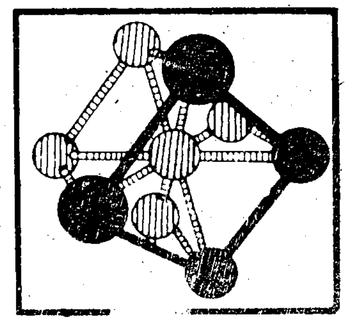
SYGNAŁY SYMBOLE MASZYNY

NOWOŚCI NAUKI I TECHNIKI



Wiedza Powszechna

Tematem książki są maszyny matematyczne. Nie podaje się jednak zasad działania tych maszyn ani możliwości ich zastosowania, lecz pokazuje pewien fragment teorii maszyn matematycznych. Teoria ta jest bowiem bardzo interesująca, a jej znaczenie wybiega poza ramy maszyn matematycznych. Dlatego poznanie, choćby w zarysie, niektórych problemów teorii maszyn matematycznych może być interesujące dla każdego, kto chciałby lepiej rozumieć otaczającą nas rzeczywistość i spojrzeć na niektóre znane sobie sprawy z nowego punktu widzenia.

SYGNAŁY, SYMBOLE, MASZYNY

Okładka i karta tytułowa
K. TARKOWSKA-GRUSZECKA
H. WINOGRADOW-MATUSZEWSKA

*

Ilustracje
ZBIGNIEW LENGREN

SPIS TREŚCI

Twórcy logiki nie sądzili z pewnością, że ich rozważania teoretyczne, zmierzające do systematyzacji praw myślenia, okażą się kiedyś pożytecznym narzędziem dla techniki.

A. MOSTOWSKI

WSTĘP

Tematem tej książeczki są maszyny matematyczne. Nie będziemy jednakże podawali tu zasad działania tych maszyn ani możliwości ich zastosowania. Sprawy te były wielokrotnie przedstawiane przy różnych okazjach i na pewno większość Czytelników interesujących się tą problematyką miała już okazję zaspokoić swoją ciekawość w tym zakresie. Chcemy tu natomiast pokazać pewien fragment teorii maszyn matematycznych. Teoria ta jest bowiem bardzo interesująca, a jej znaczenie zdaje się wybiegać poza ramy maszyn matematycznych. Dlatego poznanie, choćby w zarysie, niektórych problemów teorii maszyn matematycznych może być interesujące dla każdego, kto chciałby lepiej rozumieć otaczającą nas rzeczywistość i spojrzeć na niektóre znane sobie sprawy z nowego punktu widzenia.

Punktem wyjścia naszych rozważań będzie tzw. rachunek zdań, stanowiący kodyfikację praw myślenia. Zasady tego rachunku zostały podane w rozdziale I. Rachunek logiczny odgrywa dużą rolę w matematyce i w innych naukach, nas jednak będą interesować jego najnowsze zastosowania, głównie w technice. Kilka tego rodzaju zastosowań przedstawimy w rozdziale II. Nie po to jednak, by nauczyć Czytelnika posługiwania się tym rachunkiem przy rozwiązywaniu zadań logicznych czy technicznych — do tego celu służą odpowiednie podręczniki specjalistyczne. Pokazując różnorodne zastosowania rachunku logicznego chcielibyśmy zwrócić uwagę na intrygujący fakt, że prawa rządzące poprawnymi formami myślenia — odkryte i studiowane już od dawna przez logików i filozofów — znajdują obecnie coraz dziwniejsze zastosowania i interpretację.

W rozdziale III wyjaśniono pojęcie automatu skończonego, które w dzisiejszej teorii maszyn matematycznych odgrywa bardzo ważną rolę. Rachunek zdań i teoria automatów skończonych stanowią dzisiaj podstawowe narzędzie matematyczne dla konstruktora maszyn matematycznych, jakkolwiek obie te teorie dalekie są od doskonałości. Pozwalają one bowiem rozwiązywać tylko nieliczne problemy matematyczne, które powstają w związku z projektowaniem maszyn matematycznych. Warto dodać, że powstanie teorii automatów skończonych, jej rozwój oraz zastosowanie przebiegają według dokładnie tego samego schematu, który podaliśmy dla rachunku zdań: od całkowicie abstrakcyjnych badań, poprzez zastosowania, do nowych problemów teoretycznych.

Wreszcie w ostatnim, czwartym rozdziale pokazano fragment jednego z kierunków rozwoju teorii maszyn matematycznych, który — jak się wydaje — może się przyczynić do dalszego pogłębienia naszej wiedzy o maszynach matematycznych. Punktem wyjścia tej teorii są pojęcia procesu oraz konstrukcji. Ponieważ pojęcia te mają znaczenie nie tylko w maszynach matematycznych, teoria ta może mieć ewentualnie również zastosowanie w innych dziedzinach.

Teoria maszyn matematycznych najintensywniej rozwija się w USA, ZSRR, Anglii i Izraelu. Pewne prace w tym kierunku prowadzone są również w Polsce. Do notowanych polskich osiągnięć w tej dziedzinie należą wyniki badań doktora Andrzeja Ehrenfeuchta z Instytutu Matematycznego PAN w Warszawie.

Rozdział I

CZYM SIĘ ZAJMUJĄ LOGICY

1. *Uwagi wstępne*

Z rachunkiem liczbowym spotykamy się niemal na każdym kroku w życiu codziennym. Trudno sobie wyobrazić nasze współczesne społeczeństwo w sytuacji, gdyby nagle zatraciło pojęcia liczby i czterech działań arytmetycznych. Czytelnik zgodzi się, że bez tych pojęć zamarłby przemysł i handel, upadłaby nauka, że musielibyśmy wrócić do bardzo prymitywnej organizacji społecznej.

Istnieje także inny niż liczbowy rachunek, którym posługujemy się również codziennie — może nawet częściej niż rachunkiem liczbowym. Jest to tak zwany rachunek zdań (niektórzy nazywają go rachunkiem logicznym). Świadomość posługiwania się tym rachunkiem jest jednak znacznie mniejsza niż w przypadku rachunku liczbowego, chociaż jest on ściśle związany ze sposobem naszego myślenia.

Rachunek zdań można uważać za zbiór zasad poprawnego rozumowania. Jakkolwiek zasadami tymi posługuje się człowiek od niepamiętnych czasów, to uświadamiać je sobie zaczął zupełnie niedawno, zaledwie około 100 lat temu, w przeciwieństwie do rachunku liczbowego, który stosuje ze świadomością już od kilku tysięcy lat.

W ostatnich dwudziestu latach zainteresowanie rachunkiem zdań niezmiernie wzrosło. Okazało się bowiem, że może on znaleźć niespodziewane zastosowania techniczne. Mianowicie można go zastosować przy projektowaniu wielu urządzeń technicznych, a przede wszystkim maszyn matematycznych.

Co to jest rachunek zdań? W jaki sposób można rachować na zdaniach? Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy nieco uwagi poświęcić najpierw pojęciu języka i zdania.

2. *Zdania prawdziwe i fałszywe*

Język służy do przekazywania informacji o świecie. Niektórzy poeci i literaci czasem o tym zapominają. Może to być zarówno świat naszych doznań zmysłowych, jak i świat pojęć abstrakcyjnych. Zdania języka wyrażają jakieś fakty z zakresu, do którego się odnoszą. Aby język spełniał swą funkcję komunikowania, zdania języka powinny być prawdziwe.

Co to znaczy, że jakieś zdanie jest prawdziwe bądź fałszywe? Zagadnieniem tym zajmowali się filozofowie od najdawniejszych czasów, jednakże definitywne, ścisłe, matematyczne rozwiązanie tego problemu zostało podane przez polskiego matematyka prof. Alfreda Tarskiego * dopiero około 30 lat temu.

