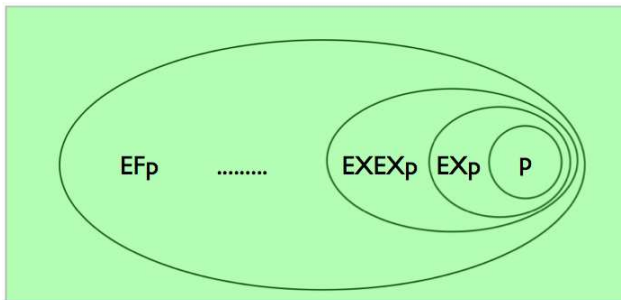
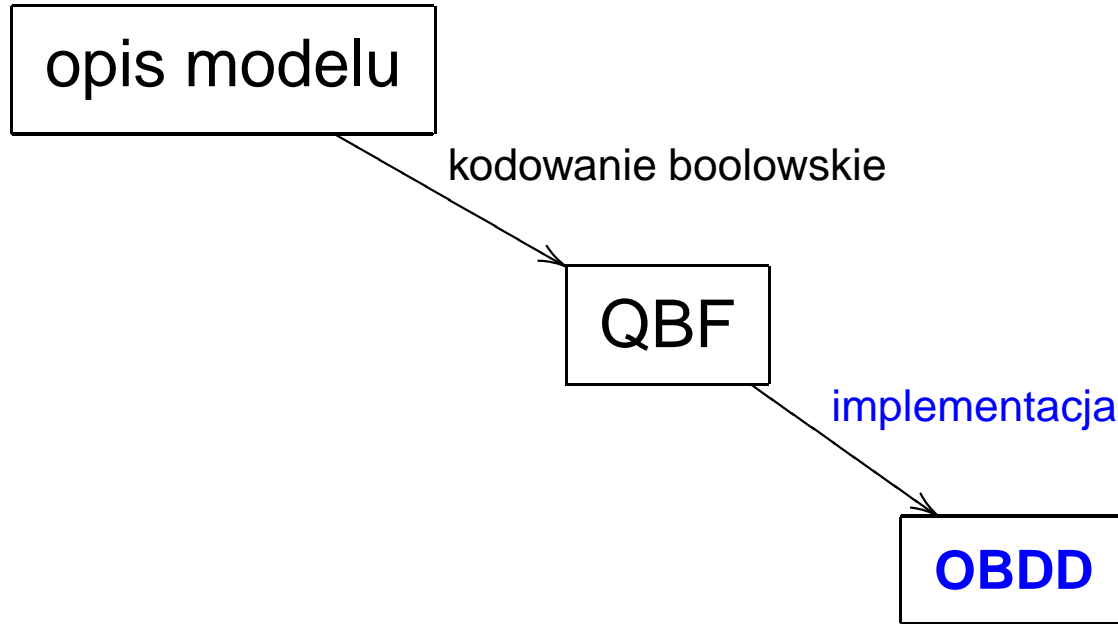


Weryfikacja wspomagana komputerowo

Wykład 8: Weryfikacja ograniczona

Symboliczna weryfikacja modelowa (SMC)



weryfikacja modelowa = operacje na OBDDs

Przykład: EF p (bezpieczeństwo)

pre-SMC:

$$\dots \supseteq p \cup \mathbf{EX}(p \cup \mathbf{EX}p) \supseteq p \cup \mathbf{EX}p \supseteq p \supseteq \text{false}$$

$$\dots \supseteq p \cup \text{pre}(p \cup \text{pre}(p)) \supseteq p \cup \text{pre}(p) \supseteq p \supseteq \text{false}$$

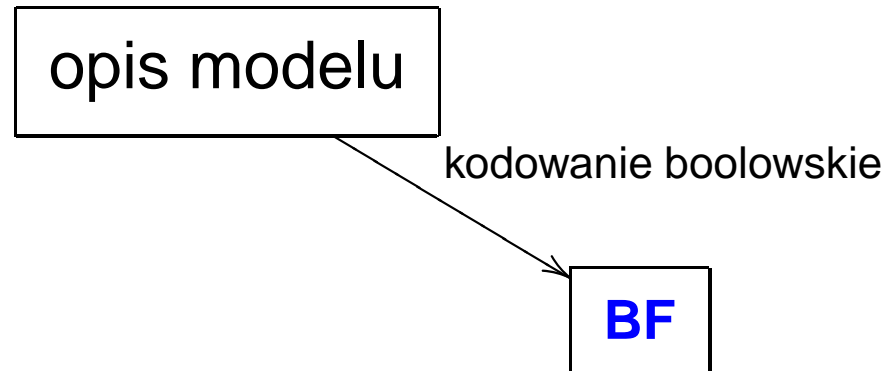
post-SMC:

