Kolokwium (WTM), 9.01.03

GRUPA 1

Każde zadanie proszę pisać na osobnej kartce!!!
Każdą kartkę proszę podpisać oraz napisać nazwisko prowadzącego ćwiczenia z WTM

Zadanie 1. (7 pkt.) Niech R oznacza zbiór liczb rzeczywistych oraz niech Q oznacza zbiór liczb wymiernych. Dla dowolnej liczby $q \in Q$, niech $\lfloor q \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą k, taką że $k \leq q$. W zbiorze funkcji ciągłych z R w R definiujemy relację równoważności r następująco:

$$\langle f, g \rangle \in r \iff \forall q \in Q\ (\lfloor q \rfloor = 0\ (\mathrm{mod} 2) \Rightarrow f(q) = g(q)).$$

1. Znaleźć moc klasy abstrakcji funkcji $f(x) = 3x$.
2. Pokazać, że każde dwie klasy abstrakcji relacji r sa równoliczne.
3. Jaka jest moc zbioru wszystkich klas abstrakcji relacji r?

Zadanie 2. (6 pkt.) Jaka jest moc zbioru wszystkich częściowych porządków w zbiorze liczb naturalnych, które nie mają elementu maksymalnego?

Zadanie 3. (7 pkt) Powiemy, że słowo u jest *podciągiem* słowa $w = w_1 w_2 \dots w_n$, gdy istnieje ciąg liczb $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$, taki, że $u = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_m}$. Niech $\preceq$ będzie częściowym porządkiem w zbiorze $\{0,1\}^+$ niepustych słów nad alfabetem $\{0,1\}$ określonym następująco:

$$u \preceq w \iff \exists a \in \{0,1\}\ \exists u', w' \in \{0,1\}^\star\ u = au' \wedge w = aw' \wedge u' \text{ jest podciągiem } w'.$$

Sprawdzić, czy

1. każdy niepusty zbiór słów postaci $0w$, gdzie $w \in \{0,1\}^*$, ma kres dolny,
2. każdy skończony niepusty zbiór słów postaci $0w$, gdzie $w \in \{0,1\}^*$, ma kres górny,
3. istnieją antyłańcuchy dowolnej skończonej długości. (*Uwaga:* zbiór $X \subseteq \{0,1\}^+$ nazywamy *antyłańcuchem*, gdy żadne dwa elementy z X nie są porównywalne w sensie porządku $\preceq$.)