Mówiąc najprościej, zdanie prawdziwe to zdanie zgodne z rzeczywistością. Na przykład zdanie

Dziś jest niedziela.

jest prawdziwe, jeżeli dziś rzeczywiście jest niedziela. W każdym innym przypadku zdanie to jest fałszywe. Podobnie zdanie

Deszcz pada.

jest prawdziwe, jeżeli w chwili jego wypowiadania pada deszcz rzeczywiście. Z tych samych względów prawdziwe jest zdanie

* Prof. Tarski mieszka obecnie w USA.

Trawa jest zielona.

Oczywiście prawdziwość zdania nie zależy od języka, w którym jest ono wypowiadane. Zauważmy jeszcze, że pojęcie prawdziwości nie odnosi się do wszystkich zdań języka. Na przykład nie ma sensu zastanawiania się, czy zdanie

Pójdziesz ze mną do kina?

jest prawdziwe. Zdanie to jest bowiem zdaniem pytającym, nie jest ono komunikatem o rzeczywistości. Podobnie sytuacja wygląda w przypadku zdań rozkazujących. Polecenie wydane np. w postaci zdania

Umyj zaraz ręce!

nie może być ani zdaniem prawdziwym, ani fałszywym. Pojęcie prawdziwości i fałszywości odnosi się więc tylko do pewnej kategorii zdań, a mianowicie do zdań oznajmujących.

3. *Jak sprawdzić prawdziwość zdania*

Zgodnie z określeniem zdania prawdziwego należy stwierdzić, czy jest tak, jak owo zdanie orzeka, czy też nie. Aby sprawdzić np. prawdziwość zdania

Deszcz pada.

wystarczy wyjrzeć przez okno i stwierdzić, jaki jest stan pogody. Dla sprawdzenia prawdziwości zdania

Trawa jest zielona.

należy spojrzeć na trawę i zaobserwować jej kolor *.

A więc o prawdziwości zdania decyduje doświadczenie. Często doświadczenie może nie być takie proste jak sprawdzenie stanu pogody czy określenie koloru trawy. Może ono czasem wymagać skomplikowanych zabiegów pomiarowych. Na przykład dla stwierdzenia prawdziwości zdania

* Daltonista mógłby mieć trudności z określeniem prawdziwości tego zdania.

Ziemia jest okrągła.

nie wystarczy wychylenie się przez okno, ale konieczne jest przeprowadzenie szeregu skomplikowanych pomiarów geodezyjnych.

Oczywiście w wielu przypadkach nie trzeba sprawdzać każdorazowo prawdziwości interesującego nas zdania. Dla niektórych zdań wystarczy, że ich prawdziwość została już kiedyś stwierdzona, abyśmy na tej podstawie nie musieli ciągle ich weryfikować, jak np. w przypadku zdania

*Ziemia jest okrągła *.*

czy też

*Ziemia jest okrągła *.*

natomiast prawdziwość zdania

Deszcz pada.

wymaga każdorazowej weryfikacji.

Czy doświadczenie jest jedynym kryterium prawdziwości zdań? Nie. Drugim kryterium prawdziwości zdań jest poprawne rozumowanie, a więc prawdziwość niektórych zdań możemy również stwierdzić nie odwołując się do doświadczenia, ale przeprowadzając jedynie odpowiednie rozumowanie.

* Można w takim przypadku mówić o rejestrze czy też katalogu zdań prawdziwych, których prawdziwość została już wielokrotnie stwierdzona, w związku z czym są one powszechnie uważane za zdania oczywiście prawdziwe.

Zasadami rozumowania, które pozwalają na badanie prawdziwości zdań, zajmuje się logika.

W dalszym ciągu tego rozdziału podamy pewną metodę sprawdzania prawdziwości zdań za pomocą praw logicznych. Czytelnika interesującego się bliżej tymi zagadnieniami odsyłamy do książki A. Grzegorczyka *Logika popularna*, Warszawa 1960, gdzie poruszane tu zagadnienia są wyczerpująco i jasno wyłożone, my zaś zajmiemy się nimi jedynie w takim stopniu, w jakim to będzie nam potrzebne w związku z interesującą nas problematyką.

4. *Zdania proste i złożone*

Jak już wspominaliśmy, logika oferuje nam metody badania prawdziwości zdań bez uciekania się do doświadczenia. Metoda, którą chcemy przedstawić, będzie pozwalała na badanie poprawności nie wszystkich zdań oznajmujących, a tylko niektórych — mianowicie tzw. zdań złożonych.

Pamiętamy z gramatyki, co to są zdania proste i złożone. Prostymi są np. zdania następujące:

1. *Czytam książkę.*
2. *Jutro napiszę list.*
3. *Dzisiaj jest niedziela.*

Stanowią one samodzielną wypowiedź jakiejś całej myśli. Jeśli dwa zdania proste połączymy spójnikiem logicznym, to otrzymamy zdanie złożone. Na przykład łącząc zdania proste

1. *Dziś jest sobota.*
2. *Dziś jest niedziela.*

spójnikiem „lub" otrzymamy zdanie złożone

Dziś jest sobota lub dziś jest niedziela.

Podobnie łącząc zdania proste

1. *Jabłko jest smaczne.*
2. *Jabłko jest czerwone.*

spójnikiem „i" otrzymamy zdanie złożone

Jabłko jest czerwone i jabłko jest smaczne.

W obu podanych przykładach zdania proste łączone spójnikiem były ze sobą w pewien sposób związane, oba zdania posiadały wspólną treść. Jednakże logika dopuszcza również łączenie spójnikami dowolnych zdań nie związanych ze sobą w jakikolwiek sposób treściowo. Z logicznego punktu widzenia poprawne jest również zdanie

Dziś jest sobota lub jabłko jest czerwone.

W języku potocznym takich zdań złożonych, których poszczególne zdania składowe nie mają żadnego związku między sobą, zazwyczaj nie wypowiadamy. Nie ma po prostu takiej potrzeby. W logice również takiej potrzeby nie ma. Aby uniknąć kłopotów związanych z tym, które zdania proste możemy z sobą łączyć, a których nie, przyjmujemy, że dopuszczalne jest łączenie zdań zupełnie ze sobą nie związanych. Założenie takie w niczym nie przeszkadza, a wręcz przeciwnie, stanowi znaczne ułatwienie.

Powiedzieliśmy, że spójniki pozwalają na łączenie zdań. Będziemy również uważali za spójnik zwrot „nieprawda że", jakkolwiek nie można go użyć do połączenia dwu zdań w jedno zdanie złożone. Pozwala on natomiast z jednego zdania utworzyć nowe zdanie. Na przykład, jeżeli do zdania

Dziś jest pogoda.

dopiszemy na początku zwrot „nieprawda że", otrzymamy nowe zdanie

Nieprawda że dziś jest pogoda.

A więc gramatyczna funkcja tego zwrotu jest podobna do spójników „i" oraz „lub" z tą różnicą, że spójniki „i" oraz „lub" tworzyły z dwu zdań nowe zdanie, natomiast zwrot „nieprawda że" z jednego zdania tworzy nowe zdanie. Dlatego logicy również ten ostatni zwrot uważają za spójnik *.

Oprócz trzech wymienionych istnieje w gramatyce wiele innych spójników, np. „albo" czy „wtedy i tylko wtedy". W dalszym ciągu będziemy się jednak zajmować tylko trzema pierwszymi spójnikami: „i", „lub", „nieprawda że".

5. *Prawda i fałsz*

Mam wrażenie, że tytuł tego paragrafu może niejednemu Czytelnikowi nasunąć skojarzenia natury kryminalno-sensacyjnej. Tych Czytelników spotka zawód. Mowa tu bowiem będzie o sprawach niezmiernie ważnych — przynajmniej w pojęciu filozofów i logików — mianowicie o badaniu prawdziwości zdań.