$$S_0 \subseteq S_0 \cup \text{post}(S_0) \subseteq S_0 \cup \text{post}(S_0 \cup \text{post}(S_0)) \subseteq \dots$$

$$\exists \vec{z}_0 \exists \vec{z}_1 \dots \exists \vec{z}_k \quad \vec{z}_0 \longrightarrow \vec{z}_1 \longrightarrow \vec{z}_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow \vec{z}_{k-1} \longrightarrow \vec{z}_k$$

$$\vec{z} = \vec{z}_0 \vee \vec{z} = \vec{z}_1 \vee \dots \vee \vec{z} = \vec{z}_k$$

Ograniczona weryfikacja modelowa (BMC)



weryfikacja modelowa = spełnialność formuły boolowskiej

$$\vec{z}_0 \longrightarrow \vec{z}_1 \longrightarrow \vec{z}_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow \vec{z}_{k-1} \longrightarrow \vec{z}_k$$

$$p(\vec{z}_0) \vee p(\vec{z}_1) \vee p(\vec{z}_2) \vee \dots \vee p(\vec{z}_k)$$

Ograniczona weryfikacja modelowa (MBC)

- poszukiwanie kontrprzykładów **ograniczonej** długości
- symboliczna ścieżka
- wykorzystanie **rozwiązywaczy SAT** (ang. *SAT-solvers*)

I. Weryfikacja ograniczona

$$M \models \mathbf{E} \phi \quad (\phi \in \mathbf{LTL}^+)$$

np. zamiast $M \models \mathbf{AG} \phi$, sprawdzamy $M \models \mathbf{EF} \neg \phi$

M opisany przez formuły boolowskie:

$$R(\vec{z}, \vec{z}'), \quad L_p(\vec{z}), \quad S_0(\vec{z})$$

$$R(z_1, \dots, z_m, z'_1, \dots, z'_m), \quad L_p(z_1, \dots, z_m), \quad S_0(z_1, \dots, z_m)$$

Pomysł: horyzont $k \geq 0$

k kroków systemu

$\Pi \vDash_k \phi$ k kroków wystarczy by stwierdzić, że $\Pi \vDash \phi$

Lem.: $\Pi \vDash_k \phi \implies \Pi \vDash \phi$

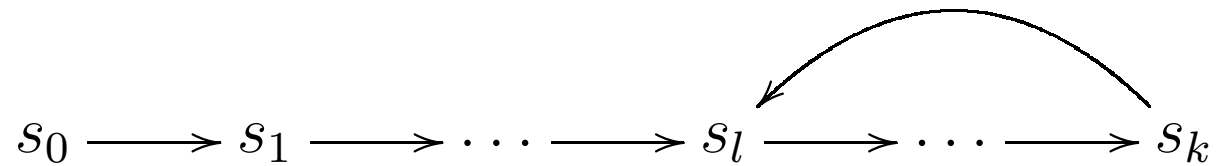
Lem.: $M \vDash \mathbf{E} \phi \implies \exists k \geq 0. M \vDash_k \mathbf{E} \phi$

pętle!

Tw.: $M \vDash \mathbf{E} \phi \iff \exists k \geq 0. M \vDash_k \mathbf{E} \phi$

$$\Pi = s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$$

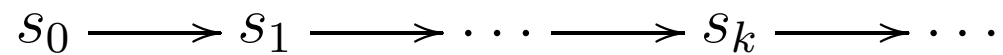
(k, l) - pętla:



$$s_{k+1+i} = s_{l+i}$$

(k) - pętla

brak pętli:



