Wstęp do teorii mnogości, egzamin, 3 lutego 2005

Każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce!
Każdą kartkę proszę podpisać oraz napisać nazwisko prowadzącego ćw.

Zad. 1. (15 pkt.) Relację równoważności nazwijmy *sprawiedliwą*, gdy jej wszystkie klasy abstrakcji są równoliczne. Wyznacz moc zbioru wszystkich sprawiedliwych relacji równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$ liczb naturalnych.

Zad. 2. (15 pkt.) Rozważmy kratę zupełną $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$. Podaj przykład funkcji monotonicznej $f : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ takiej, że zbiór $S_f = \{X \in P(\mathbb{N}) \ : \ f(X) = X\}$ jest przeliczalny i zawiera pewien nieskończony łańcuch.

Zad. 3. (15 pkt.) Dla dowolnego zbioru A, *multizbiorem* nad A nazywamy dowolną funkcję z A w $\mathbb{N}$. Rozważmy porządek częsciowy $\langle \mathbb{N}^A, \sqsubseteq \rangle$ wszystkich multizbiorów nad A uporządkowanych następująco:

$$f \sqsubseteq g \quad \text{wtw. gdy} \quad \text{dla każdego } a \in A, \ f(a) \leq g(a).$$

Niech κ oznacza moc zbioru A. Wyznacz wszystkie κ takie, że porządek częsciowy $\langle \mathbb{N}^A, \sqsubseteq \rangle$ jest

a) porządkiem zupełnym,

b) porządkiem dobrze ufundowanym,

c) dobrym porządkiem?

UWAGA: Każdy punkt należy rozważyć osobno!

Zad. 4. (15 pkt.) Rozważmy płaszczyznę rzeczywistą $\mathbb{R}^2$ i jej podzbiór $T \subseteq \mathbb{R}^2$. Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ nazwijmy *wyróżnionym przez* T, jeśli żadne dwa różne punkty ze zbioru T nie leżą w tej samej odległości od p. Zbiór T nazwijmy *samolubnym*, jeśli każdy punkt $p \in T$ jest wyróżniony przez T.

a) Czy istnieje nieskończony samolubny zbiór $T \subseteq \mathbb{R}^2$?

b) Pokaż, że istnieje maksymalny zbiór samolubny.

c) Pokaż, że T jest maksymalnym zbiorem samolubnym gdy spełnia warunek:

$$\text{dla każdego } p \in \mathbb{R}^2, \quad p \in T \ \text{ wtw. gdy } \ p \ \text{ jest wyróżniony przez } \ T$$

(tzn. T zawiera dokładnie te i tylko te punkty, które są wyróżnione przez T).

Zad. dodatkowe (8 pkt.) Rozważmy $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$, jak w zad. 2. Czy istnieje funkcja monotoniczna $f : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ taka, że zbiór S_f jest przeliczalnym nieskończonym łańcuchem?