Rzecz interesująca, że logika nie zajmuje się badaniem

* W logice zamiast terminu „spójnik" używany jest też termin „funktor zdaniotwórczy", gdyż za jego pomocą z jednych zdań tworzy się nowe zdania. Czasem będziemy używali również tego określenia.

prawdziwości zdań prostych. Zasadniczym jej problemem jest poszukiwanie kryteriów prawdziwości zdań złożonych. Żadne metody logiczne nie pozwalają na powiedzenie czegokolwiek np. o prawdziwości zdania prostego

Dziś świeci słońce.

Zbadanie prawdziwości tego zdania jest tylko sprawą doświadczenia. Natomiast zdanie złożone

Dziś świeci słońce i dziś jest niedziela.

jest już dla logików interesujące.

Podstawowe zagadnienie logiki polega na zbadaniu, co można powiedzieć o prawdziwości zdania złożonego na podstawie znajomości prawdziwości zdań składowych *. Jeżeli wiemy, że np. zdanie

Dziś świeci słońce.

jest fałszywe, a zdanie

Dziś jest niedziela.

jest prawdziwe, powstaje pytanie, co można powiedzieć o prawdziwości zdania złożonego

Dziś świeci słońce i dziś jest niedziela.

* Skąd znamy prawdziwość zdań składowych, to nas nie interesuje.

Czytelnik posiadający skłonność do samodzielnych rozmyślań zechce zastanowić się sam nad tą sprawą, natomiast dla Czytelników mniej dociekliwych podajemy gotowe rozwiązanie tego problemu przyjęte przez logików: zdanie to jest fałszywe.

Przyjmując, że każde rozważane zdanie złożone może być albo fałszywe, albo prawdziwe, ogólnie biorąc, w zdaniu złożonym z dwu zdań prostych może wystąpić jedna z czterech sytuacji:

Zdanie *A*	Zdanie *B*
1. fałszywe	fałszywe
2. fałszywe	prawdziwe
3. prawdziwe	fałszywe
4. prawdziwe	prawdziwe

Przez *A* oznaczyliśmy pierwsze zdanie składowe zdania złożonego, natomiast przez *B* — drugie jego zdanie składowe.

Zdanie złożone z dwu zdań prostych połączonych za pomocą spójnika „i" logicy nazywają koniunkcją albo iloczynem logicznym zdań. Niech Czytelnika nie przerażają mądrze, naukowo brzmiące słowa. Często nowe obce słowo utrudnia wbrew zdrowemu rozsądkowi przyswojenie sobie jego treści, ale ludzie nauki mają taki zwyczaj, że wszystko, czym się zajmują, muszą odpowiednio ponazywać, i to w dodatku w jakimś obcym języku, najczęściej po łacinie lub po grecku *.

Gdyby nazwy te podać w języku rodzimym, rzecz okazałaby się nagle całkiem prosta i jasna. No, ale wtedy mogłaby ucierpieć powaga nauki. Ponieważ książka ta traktuje o sprawach naukowych, uszanujmy panujące tutaj zwyczaje i wyrażajmy się tak, jak to zwykli są czynić naukowcy **.

* Podobno nazwanie badanych zjawisk jest pierwszym etapem każdego badania naukowego.

** Nie wiem, czy Czytelnik zwrócił uwagę, że istnieją dwa terminy określające ludzi parających się badaniami naukowymi: uczeni i naukowcy. Różnica między tymi dwoma określeniami jest taka jak między terminami: małżonka i żona.

Wróćmy jednak do tematu zasadniczego. Jak powiedzieliśmy, zdanie złożone z dwu zdań prostych przez połączenie ich spójnikiem „i" jest nazywane w logice koniunkcją. Koniunkcja jest uważana w logice za zdanie prawdziwe jedynie wtedy, jeżeli oba jej zdania składowe są prawdziwe. W każdym innym przypadku koniunkcja jest fałszywa.

Jest to zgodne z używaniem spójnika „i" w języku potocznym. Dwa zdania łączymy spójnikiem „i", jeżeli chcemy wyrazić przekonanie, że jest tak, jak głoszą oba zdania składowe. A więc rozpatrywane przez nas zdanie złożone

Dziś świeci słońce i dziś jest niedziela.

jest z logicznego punktu widzenia prawdziwe, jeżeli pierwsze i drugie zdanie składowe jest prawdziwe.

Własności koniunkcji możemy przedstawić w postaci tabelki

Zdanie *A*	Zdanie *B*	Zdanie *A* i *B*
fałszywe	fałszywe	fałszywe
fałszywe	prawdziwe	fałszywe
prawdziwe	fałszywe	fałszywe
prawdziwe	prawdziwe	prawdziwe

Zdanie złożone otrzymane przez połączenie dwu zdań prostych spójnikiem „lub" nazywane jest w logice alternatywą lub sumą logiczną zdań. Alternatywa dwu zdań prostych jest prawdziwa wtedy, jeżeli choć jedno ze zdań składowych jest prawdziwe. Na przykład zdanie

Dziś jest sobota lub dziś jest niedziela *.

* W języku potocznym zamiast spójnika „lub" użylibyśmy tutaj raczej spójnika „albo", podkreślającego, że tylko jedno ze zdań składowych może być prawdziwe. Użycie spójnika „lub" jest jednak również poprawne, choć przypisuje mu się zazwyczaj inny sens.

jest prawdziwe, jeżeli prawdziwe jest bądź pierwsze zdanie alternatywy

Dziś jest sobota.

bądź też drugie zdanie alternatywy

Dziś jest niedziela.

Alternatywę możemy więc scharakteryzować tabelką

Zdanie *A*	Zdanie *B*	Zdanie *A* lub *B*
fałszywe	fałszywe	fałszywe
fałszywe	prawdziwe	prawdziwe
prawdziwe	fałszywe	prawdziwe
prawdziwe	prawdziwe	prawdziwe

Widzimy z tabelki, że jeżeli oba zdania alternatywy są prawdziwe, to alternatywa jest również prawdziwa. Przykładem może tu być zdanie

*Dzisiaj świeci słońce lub mama czyta książkę.**

Oczywiście, jeżeli chociaż jedno ze zdań składowych jest prawdziwe, to alternatywa jest też prawdziwa.

I wreszcie ostatni interesujący nas spójnik „nieprawda że". Zdanie uzyskane przez poprzedzenie jakiegoś zdania zwrotem „nieprawda że" nazywamy negacją lub zaprzeczeniem. Własność negacji możemy scharakteryzować tabelką

* Przypominamy, że zdania składowe zdania złożonego nie muszą być ze sobą związane treściowo.

Zdanie *A*	Zdanie: Nieprawda że *A*
fałszywe	prawdziwe
prawdziwe	fałszywe

Jeżeli fałszywe jest np. zdanie

Dziś jest niedziela.

to zgodnie z tabelką negacji prawdziwe jest zdanie

Nieprawda że dziś jest niedziela.

i odwrotnie. Ale już dosyć. Sądzę, że czas przerwać rozważania nad prawdziwością zdań, gdyż obawiam się, że zaczynają być nudne.

6. *Symbole, symbole, symbole...*

PKP, PKO, POP, MO, OMO, NATO, KKS, PRL, PKS, ITD, ITP...

W języku potocznym często zamiast zbyt długich wyrażeń używamy ich skrótów. Podobna tendencja istnieje w logice i w matematyce. W dalszym ciągu zamiast operować zdaniami będziemy posługiwali się literami oznaczającymi zdania, jak to już zresztą uczyniliśmy w poprzednim paragrafie. Zdanie będziemy oznaczać jedną z liter: p, q, r, s, t.

Koniunkcje możemy teraz zapisać np. w postaci

$$p \text{ i } q$$
$$p \text{ i } r$$
$$q \text{ i } s$$

Litery p, q, r, s, t nie są zdaniami, lecz symbolami zdań prostych. W logice nazywają się one zmiennymi zdaniowymi, podobnie jak w algebrze litery x, y, z są nazywane zmiennymi liczbowymi. W algebrze za zmienną liczbową x możemy podstawić dowolną liczbę, w logice za zmienną zdaniową możemy podstawić dowolne zdanie proste.