Semantyka ograniczona dla k -pętli

$$\Pi \vDash_k \phi \iff \Pi \vDash \phi$$

$$\Pi = s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$$

Semantyka ograniczona dla nie-pętli

$$\Pi \models_k \phi \iff \Pi \models_k^0 \phi$$

$$\Pi = s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$$

$$\models_k^i, \quad 0 \leq i \leq k$$

Semantyka ograniczona dla nie-pętli

$$\Pi \models_k \phi \iff \Pi \models_k^0 \phi$$

$$\Pi = s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$$

$$\models_k^i, \quad 0 \leq i \leq k$$

$$\Pi \models_k^i p \iff p \in L(s_i)$$

$$\Pi \models_k^i \neg p, \quad \phi_1 \wedge \phi_2, \quad \phi_1 \vee \phi_2 \iff \dots$$

$$\Pi \models_k^i \mathbf{X} \phi \iff i < k \text{ i } \Pi \models_k^{i+1} \phi$$

$$\Pi \models_k^i \mathbf{F} \phi \iff \exists j, i \leq j \leq k. \Pi \models_k^j \phi$$

$$\Pi \models_k^i \mathbf{G} \phi \quad \text{nigdy}$$

$$\Pi \models_k^i \phi \mathbf{U} \psi \iff \exists j, i \leq j \leq k. \Pi \models_k^j \psi \wedge \forall l, i \leq l < j. \Pi \models_k^l \phi$$

$$\Pi \models_k^i \phi \mathbf{R} \psi \iff ?$$

Tw.: $M \models \mathbf{E} \phi \iff \exists k \geq 0. M \models_k \mathbf{E} \phi$

- **jakie k jest wystarczająco duże? średnica grafu?**
- **brak pełności !**
- **efektywność SMC zależy od średnicy grafu**

$$M \vDash_k \mathbf{E} \phi \quad (\phi \in \mathbf{LTL}^+)$$

$$M, \phi, k \mapsto [M, \phi]_k$$

$$M \vDash_k \phi \iff [M, \phi]_k \text{ spełnialna}$$

M opisany przez formuły boolowskie:

$$R(\vec{z}, \vec{z}'), \quad L_p(\vec{z}), \quad S_0(\vec{z})$$

$$R(z_1, \dots, z_m, z'_1, \dots, z'_m), \quad L_p(z_1, \dots, z_m), \quad S_0(z_1, \dots, z_m)$$

Ścieżka symboliczna

$$\vec{z}_0 \longrightarrow \vec{z}_1 \longrightarrow \vec{z}_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow \vec{z}_{k-1} \longrightarrow \vec{z}_k$$

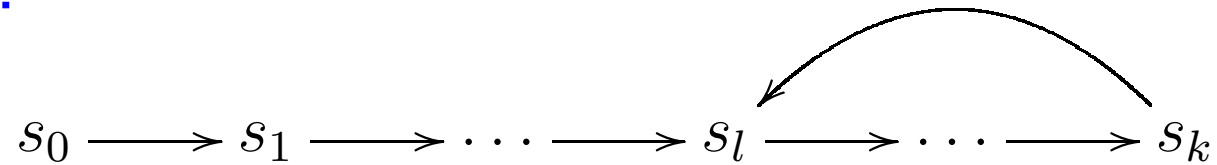
$$[M]_k := S_0(\vec{z}_0) \wedge \bigwedge_{i=0}^{k-1} R(\vec{z}_i, \vec{z}_{i+1})$$

$(k + 1) \cdot m$ zmiennych boolowskich

rozmiar formuły boolowskiej $[M]_k$ jest $\mathcal{O}(k \cdot |M|)$

Kodowanie boolowskie

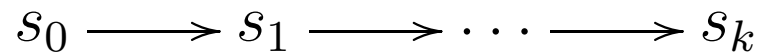
(k, l) - pętla:



$${}_l L_k \equiv R(\vec{z}_k, \vec{z}_l)$$

$$L_k \equiv \bigvee_{l=0}^k {}_l L_k$$

brak pętli:



$$[M, \phi]_k := [M]_k \wedge \left((\neg L_k \wedge [\phi]_k^0) \vee \bigvee_{l=0}^k (l L_k \wedge l[\phi]_k^0) \right)$$

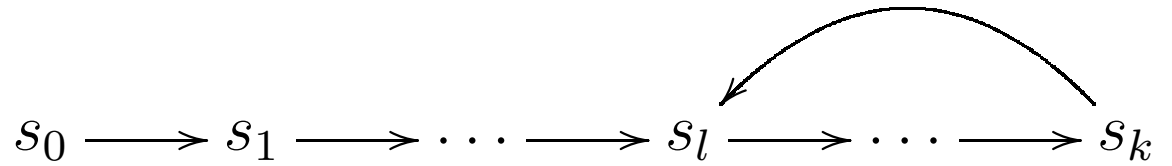
$l[\phi]_k^0$ – znaczenie ϕ na (k, l) -pętli

