Języki, automaty i obliczenia

zadania z gwiazdką (seria 3), termin: 10 czerwca 2015

Zad. 1. Niech $A = \{a, b, c, d\}$. Dwa słowa $w, v \in A^*$ są *trans-równoważne* jeśli jedno z nich można otrzymać z drugiego za pomocą skończonego ciągu *transpozycji*. Transpozycją nazywamy zamianę kolejności sąsiadujących ze sobą dwóch liter, z których jedna to a albo b, a druga to c albo d:

$$ac \mapsto ca, \qquad ad \mapsto da, \qquad bc \mapsto cb, \qquad \text{albo} \qquad bd \mapsto db.$$

(Nie dopuszczamy zamian innych par, np. nie dupuszczamy zamiany $ab \mapsto ba$.) Czy następujący problem jest rozstrzygalny: dla danego automatu skończonego $\mathcal{A}$ nad A stwierdzić, czy każde słowo $w \in A^*$ jest trans-równoważne jakiemuś słowu $v \in L(\mathcal{A})$?

Zad. 2. Rozważmy automaty skończone *z licznikami.* Automat z licznikami ma dodatkowo skończony zbiór liczników C, których wartościami w trakcie biegu automatu są nieujemne liczby całkowite. Na początku biegu wszystkie liczniki są równe 0. Każde z przejść automatu wykonuje dodatkowo operację licznikową: $c{+}{+}$ lub $c{-}{-}$, czyli zwiększenie albo zmniejszenie o 1 licznika $c \in C$, przy czym automatowi nie wolno wykonać operacji $c{-}{-}$ gdy wartość licznika c wynosi 0. Czyli relacja przejścia automatu z licznikami to

$$\delta \;\subseteq\; Q \times A \times \{c{+}{+}, c{-}{-} \;:\; c \in C\} \times Q.$$

Bieg jest akceptujący jeśli kończy się w stanie akceptującym (niezależnie od wartości liczników na końcu biegu). Czy rozstrzygalny jest problem pustości dla automatów z licznikami (dla danego automatu A rozstrzygnąć, czy $L(A) = \emptyset$)?

Jako przygotowanie, warto rozważyć problem ograniczoności: dla danego automatu A z licznikami stwierdzić, czy istnieje liczba naturalna n taka, że dla każdego słowa wejściowego, w każdym biegu na tym słowie wartość każdego z liczników jest zawsze mniejsza niż n.

Zad. 3. Czy problem stopu jest rozstrzygalny dla *roztargnionych* maszyn Turinga? Roztargniona maszyna Turinga może dodatkowo w każdym momencie obliczenia „zgubić" bieżący symbol taśmowy. Formalnie, roztargnione maszyny mają dodatkowe „gubiące" przejścia pomiędzy konfiguracjami: dla dowolnych ciągów symboli taśmowych $w, v \in T^*$, symbolu $a \in T$ oraz stanu $q \in Q$, mamy przejście (nie zmieniające stanu)

$$w\,q\,a\,v \;\longrightarrow w\,q\,v.$$

Zad. 4. Przez *relację* rozumiemy dowolny podzbiór $X \subseteq \mathbb{N}^n$, dla dowolnego $n \geq 1$, np. podzbiór $\mathbb{N}^3$ definiowany przez formułę

$$\phi(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 > x_2 + 1 = x_3 \vee (x_1 + 1 + 1 < x_2 < x_3 \wedge x_1 = 0).$$

Przez *formułę prostą* rozumiemy dowolną formułę bez kwantyfikatorów mogącą używać stałej 0, równości = oraz następnika +1. Rozważmy najmniejszy zbiór relacji X, który zawiera wszystkie relacje definiowalne formułami prostymi, i taki, że

- jeśli $r \subseteq \mathbb{N}^{2n}$ należy do X, to również domknięcie przechodnie $r^* \subseteq \mathbb{N}^{2n}$ należy do X, gdzie
$$r^*(\vec{a}, \vec{b}) \iff \exists \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{N}^n.\ \vec{a} = \vec{a}_1,\ \vec{b} = \vec{a}_m,\ \forall i < m.\ r(\vec{a}_i, \vec{a}_{i+1});$$
- jeśli $r \subseteq \mathbb{N}^n$ należy do X, to rzutowanie r na dowolny podzbiór współrzędnych $\{1 \ldots n\}$ też należy do X.

Czy zbiór X jest zamknięty na dopełnienia? To znaczy, czy jeśli $r \subseteq \mathbb{N}^n$ należy do X, to również $\mathbb{N}^n - r$ należy do X?