Alternatywy w sposób symboliczny zapiszemy tak

p lub q
r lub s
q lub t

a negacje tak

nieprawda że p
nieprawda że q
nieprawda że t

Czym są teraz wyrażenia typu

p lub q
p i r
nieprawda że q

Czy są one zdaniami? Oczywiście nie. Dlaczego? Wyrażenia te nie zawierają żadnej treści, nie są więc zdaniami. Nie ma w nich również podmiotu i orzeczenia, nie mają więc struktury zdań. Jeżeli jednak zamiast liter p, q, r w podanych wyrażeniach wstawimy dowolne zdania proste, to otrzymamy z tych wyrażeń poprawnie zbudowane zdania złożone. Są to więc jak gdyby schematy zdań. Logicy takie schematy nazywają funkcjami zdaniowymi lub formułami logicznymi. Jeżeli więc do dowolnej funkcji zdaniowej, na miejsce dowolnych zmiennych zdaniowych podstawimy zdania proste, otrzymamy w rezultacie nowe zdanie — zdanie złożone.

Możemy iść dalej we wprowadzaniu skrótów i zastąpić odpowiednimi symbolami również spójniki. Niektóre sposoby oznaczania spójników stosowanych w logice podane są w tabelce

lub	$\vee$	v	+
i	$\wedge$	&	$\cdot$
nieprawda że	$\sim$	$\sim$	—

Stosując przyjęte oznaczenia, koniunkcję, alternatywę i negację możemy zapisać w ten sposób

$p \,\&\, q$
$p \vee q$
$\sim p$

bądź też tak

$p \cdot q$
$p + q$
$\bar{p}$

Napisy te zaczynają przypominać już wyrażenia znane nam z podręczników szkolnej matematyki.

Również słowa fałsz i prawda możemy zastąpić symbolami. W logice przyjęto następujące oznaczenia:

fałsz — 0
prawda — 1

Symbole 0 i 1 będziemy nazywali wartościami logicznymi.

Tabelki charakteryzujące koniunkcję, alternatywę i negację możemy więc teraz zapisać tak

Koniunkcja

p	q	$p \,\&\, q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Alternatywa

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Negacja

p	$\sim p$
0	1
1	0

Z tabelek tych widać, dlaczego koniunkcję nazywamy również iloczynem logicznym, a alternatywę — sumą logiczną. Jeżeli traktować symbole 0 i 1 jako liczby, to pierwsza tabelka opisuje po prostu mnożenie liczb 0 i 1, druga natomiast — sumowanie, z tą różnicą, że 1 + 1 jest w tej tablicy równe nie 2, lecz 1.

Działania te przypominają więc nieco działania arytmetyczne, są jednak znacznie od nich prostsze. Możemy więc pisać podobnie, jak to czynią dzieci w pierwszej klasie szkoły podstawowej:

$$
\begin{array}{ll}
0 \ \& \ 0 = 0 & 0 \vee 0 = 0 \\
0 \ \& \ 1 = 0 & 0 \vee 1 = 1 \\
1 \ \& \ 0 = 0 & 1 \vee 0 = 1 \\
1 \ \& \ 1 = 1 & 1 \vee 1 = 1
\end{array}
$$

$$\sim 0 = 1$$
$$\sim 1 = 0$$

Wychodząc z pojęcia zdania i jego prawdziwości doszliśmy do pewnego prostego rachunku, zwanego rachunkiem logicznym bądź algebrą Boole'a. W dalszym ciągu zapoznamy się nieco bliżej z tym rachunkiem.

7. *Formuły logiczne*

Z formalnego punktu widzenia nic nie stoi na przeszkodzie, abyśmy symbolami &, v oraz $\sim$ łączyli nie tylko zmienne zdaniowe, ale również bardziej skomplikowane wyrażenia, np.

$$(p \ \& \ q) \vee r$$
$$\sim (p \vee s)$$
$$(r \vee s) \ \& \ (p \vee s)$$

Wyrażenia, zbudowane ze zmiennych zdaniowych oraz symboli: &, v, $\sim$ i nawiasów na podobieństwo formuł arytmetycznych, nazywamy formułami logicznymi. Jeżeli w dowolnej formule logicznej za zmienne zdaniowe podstawimy dowolne wartości logiczne, to znając tabliczki „działań": &, v, $\sim$ możemy obliczyć wartość logiczną całej formuły, która oczywiście może równać się tylko 0 lub 1. Na przykład jeżeli w formule

$$(p \ \& \ q) \vee r$$

podstawimy odpowiednio

$$p = 1$$
$$q = 1$$
$$r = 0$$

to otrzymamy wyrażenie

$$(1 \ \& \ 1) \vee 0$$

ponieważ 1 & 1 = 1 oraz 1 v 0 = 1
więc

$$(1 \ \& \ 1) \vee 0 = 1$$

Podobnie podstawiając w formule

$$\sim (p \vee s)$$
$$p = 1$$
$$s = 0$$

otrzymamy

$$\sim (1 \vee 0)$$

co na podstawie tablicy alternatywy i negacji daje

$$\sim (1 \vee 0) = 0$$

W rachunku tym możemy więc wykonywać obliczenia, podobnie jak to czynimy w arytmetyce, z tym że działania są tu znacznie prostsze od działań arytmetycznych, chociaż nieco je przypominają.

8. *Prawa logiki*

Wiemy, że w matematyce obowiązują pewne prawa pozwalające upraszczać formuły arytmetyczne, jak np. prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania. Pozwala ono z wyrażenia po lewej stronie równości

$$yx + yz = y\ (x + z)$$

wyłączyć wspólny czynnik y przed nawias, bądź w wyrażeniu po prawej stronie wymnożyć y przez oba składniki sumy w nawiasie.

Podobnie dla rachunku logicznego istnieją pewne prawa pozwalające przekształcać formuły logiczne. Niektóre z nich przypominają prawa obowiązujące w arytmetyce, inne zaś w arytmetyce odpowiedników nie mają.

Prawa te mają postać

A_1: $p \vee p = p$
A_2: $p \vee q = q \vee p$
A_3: $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$
A_4: $p \mathbin{\&} (q \vee r) = (p \mathbin{\&} q) \vee (p \mathbin{\&} r)$
A_5: $p \vee \sim p = 1$
A_6: $0 \vee p = p$
A_7: $1 \vee p = 1$

B_1: $p \mathbin{\&} p = p$
B_2: $p \mathbin{\&} q = q \mathbin{\&} p$
B_3: $(p \mathbin{\&} q) \mathbin{\&} r = p \mathbin{\&} (q \mathbin{\&} r)$
B_4: $p \vee (q \mathbin{\&} r) = (p \vee q) \mathbin{\&} (p \vee r)$
B_5: $p \mathbin{\&} \sim p = 0$

B_6: $0 \mathbin{\&} p = 0$
B_7: $1 \mathbin{\&} p = p$

C_1: $\sim (\sim p) = p$
C_2: $\sim (p \vee q) = \sim p \mathbin{\&} \sim q$
C_3: $\sim (p \mathbin{\&} q) = \sim p \vee \sim q$

Podzielone są one na trzy grupy. Pierwsza grupa oznaczona literą *A* dotyczy własności alternatywy, druga grupa oznaczona literą *B* dotyczy koniunkcji, grupa *C* ma charakter specjalny.

Większość tych praw jest nam dobrze znana z języka potocznego. Prawo A_1

$$p \vee p = p$$

mówi, że alternatywę dwu jednakowych zdań prostych możemy zastąpić jednym z tych zdań, np. zdanie

Dziś jest pogoda lub dziś jest pogoda.

możemy zastąpić zdaniem

Dziś jest pogoda.

Prawo A_2

$$p \vee q = q \vee p$$

mówi, że w alternatywie możemy zamienić oba zdania proste miejscami. Zamiast powiedzieć np.