$[\phi]_k^0$ – znaczenie ϕ na nie-pętli

rozmiar formuły boolowskiej $[M, \phi]_k$ jest $\mathcal{O}(k \cdot (|M| + |\phi|))$

Kodowanie boolowskie

$$l[\phi]_k^i \quad 0 \leq l, i \leq k$$



$$l[p]_k^i \iff L_p(\vec{z}_i)$$

$$l[\neg p]_k^i \quad l[\phi \wedge \psi]_k^i$$

$$l[\phi \vee \psi]_k^i \iff l[\phi]_k^i \vee l[\psi]_k^i$$

$$l[X\phi]_k^i \iff l[\phi]_k^{\text{succ}(i)}$$

$$\text{succ}(i) = \begin{cases} i + 1 & i < k \\ l & i = k \end{cases}$$

$$\mathbf{F}\phi \equiv \phi \vee \mathbf{X}\mathbf{F}\phi$$

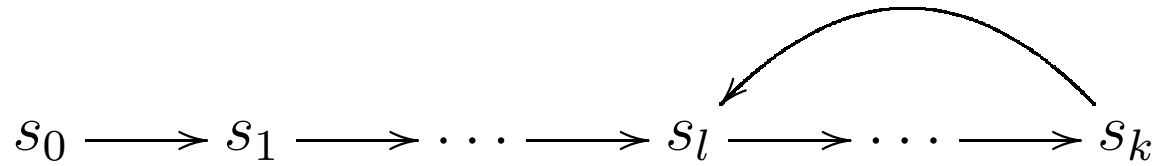
$$\phi \mathbf{U} \psi \equiv \psi \vee (\phi \wedge \mathbf{X}\phi \mathbf{U} \psi)$$

$$\mathbf{G}\phi \equiv \phi \wedge \mathbf{X}\mathbf{G}\phi$$

$$\phi \mathbf{R} \psi \equiv \psi \wedge (\phi \vee \mathbf{X}\phi \mathbf{R} \psi)$$

Kodowanie boolowskie

$$l[\phi]_k^i \quad 0 \leq l, i \leq k$$



$$l[p]_k^i \iff L_p(\vec{z}_i)$$

$$l[\neg p]_k^i \quad l[\phi \wedge \psi]_k^i \quad l[\phi \vee \psi]_k^i \iff l[\phi]_k^i \vee l[\psi]_k^i$$

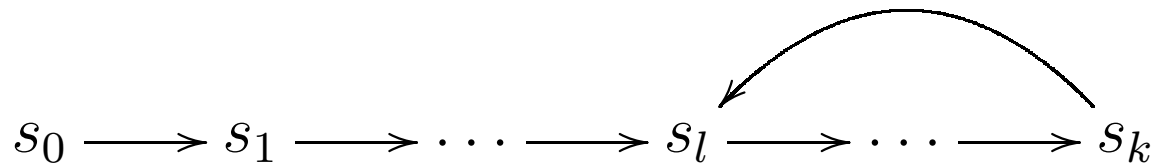
$$l[\mathbf{X} \phi]_k^i \iff l[\phi]_k^{\text{succ}(i)} \quad \text{succ}(i) = \begin{cases} i + 1 & i < k \\ l & i = k \end{cases}$$

$$l[\mathbf{F} \phi]_k^i \iff l[\phi]_k^i \vee l[\mathbf{F} \phi]_k^{\text{succ}(i)}$$

$$l[\mathbf{G} \phi]_k^i \iff l[\phi]_k^i \wedge l[\mathbf{G} \phi]_k^{\text{succ}(i)}$$

$$l[\phi \mathbf{U} \psi]_k^i \iff l[\psi]_k^i \vee (l[\phi]_k^i \wedge l[\phi \mathbf{U} \psi]_k^{\text{succ}(i)})$$

