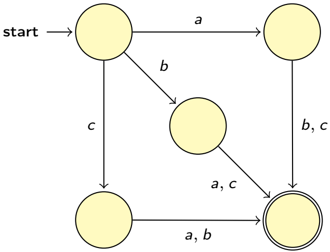
języki $L_q(\mathcal{A}')$ stanowią podział A^*

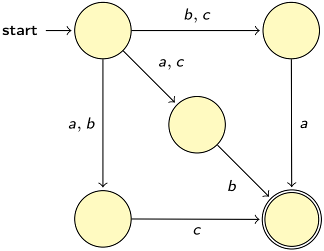
$P(\mathcal{A}')$ jest minimalny

Plan

1. Języki regularne mają skończenie wiele ilorazów lewostronnych
2. Minimalizacja automatów deterministycznych
3. *Minimalizacja automatów niedeterministycznych?

Brak jednoznaczności *





Relacja $\equiv_{\mathcal{A}}$ dla automatów niedeterministycznych *

$$q \equiv_{\mathcal{A}} p \quad \iff \quad \forall n \;\; q \equiv_n p$$

Dla automatów deterministycznych:

$$\begin{aligned} q \;\equiv_0\; p &\iff (q \in F \iff p \in F) \\ q \;\equiv_{n+1}\; p &\iff q \equiv_n p \quad \wedge \quad \forall a \in A \;\; \delta(q,a) \;\equiv_n\; \delta(p,a) \end{aligned}$$

Dla automatów niedeterministycznych:

$$\begin{aligned} q \;\equiv_0\; p &\iff (q \in F \iff p \in F) \\ q \;\equiv_{n+1}\; p &\iff q \equiv_n p \quad \wedge \quad \forall a \in A \\ &\qquad \forall q' \;\; \delta(q,a,q') \implies \exists p' \;\; \delta(p,a,p') \;\wedge\; q' \;\equiv_n\; p' \\ &\qquad \forall p' \;\; \delta(p,a,p') \implies \exists q' \;\; \delta(q,a,q') \;\wedge\; q' \;\equiv_n\; p' \end{aligned}$$

$q \equiv_{\mathcal{A}} p \quad \iff \quad$ Duplikator ma strategię wygrywającą z pozycji (q,p)

Gra bisymulacyjna *

Dwaj gracze Spoiler i Duplikator, gra rozgrywana w rundach. Runda rozpoczyna się w pozycji $(q, p) \in Q^2$ i przebiega następująco:

- Spoiler wybiera jeden ze stanów (powiedzmy q), literę $a \in A$, i stan q' taki, że

$$\delta(q, a, q');$$

- w odpowiedzi Duplikator wybiera stan p' taki, że

$$\delta(p, a, p')$$

  i kolejna runda zaczyna się w pozycji (q', p').

Kto nie może wykonać ruchu, natychmiast przegrywa. Rozgrywkę nieskończoną wygrywa zawsze Duplikator.