Dziś jest sobota lub dziś jest niedziela.

możemy powiedzieć

Dziś jest niedziela lub dziś jest sobota.

Prawo A_5

$$p \vee \sim p = 1$$

mówi, że alternatywa zdania i jego negacji jest zdaniem zawsze prawdziwym, np. zdanie

Dziś świeci słońce lub nieprawda że dziś świeci słońce.

jest niezależnie od prawdziwości zdań składowych — prawdziwe.

Podobne przykłady można podać dla drugiej grupy praw. Nie będziemy tego czynili, a polecamy wykonanie tego zadania Czytelnikowi.

Ciekawe jest prawo C_1

$$\sim(\sim p) = p$$

Jest to tzw. prawo podwójnego przeczenia. Jeżeli dwukrotnie zaprzeczymy jakieś zdanie, to efekt tego jest taki, jakbyśmy w ogóle zdania tego nie zaprzeczali, np.

Nieprawda że (nieprawda że pada deszcz).

Prawa C_2 i C_3 nazywają się prawami de Morgana. Pierwsze z nich stwierdza, że negacja alternatywy jest równoważna koniunkcji negacji zdań składowych, drugie natomiast — że negacja koniunkcji jest równoważna alternatywie negacji zdań składowych. Zamiast mówić np.

Nieprawda że (dziś jest sobota lub dziś jest niedziela).

możemy powiedzieć

Nieprawda że dziś jest sobota i nieprawda że dziś jest niedziela.

Posługując się drugim prawem de Morgana możemy zamiast zdania

Nieprawda że (posiadam ładną bibliotekę i posiadam dużo dobrych obrazów).

powiedzieć zdanie

Nieprawda że posiadam ładną bibliotekę lub nieprawda że posiadam dużo dobrych obrazów.

Podane przykłady zdań brzmią może nieco sztucznie, gdyż w języku potocznym wyrażamy się bardziej skrótowo, tym niemniej są one z gramatycznego punktu widzenia poprawne. Logika zdań, to po prostu zbiór reguł poprawnego posługiwania się spójnikami.

9. *Prawa logiki i prawa arytmetyki*

Warto zwrócić uwagę na podobieństwo niektórych praw logiki do praw arytmetycznych. Na przykład

Prawa arytmetyczne	Prawa logiczne
$x + y = y + x$	$p \vee q = q \vee p$
$x \cdot y = y \cdot x$	$p \,\&\, q = q \,\&\, p$
$x + (y + z) = (x + y) + z$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	$(p \,\&\, q) \,\&\, r = p \,\&\, (q \,\&\, r)$
$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	$p \,\&\, (q \vee r) = (p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, r)$
$0 + x = x$	$0 \vee p = p$
$0 \cdot x = 0$	$0 \,\&\, p = 0$

Jednakże prawo logiki

$$p \vee (q \,\&\, r) = (p \vee q) \,\&\, (p \vee r)$$

nie ma odpowiednika w arytmetyce, tu nie możemy napisać równości

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

Podobnie prawa

$$p \vee p = p$$
$$p \,\&\, p = p$$

również nie mają odpowiedników arytmetycznych, gdyż w arytmetyce

$$x + x = 2x$$
$$x \cdot x = x^2$$

Prawo logiczne

$$1 \vee p = 1$$

także nie ma odpowiednika arytmetycznego, gdyż dla $x \neq 0$

$$1 + x \neq 1$$

10. *Przekształcanie formuł logicznych*

Za pomocą przytoczonych praw możemy więc przekształcać formuły logiczne, podobnie jak przekształcamy formuły algebraiczne. Na przykład stosując prawo de Morgana do formuły

$$p \vee \sim (q \,\&\, p) \qquad (1)$$

otrzymamy

$$p \vee (\sim q \vee \sim p) \qquad (2)$$

Na podstawie prawa A_2 z wyrażenia 2 otrzymamy

$$p \vee (\sim p \vee \sim q) \qquad (3)$$

skąd stosując prawo A_3 mamy

$$(p \vee \sim p) \vee \sim q \qquad (4)$$

Wyrażenie w nawiasie zgodnie z prawem A_5 jest równe jedności, a więc zamiast wzoru 4 możemy napisać

$$1 \vee \sim q \qquad (5)$$

Ta ostatnia formuła na podstawie prawa A_7 przybierze wartość

$$1 \qquad (6)$$

A więc formuła

$$p \vee \sim (q \,\&\, p)$$

ma stałą wartość logiczną równą 1, niezależnie od wartości logicznych zmiennych zdaniowych p i q.

Przebieg przekształcania czasem wygodnie jest zapisać w postaci tabeli jak niżej, podając z prawej strony każdej formuły zastosowane do niej prawo logiczne

$p \vee \sim (q \,\&\, p)$	C_3
$p \vee (\sim q \vee \sim p)$	A_2
$p \vee (\sim p \vee \sim q)$	A_3
$(p \vee \sim p) \vee \sim q$	A_5
$1 \vee \sim q$	A_7
1	

Z formułami logicznymi możemy więc postępować podobnie jak z formułami arytmetycznymi.

Jak wspominaliśmy, problematyka poruszana w tym rozdziale ma dwutysiącletnią historię, jednakże przez długi czas wielu uczonych uważało logikę za zabawę intelektualną pozbawioną jakiejkolwiek praktyczej przydatności. Niewątpliwie trzeba nieco filozoficznego nastawienia, aby przedstawioną tu problematykę uważać za interesującą.

Podczas gdy praw arytmetyki musimy się uczyć, jeżeli chcemy się posługiwać arytmetyką, to prawa logiki mamy niejako „wbudowane". Wiążą się one nierozerwalnie z istotą języka, którym się posługujemy, tak że w ten czy inny sposób posługujemy się nimi automatycznie. Odkrycie i bliższe ich zbadanie miało więc raczej znaczenie poznawcze aniżeli praktyczne.

W ciągu ostatnich 30 lat sytuacja się radykalnie zmieniła. Logika niespodziewanie znalazła zastosowanie. Dzisiaj na całym świecie prawdopodobnie wielokrotnie więcej inżynierów zajmuje się logiką, aniżeli zajmowało się nią — w ciągu ostatnich dwu tysięcy lat — filozofów, logików i matematyków razem. Logika znalazła zastosowanie w wielu dziedzinach techniki, a przede wszystkim w budowie maszyn matematycznych. Konstruktor maszyn matematycznych musi umieć posługiwać

się rachunkiem logicznym z taką samą biegłością jak i rachunkiem arytmetycznym *.

W związku z zastosowaniami logiki powstało bardzo dużo nowych zagadnień logicznych, których inżynierowie nie byli w stanie rozwiązać samodzielnie, na arenę wkroczyli więc ponownie logicy. Zetknięcie logiki z techniką może doprowadzić do szeregu nieobliczalnych skutków. Zetknęły się bowiem nie tylko tradycyjnie uważane za przeciwstawne dziedziny — najbardziej abstrakcyjna teoria z codzienną praktyką konstrukcyjną — ale i ludzie o diametralnie różnych poglądach.

Na zakończenie przytoczymy jeszcze bardzo ciekawe zdanie prof. Andrzeja Mostowskiego na temat zastosowań logiki: „Z dość lekceważonej doktryny na wpół filozoficznej, na wpół matematycznej stała się ona ** nagle szanowanym członkiem współczesnej arystokracji naukowej: weszła w skład dyscyplin mających praktyczne zastosowanie. Ciesząc się z tego sukcesu, nie można oprzeć się refleksji, że w czasach greckich fakt taki oznaczałby degradację, a nie promocję. Grecy bowiem cenili wysoko tylko nauki teoretyczne, a nie umiejętności praktyczne. Przyszłość pokaże, czyje nastawienie prowadziło do trwalszych wyników."

* Oczywiście, w znacznie szerszym zakresie, aniżeli tutaj to przedstawiliśmy.
** tzn. logika.