Przykład:



$${}_l[\mathbf{F} p]_k^0 \iff L_p(\vec{z}_0) \vee \dots \vee L_p(\vec{z}_k)$$

$${}_l[\mathbf{G} p]_k^0 \iff L_p(\vec{z}_0) \wedge \dots \wedge L_p(\vec{z}_k)$$

$${}_l[p \mathbf{U} q]_k^0 \iff L_q(\vec{z}_0) \vee (L_p(\vec{z}_0) \wedge (L_q(\vec{z}_1) \vee (\dots \\ L_q(\vec{z}_{k-1}) \vee (L_p(\vec{z}_{k-1}) \wedge L_q(\vec{z}_k)) \dots))))$$

$${}_l[\mathbf{F} \mathbf{G} p]_k^0 \iff (L_p(\vec{z}_0) \wedge L_p(\vec{z}_1) \wedge \dots \wedge L_p(\vec{z}_k)) \vee \\ (L_p(\vec{z}_1) \wedge \dots \wedge L_p(\vec{z}_k)) \vee \dots \vee (L_p(\vec{z}_l) \wedge \dots \wedge L_p(\vec{z}_k))$$

$$\iff (L_p(\vec{z}_l) \wedge \dots \wedge L_p(\vec{z}_k))$$

Rozmiar formuły boolowskiej $l[\phi]_k^0$ jest $\mathcal{O}(k \cdot |\phi|)$

dzięki „dzieleniu podformuł” $l[\phi]_k^i$

Kodowanie boolowskie

$$[\phi]_k^i \quad 0 \leq i \leq k$$

$$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow s_k$$

$$[p]_k^i \quad [\neg p]_k^i \quad [\phi \wedge \psi]_k^i \quad [\phi \vee \psi]_k^i \iff \dots \quad \text{j. w.}$$

$$[X\phi]_k^i \iff [\phi]_k^{i+1}$$

$$[\phi]_k^{k+1} \iff \text{false}$$

$$\mathbf{F}\phi \equiv \phi \vee \mathbf{X}\mathbf{F}\phi$$

$$\phi \mathbf{U} \psi \equiv \psi \vee (\phi \wedge \mathbf{X}\phi \mathbf{U} \psi)$$

$$\mathbf{G}\phi \equiv \phi \wedge \mathbf{X}\mathbf{G}\phi$$

$$\phi \mathbf{R} \psi \equiv \psi \wedge (\phi \vee \mathbf{X}\phi \mathbf{R} \psi)$$

Przykład:

$$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow s_k$$

$$[\mathbf{F} p]_k^0 \iff L_p(\vec{z}_0) \vee \dots \vee L_p(\vec{z}_k) \vee \mathbf{false}$$

$$[\mathbf{G} p]_k^0 \iff L_p(\vec{z}_0) \wedge \dots \wedge L_p(\vec{z}_k) \wedge \mathbf{false} \equiv \mathbf{false}$$

$$[p \mathbf{U} q]_k^0 \iff L_q(\vec{z}_0) \vee (L_p(\vec{z}_0) \wedge (L_q(\vec{z}_1) \vee (\dots \\ L_q(\vec{z}_{k-1}) \vee (L_p(\vec{z}_{k-1}) \wedge (L_q(\vec{z}_k) \vee (L_p(\vec{z}_k) \wedge \mathbf{false})))) \dots)))$$

$$[\mathbf{F} \mathbf{G} p]_k^0 \iff \mathbf{false}$$

$$[M, \phi]_k := [M]_k \wedge \left((\neg L_k \wedge [\phi]_k^0) \vee \bigvee_{l=0}^k (l L_k \wedge l[\phi]_k^0) \right)$$

Tw.: $M \models_k \mathbf{E} \phi \iff [M, \phi]_k$ jest spełnialna.

Powtarzaj:

(1) $k := k_0$

(2) jeśli $[M, \phi]_k$ spełnialna to stop

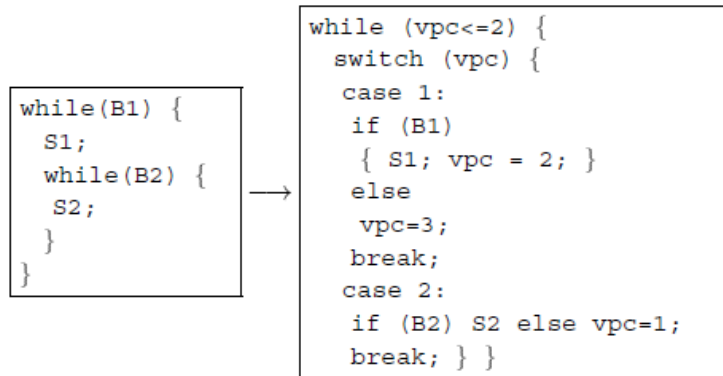
$M \models \mathbf{E} \phi$

(3) zwiększ k i kontynuuj

Inne kodowania boolowskie

- weryfikacji sprzętu:
 - zachowana jest informacja o strukturze układu
 - desygnowane rozwiązywacze SAT
- LTL z przeszłością
- weryfikacja oprogramowania (np. CBMC)
- programy współbieżne
- ...





```

x=x+y;
if(x!=1) {
  x=2;
  if(z) x++;
}
assert(x<=3);

