Wstęp do teorii mnogości
egzamin 30.01.03

UWAGA: Każde zadanie proszę pisać na osobnej kartce!!!
Każdą kartkę proszę podpisać

Zadanie 1 (12 pkt) Niech $Rel(A)$ oznacza zbiór relacji binarnych w zbiorze A. Definiujemy funkcję $\phi : Rel(A) \to Rel(P(A))$ następująco dla dowolnej relacji $r \subseteq A \times A$,

$$\phi(r) = \{(X,Y) \mid (\forall x \in X \exists y \in Y \ (x,y) \in r) \text{ oraz } (\forall y \in Y \exists x \in X \ (x,y) \in r)\}.$$

1. Czy jeśli r jest funkcją to $\phi(r)$ jest też funkcją?
2. Czy $\vec{\phi}^{-1}(P(A)^{P(A)}) = A^A$?

Zadanie 2 (10 pkt) Niech N oznacza zbiór liczb naturalnych. Niech Q_+ oraz R_+ oznaczają zbiór liczb wymiernych (odpowiednio, rzeczywistych) nieujemnych. Niech $A = \{X \subseteq Q_+ \mid X \neq \emptyset\}$. Definiujemy funkcję $f : A \to R_+$ następująco dla $X \in A$,

$$f(X) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } N \cap X \neq \emptyset, \\ \prod X, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

gdzie $\prod X$ oznacza kres dolny zbioru X w R_+ uporządkowanym zwykłą relacją $\leq$.

1. Czy f jest na R_+?
2. Jaka jest moc zbioru $\vec{f}^{-1}(\{\sqrt{2}\})$?

Zadanie 3 (10 pkt) Niech $\langle Z, \leq \rangle$ oznacza zbiór liczb całkowitych uporządkowany zwykłą relacją $\leq$. Jaka jest moc zbioru wszystkich podzbiorów $X \subseteq Z$, takich że $\langle Z, \leq \rangle$ oraz $\langle X, \leq \cap (X \times X) \rangle$ są izomorficzne?

Zadanie 4 (12 pkt) Dowieść, że w każdym częściowym porządku $\langle P, \leq \rangle$ istnieje zbiór $X \subseteq P$, taki że

a) żadne dwa elementy z X nie są porównywalne.

b) Dla każdego $p \in P - X$ istnieje $q \in X$, taki że $p \leq q$ lub $q \leq p$.

Zadanie 5 (8 pkt) Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ oraz $\langle B, \leq_B \rangle$ będą częściowymi porządkami i niech $f : A \to B$ będzie funkcją monotoniczną. Powiemy, że $X \subseteq A$ jest *dobrze ufundowany*, gdy porządek $\langle X, \leq_A \cap (X \times X) \rangle$ jest dobrze ufundowany. Analogicznie definiujemy dobre ufundowanie dla podzbiorów zbioru B. Czy prawdziwe są następujące zdania:

1. Jeśli f jest bijekcją, to $X \subseteq A$ jest dobrze ufundowany $\Leftrightarrow$ $\vec{f}(X)$ jest dobrze ufundowany. Która implikacja jest prawdziwa?
2. Jeśli $\leq_A$ jest porządkiem liniowym oraz $Y \subseteq B$ **nie** jest dobrze ufundowany, to $\vec{f}^{-1}(Y)$ też **nie** jest dobrze ufundowany. Czy założenie liniowości $\leq_A$ jest istotne?

Zadanie 6 (8 pkt) Definiujemy funkcję $f : P(\{0,1\}^*) \to P(\{0,1\}^*)$ następująco dla dowolnego $X \subseteq \{0,1\}^*$,

$$f(X) = X \cup \{w00 \mid w0 \in X\} \cup \{w01 \mid w0 \in X\}.$$

1. Podać definicję drzewa 2-argumentowego. Niech FT_2 oznacza zbiór wszystkich drzew 2-argumentowych skończonych.
2. Czy $\vec{f}(FT_2) \subseteq FT_2$?
3. Jakiej mocy jest zbiór $FT_2 - \vec{f}(FT_2)$?