NA SCENĘ WKRACZA TECHNIKA

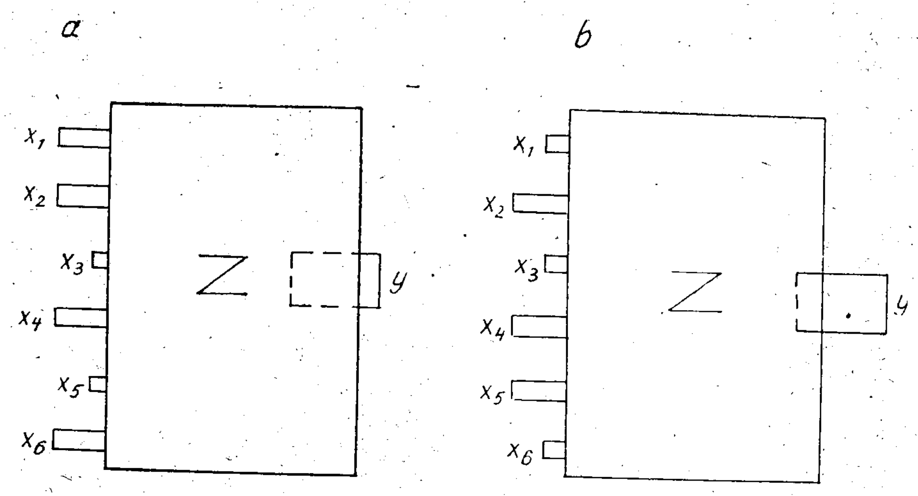
1. *Rozprawa o zamkach (drzwiowych)*

Omawianie zastosowań logiki zaczniemy od najprostszego przykładu, nie mającego, jak do tej pory, większego znaczenia praktycznego, natomiast ciekawego ze względów dydaktycznych. Zobaczymy, w jaki sposób logika może znaleźć zastosowanie do budowy pewnych prostych mechanizmów, jak np. zamków drzwiowych, kłódek, zasuw itp. Nie wykluczone, że w przyszłości znajomość logiki będzie obowiązywała ślusarzy (i złodziei); jeżeli nie wszystkich, to przynajmniej tych, którzy będą mieli aspiracje głębszego rozumienia uprawianego przez siebie zawodu.

Cóż to jest zamek? Nie chodzi nam tu o konkretne rozwiązania konstrukcyjne zamków drzwiowych, stosowane przez ślusarzy, ale o próbę stworzenia pojęcia „abstrakcyjnego" zamka, z pominięciem wszystkich nieistotnych z naszego punktu widzenia szczegółów konstrukcyjnych, tak aby pojęcie to mogło być przedmiotem ścisłych badań naukowych. Pominiemy więc materiał, wielkość i wiele innych podobnych cech, które w naszych rozważaniach nie będą grały istotnej roli.

Abstrakcyjny zamek możemy sobie wyobrazić tak, jak to przedstawiono na rysunku 1a, b, a więc jako skrzynkę Z, która posiada z jednej strony n (np. 6) „ząbków", oznaczonych na rysunku przez $x_1, \ldots, x_6$, oraz jeden ząbek oznaczony przez y. Każdy ząbek może znajdować się w jednym z dwu możliwych położeń: może być wsunięty bądź wysunięty ze skrzynki. Na rysunku 1a wsunięte są ząbki x_3 i x_5 oraz y, zaś na rysunku 1b wsunięte są ząbki x_1, x_3, x_6, a wszystkie pozostałe są wysunięte. Jeżeli ząbek y jest schowany do skrzynki, powiemy, że zamek jest otwarty. Jeżeli zaś ząbek y jest wysunięty ze skrzynki, powiemy, że zamek jest zamknięty.

Ponieważ każdy ząbek zamka może znajdować się w jednym z dwu położeń, oba te położenia możemy oznaczyć odpowiednio przez 0 i 1. Które położenie oznaczymy cyfrą 0, a które cyfrą 1, nie gra oczywiście roli. Przyjmijmy, że cyfra 1 oznacza schowanie (wciśnięcie do skrzynki ząbków x_1, ..., x_6, a cyfra 0



Rys. 1

ząbki nie wciśnięte. Dla ząbka y przyjmiemy odwrotne oznaczenia, tj. ząbek schowany oznaczymy przez 0, a wysunięty — przez 1. Sposób oznaczenia położeń ząbków pokazano na rysunku 2a, b.

Od zamka żądamy, aby $y = 1$ tylko dla jednej określonej kombinacji położenia ząbków $x_1, ..., x_6$, tzn. aby tylko jeden klucz K spowodował wysunięcie ząbka y, jak to pokazano na rysunku 3 *.

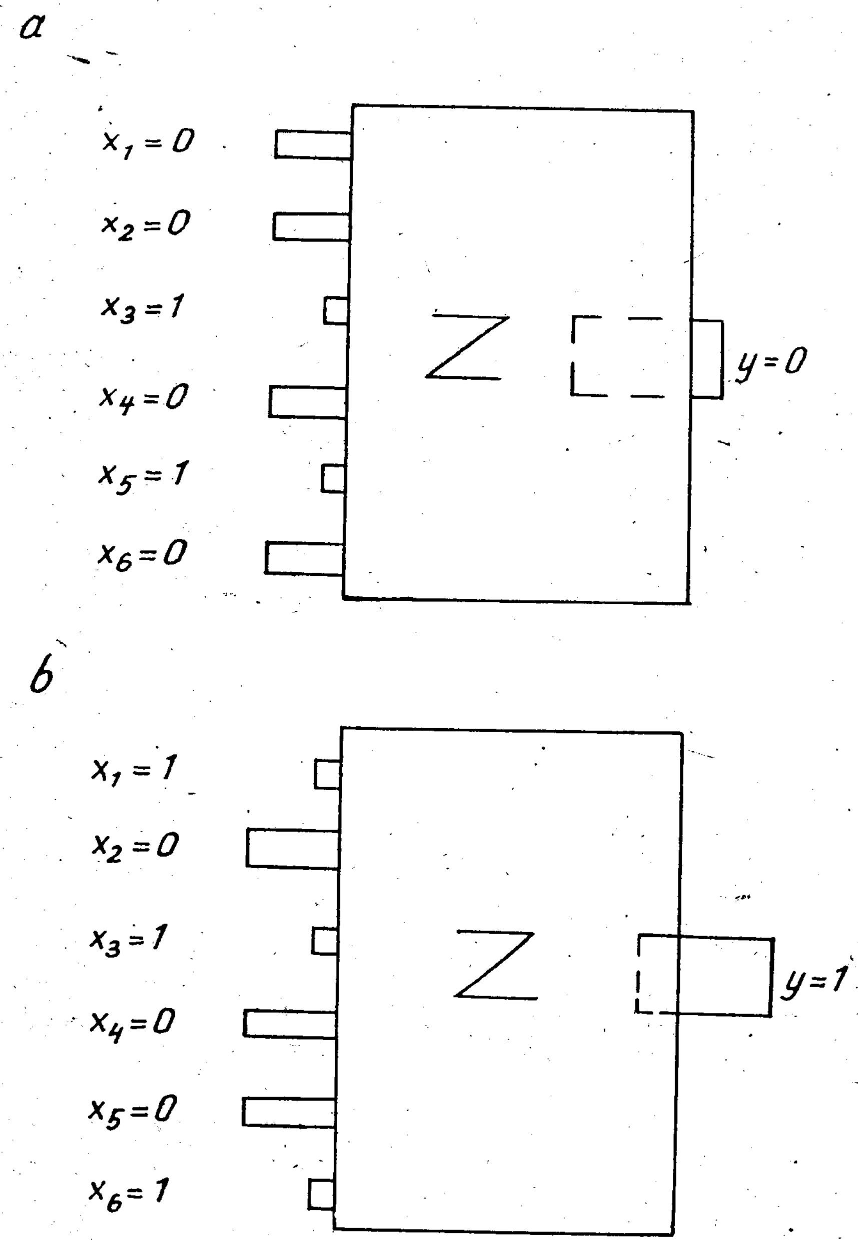
Działanie zamka możemy przedstawić w postaci formuły logicznej