```



```

x1=x0+y0;
if(x1!=1) {
  x2=2;
  if(z0) x3=x2+1;
}
assert(x3<=3);

```



```

C := (x1=x0+y0) ∧
x2 = ((x1 ≠ 1)?2:x1) ∧
x3 = ((x1 ≠ 1 ∧ z0)?x2+1:x2)
P := x3 ≤ 3

```

[Kroening, Clarke, Yorav 2003]

II. Pełność ?

Jak uzyskać pełność weryfikacji ograniczonej?

- ograniczenie dla k (bezpieczeństwo $G p$)
- równolegle sprawdzamy ϕ i $\neg\phi$ (żywołność $F p$)
- indukcja (bezpieczeństwo $G p$)

Głębokość – ograniczenie dla k

najmniejsze i t. że

$$\forall \vec{z}_0, \dots, \vec{z}_n. \exists \vec{z}'_0, \dots, \vec{z}'_t, t \leq i. S_0(\vec{z}_0) \wedge \bigwedge_{j=0}^{n-1} R(\vec{z}_j, \vec{z}_{j+1}) \implies$$

$$S_0(\vec{z}'_0) \wedge \left(\bigwedge_{j=0}^{t-1} R(\vec{z}'_j, \vec{z}'_{j+1}) \right) \wedge \vec{z}'_t = \vec{z}_n$$

Głębokość – ograniczenie dla k

najmniejsze i t. że

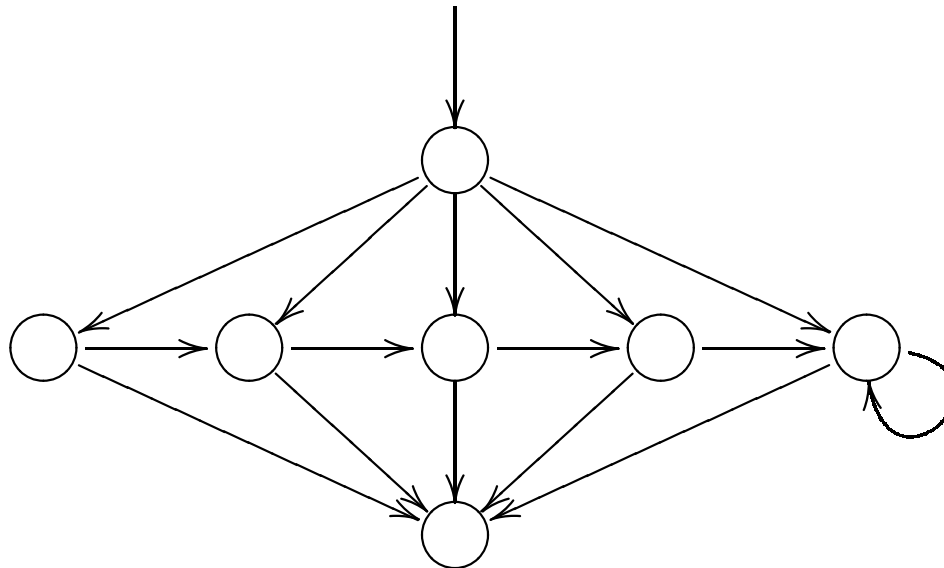
$$\forall \vec{z}_0, \dots, \vec{z}_{i+1}. \exists \vec{z}'_0, \dots, \vec{z}'_i. S_0(\vec{z}_0) \wedge \bigwedge_{j=0}^i R(\vec{z}_j, \vec{z}_{j+1}) \implies$$

$$S_0(\vec{z}'_0) \wedge \left(\bigwedge_{j=0}^{i-1} R(\vec{z}'_j, \vec{z}'_{j+1}) \right) \wedge \bigvee_{j=0}^i \vec{z}'_j = \vec{z}_{i+1}$$

najdłuższa ścieżka bez pętli – ograniczenie dla k

największe i t. że

$$\exists \vec{z}'_0, \dots, \vec{z}_i. S_0(\vec{z}_0) \wedge \left(\bigwedge_{j=0}^{i-1} R(\vec{z}_j, \vec{z}_{j+1}) \right) \wedge \bigwedge_{j=0}^{i-1} \bigwedge_{l=j+1}^i \vec{z}_j \neq \vec{z}_l$$