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

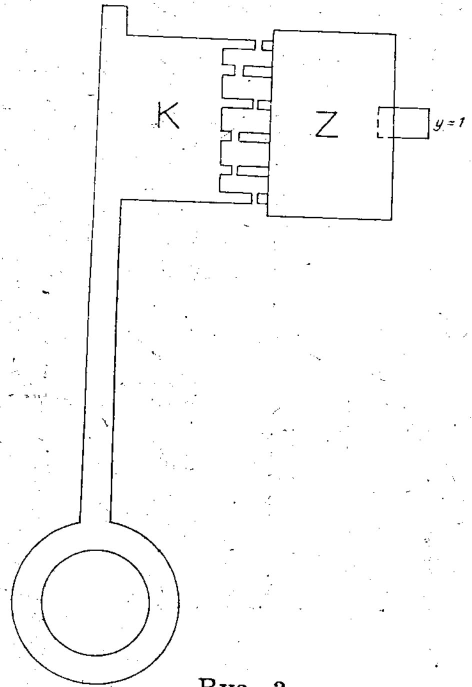
której wartość wynosi 1 tylko wtedy, jeżeli $x_1, ..., x_n$ przyjmują odpowiednie dla danego zamka wartości 0 i 1. Na przykład działanie zamka możemy zapisać w postaci

$$y = \sim x_1 \,\&\, x_2 \,\&\!\sim x_3 \,\&\, x_4 \,\&\, x_5 \,\&\!\sim x_6$$

* Pomijamy tu dla prostoty fakt, że w celu otworzenia czy zamknięcia zamka należy klucz przekręcić.



Rys. 2



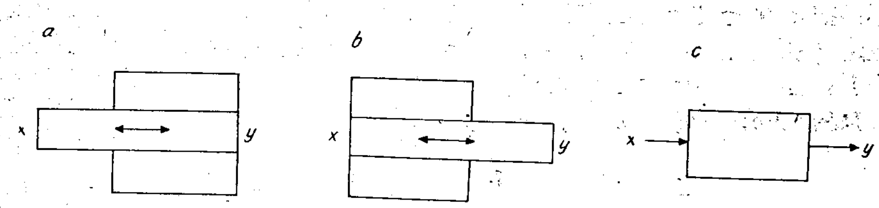
Rys. 3

Posługując się podanymi w poprzednim rozdziale zasadami możemy obliczyć, dla jakich wartości x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 wielkość $y = 1$. Formuła logiczna służy w tym przypadku do opisu działania zamka.

2. *Projektowanie zamków (abstrakcyjnych)*

Czy na podstawie znajomości działania zamka można powiedzieć coś o jego konstrukcji? Tak. Zagadnieniem tym zajmiemy się w tym paragrafie. Zadanie nasze będzie następujące: zadana jest formuła logiczna opisująca działanie zamka; podać jego konstrukcję. Dla ułatwienia będziemy najpierw rozważali zamki możliwie najprostsze.

Na rysunku 4a, b przedstawiony jest najprostszy zamek, zwa-



Rys. 4

ny zasuwą. Sztabka, której jeden koniec oznaczono przez x, a drugi przez y, może być ustawiona w dwu położeniach pokazanych na rysunku 4a i b. Symbolicznie zamek ten będziemy przedstawiali w sposób podany na rysunku 4c.

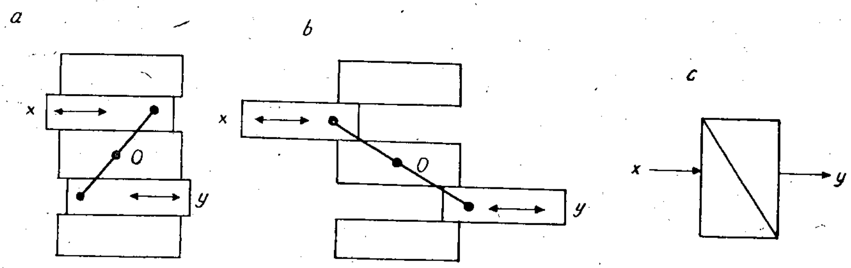
Równanie tej zasuwy będzie miało postać

$$y = x$$

Znaczy to, że jeżeli $x = 0$, to również $y = 0$, a jeżeli $x = 1$, to $y = 1$. Możemy to zapisać w postaci tabelki

x	y
0	0
1	1

Inny rodzaj zamka pokazano na rysunku 5a, b. Zamek ten składa się z dwu ruchomych zasuw oznaczonych przez x i y. Każda zasuwa może znajdować się w jednym z dwu położeń. Zasuwy są połączone ruchomą dźwignią obracającą się wokół



Rys. 5

punktu 0 w ten sposób, że jeżeli $x = 0$, to $y = 1$ i odwrotnie, tzn. jeżeli $x = 1$, to $y = 0$. Oba możliwe położenia tej zasuwy pokazane są na rysunkach 5a i b.

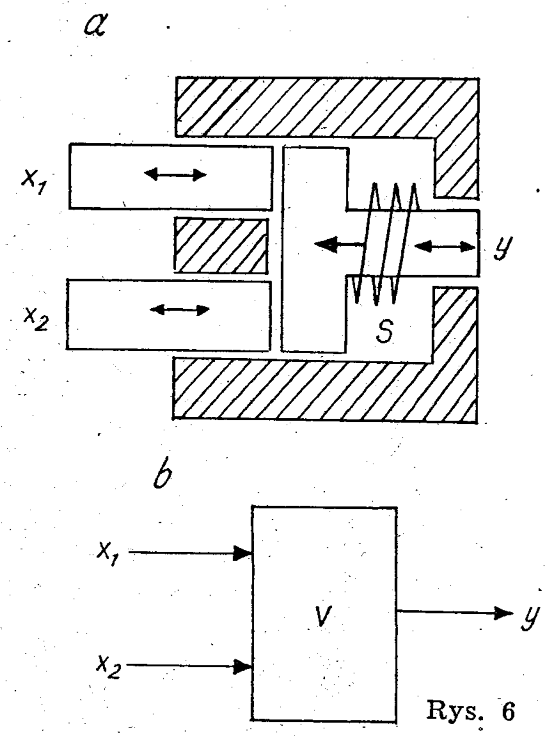
Równanie tej zasuwy ma postać

$$y = \sim x$$

a działanie możemy opisać tabelką

x	y
0	1
1	0

Zasuwa ta jest pewną techniczną realizacją negacji. Negację będziemy przedstawiali w sposób uproszczony, tak jak to pokazano na rysunku 5c.



Rys. 6

Rozpatrzymy jeszcze trzeci rodzaj elementarnego zamka, pokazany na rysunku 6a. W skład tego zamka wchodzą trzy ruchome elementy, oznaczone przez x_1, x_2 oraz y. Każdy z tych elementów może się znajdować w jednym z dwu możliwych położeń. Sztabka y ma kształt litery T. Sprężyna S dociska tę sztabkę do sztabek x_1 i x_2.

Nietrudno się domyślić działania tego zamka. Aby wysunąć sztabkę y, należy wcisnąć sztabkę x_1 lub x_2*. Możemy to ująć w tabelkę

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Nie zdziwi się więc Czytelnik, że zamek ten nazwiemy alternatywą, a jego działanie opiszemy równaniem logicznym

$$y = x_1 \vee x_2$$

Alternatywę będziemy oznaczali symbolicznie w sposób pokazany na rysunku 6b.

Nasuwa się pytanie, jaką konstrukcję będzie miał zamek. którego działanie będzie opisane tablicą koniunkcji? Można podać wiele konstrukcji takiego zamka, jednakże dla nas najbardziej interesująca będzie ta, którą otrzymamy nie w wyniku rozważań technicznych, lecz prostych operacji matematycznych.