$M \models \mathbf{EG} \neg p \iff \exists k$ t. że następująca formuła jest spełnialna:

$$\mathbf{No}_k(\vec{z}_0, \dots, \vec{z}_{k+1}) \equiv S_0(\vec{z}_0) \wedge \bigwedge_{j=0}^{k-1} R(\vec{z}_j, \vec{z}_{j+1}) \wedge \left(\bigvee_{l=0}^k l L_k \right) \wedge \bigwedge_{j=0}^k \neg L_p(\vec{z}_j)$$

$M \models \mathbf{AF} p \iff \exists k$ t. że następująca formuła jest tautologią:

$$\mathbf{Yes}_k(\vec{z}_0, \dots, \vec{z}_{k+1}) \equiv S_0(\vec{z}_0) \wedge \bigwedge_{j=0}^{k-1} R(\vec{z}_j, \vec{z}_{j+1}) \implies \bigvee_{j=0}^k L_p(\vec{z}_j)$$

$M \models \mathbf{EG} \neg p \iff \exists k$ t. że następująca formuła jest spełnialna:

$$\mathbf{No}_k(\vec{z}_0, \dots, \vec{z}_{k+1}) \equiv S_0(\vec{z}_0) \wedge \bigwedge_{j=0}^{k-1} R(\vec{z}_j, \vec{z}_{j+1}) \wedge \left(\bigvee_{l=0}^k l L_k \right) \wedge \bigwedge_{j=0}^k \neg L_p(\vec{z}_j)$$

$M \models \mathbf{AF} p \iff \exists k$ t. że następująca formuła jest niespełnialna:

$$\neg \mathbf{Yes}_k(\vec{z}_0, \dots, \vec{z}_{k+1}) \equiv S_0(\vec{z}_0) \wedge \bigwedge_{j=0}^{k-1} R(\vec{z}_j, \vec{z}_{j+1}) \wedge \bigwedge_{j=0}^k \neg L_p(\vec{z}_j)$$

Powtarzaj:

(1) $k := 0$

(2) jeśli No_k spełnialna to stop

$$M \models EG \neg \phi$$

(3) jeśli $\neg Yes_k$ niespełnialna to stop

$$M \models Fp$$

(4) zwiększ k i kontynuuj

– warunki początkowe

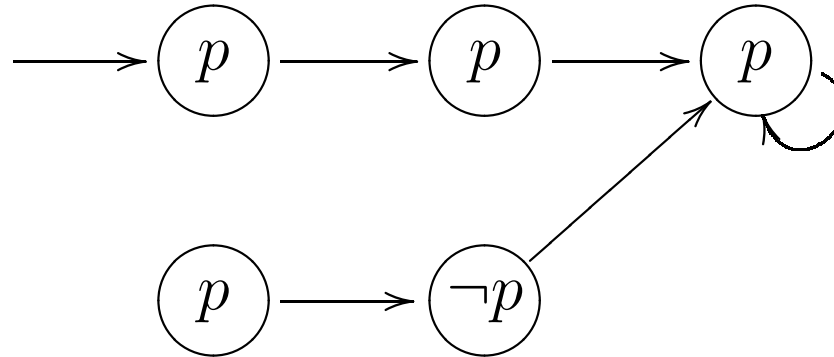
sprawdzamy, że poniższa formuła jest niespełnialna:

$$\mathbf{Base}_k(\vec{z}_0, \dots, \vec{z}_k) \equiv S_0(\vec{z}_0) \wedge \bigwedge_{j=0}^{k-1} R(\vec{z}_j, \vec{z}_{j+1}) \wedge \bigvee_{j=0}^k \neg L_p(\vec{z}_j)$$

– krok indukcyjny

sprawdzamy, że poniższa formuła jest niespełnialna:

$$\mathbf{Step}_k(\vec{z}_0, \dots, \vec{z}_{k+1}) \equiv \bigwedge_{j=0}^k (L_p(\vec{z}_j) \wedge R(\vec{z}_j, \vec{z}_{j+1})) \wedge \neg L_p(\vec{z}_{k+1})$$



Powtarzaj:

(1) $k := 0$

(2) jeśli Base_k spełnialna to stop

$$M \models \mathbf{EF} \neg \phi$$

(3) jeśli Step_k niespełnialna to stop

$$M \models \mathbf{G} p$$

(4) zwiększ k i kontynuuj

III. BDD czy SAT ?

bit	k	SMV ₂	MB	PROVER	MB
0	1	25	79	< 1	1
1	2	25	79	< 1	1
2	3	26	80	< 1	1
3	4	27	82	1	2
4	5	33	92	1	2
5	6	67	102	1	2
6	7	258	172	2	2
7	8	1741	492	7	3
8	9		> 1GB	29	3
9	10			58	3
10	11			91	3
11	12			125	3
12	13			156	4
13	14			186	4
14	15			226	4
15	16			183	5

[Biere, Cimatti, Clarke, Strichman, Zhu 2003]

- metody są komplementarne
- SAT bardziej przewidywalny
- BDD zachłanne pamięciowo, a SAT czasowo
- BDD daje pełność, SAT nie
- nieograniczona weryfikacja modelowa UMC:
 CNF zamiast BDD w SMC
- BDD + SAT

1981–1982: EMC — 10^5 stanów

1990–1992: SMV — 10^{100} stanów

2000': BMC + CEGAR — 10^{1000} stanów

IV. Rozwiązywacze SAT

ang. *SAT-solver*

- CNF
- algorytm DPLL
 - przeszukiwanie drzewa wartościowań częściowych
 - BCP (ang. *Boolean Constraint Propagation*)
 - **konflikty** – „obcinanie” drzewa
- heurystyki

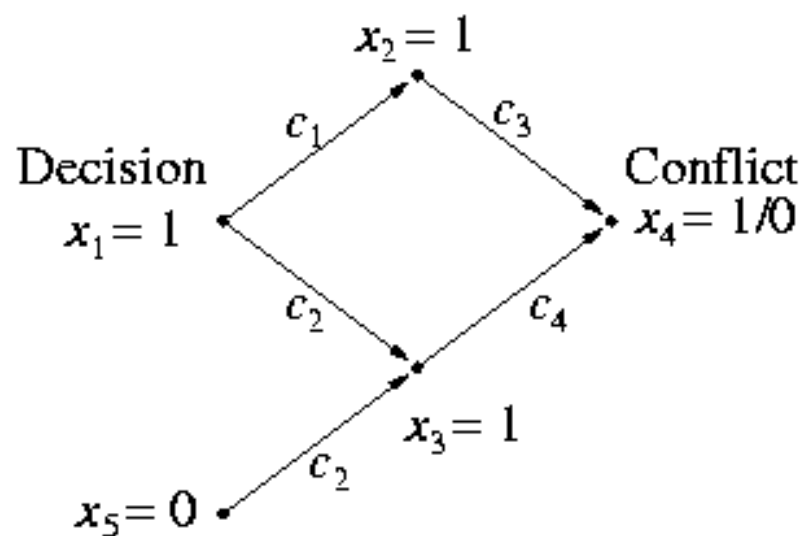
Graf implikacji i BCP

$$c_1 = (\neg x_1 \vee x_2)$$

$$c_2 = (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_5)$$

$$c_3 = (\neg x_2 \vee x_4)$$

$$c_4 = (\neg x_3 \vee \neg x_4)$$



[Biere, Cimatti, Clarke, Strichman, Zhu 2003]

```

// Input arg: Current decision level  $d$ 
// Return value:
//   SAT():      {SAT, UNSAT}
//   Decide():   {DECISION, ALL-DECIDED}
//   Deduce():   {OK, CONFLICT}
//   Diagnose(): {SWAP, BACK-TRACK} also calculates  $\beta$ 

```

```

SAT (d)
{
  l1:   if (Decide (d) == ALL-DECIDED) return SAT;
  l2:   while (TRUE) {
  l3:     if (Deduce(d) != CONFLICT) {
  l4:       if (SAT (d+1) == SAT) return SAT;
  l5:       else if ( $\beta < d$  ||  $d == 0$ )
  l6:         { Erase (d); return UNSAT; }
        }
  l7:   if (Diagnose (d) == BACK-TRACK) return UNSAT;
}
}

```

[Biere, Cimatti, Clarke, Strichman, Zhu 2003]

Dlaczego rozwiązywacze SAT są tak szybkie?

- uczenie konfliktów – dodajemy tzw. klauzule konfliktowe
- niechronologiczne powroty
- heurystyki dla decyzji
- szybkie struktury danych
- inkrementalna spełnialność