Na podstawie prawa de Morgana koniunkcję możemy wyrazić za pomocą alternatywy i negacji. W prawie de Morgana

$$\sim (x_1 \& x_2) = \sim x_1 \vee \sim x_2$$

po obu stronach równości możemy dopisać znak negacji ($\sim$) i wtedy otrzymamy

$$\sim[\sim (x_1 \& x_2)] = \sim(\sim x_1 \vee \sim x_2)$$

* Zakładamy, że sztabki x_1 i x_2 po usunięciu siły je wciskającej wracają do pierwotnego położenia wskutek nacisku sprężyny S, a element T może wykonywać tylko ruchy wskazane strzałką.

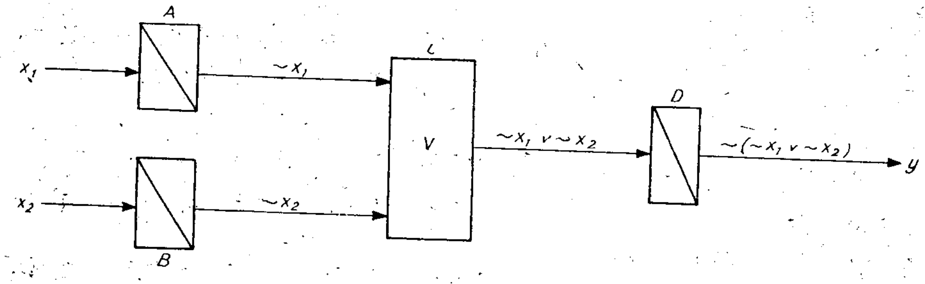
Na podstawie prawa podwójnego przeczenia lewą stronę równania możemy zapisać w postaci

$$x_1 \& x_2$$

a więc

$$x_1 \& x_2 = \sim(\sim x_1 \vee \sim x_2)$$

Gdy mamy już zamki realizujące negację i alternatywę, zrealizowanie zamka-koniunkcji nie sprawi nam trudności. Rozwiązanie tego zamka pokazane jest na rysunku 7. Zgodnie



Rys. 7

ze wzorem (1), oba składniki alternatywy x_1 i x_2 są zanegowane i zanegowana jest również cała alternatywa.

Cierpliwemu Czytelnikowi polecamy rozpatrzenie wszystkich możliwych położeń sztabek w rozpatrywanych czterech zamkach, wchodzących w skład koniunkcji, celem przekonania się, że zamek działa rzeczywiście według prawa koniunkcji. To znaczy, aby wysuwał się języczek y, muszą być wciśnięte jednocześnie oba języki x_1 i x_2.

Z logiki wiadomo, że negacja i alternatywa wystarczają do określenia wszystkich możliwych funkcji dwuwartościowych, a więc rozważane przez nas dwa elementarne zamki wystarczą do zbudowania wszystkich możliwych zamków.

Na przykładzie rozpatrzymy przebieg konstruowania zamka, którego równanie ma postać

$$y = \sim x_1 \& x_2 \& \sim x_3 \& x_4 \& x_5 \& \sim x_6$$

Przyjmiemy, że kolejność, w jakiej występują w równaniu zmienne „zamkowe" x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, nie gra roli w naszych rozważaniach. Wobec tego pogrupujemy zmienne tak, jak to pokazano niżej, ujmując jednocześnie w dowolny sposób wyrażenia parami w nawiasy (pozwala na to prawo B_3)

$$y = [(\sim x_1 \& \sim x_3) \& (x_4 \& x_5)] \& (x_2 \& \sim x_6)$$

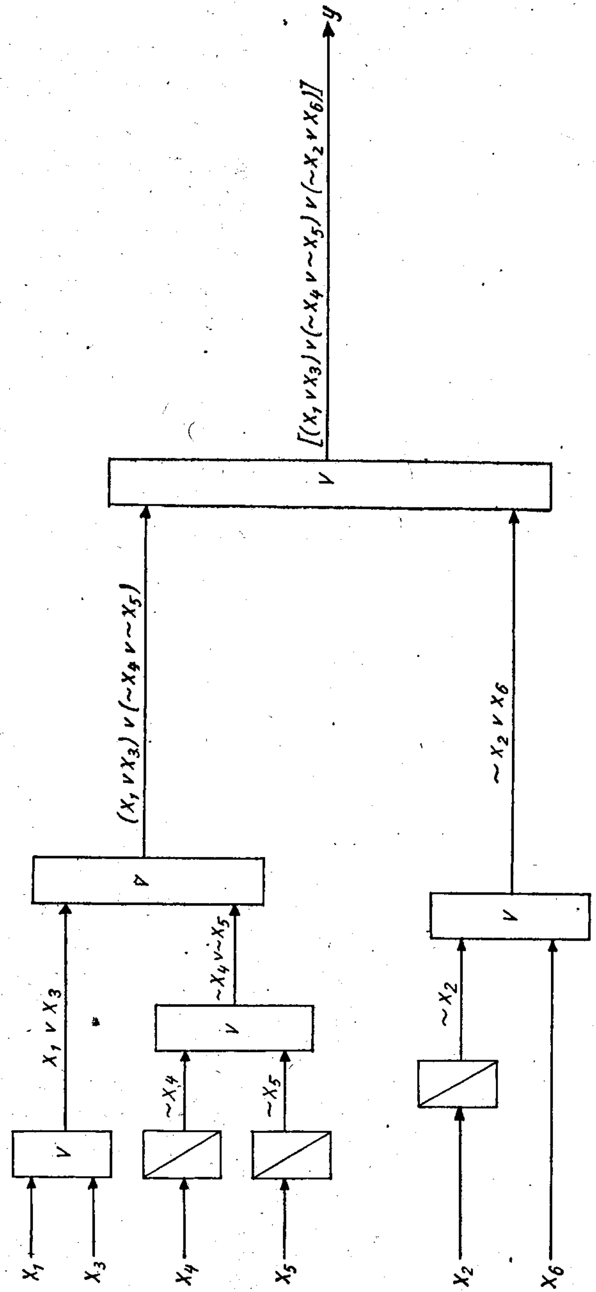
Abyśmy zamek ten umieli zrealizować, musimy w równaniu wyeliminować wszędzie symbole koniunkcji. Cel ten łatwo osiągnąć stosując do kolejnych zamków koniunkcji prawo de Morgana

$$\begin{aligned} y &= [(\sim x_1 \underline{\&} \sim x_3) \& (x_4 \& x_5)] \& (x_2 \& \sim x_6) = \\ &= [\sim (x_1 \vee x_3) \& (x_4 \underline{\&} x_5)] \& (x_2 \& \sim x_6) = \\ &= [\sim (x_1 \vee x_3) \& \sim (\sim x_4 \vee \sim x_5)] \& (x_2 \underline{\&} \sim x_6) = \\ &= [\sim (x_1 \vee x_3) \underline{\&} \sim (\sim x_4 \vee \sim x_5)] \& \sim (\sim x_2 \vee x_6) = \\ &= \sim [(x_1 \vee x_3) \vee (\sim x_4 \vee \sim x_5)] \underline{\&} \sim (\sim x_2 \vee x_6) = \\ &= \sim \{[(x_1 \vee x_3) \vee (\sim x_4 \vee \sim x_5)] \vee (\sim x_2 \vee x_6)\} \end{aligned}$$

Cierpliwy Czytelnik z łatwością prześledzi przeprowadzone przekształcenia. Eliminowane symbole koniunkcji są we wzorach podkreślone. Na podstawie ostatniej formuły możemy już przedstawić schemat szukanego zamka, jak to pokazano na rysunku 8 *. Dla ułatwienia przy każdym zamku składowym napisano realizowaną przez niego formułę logiczną. Sprawdzenie poprawności działania tego zamka będzie pożytecznym zajęciem dla Czytelnika interesującego się bardziej szczegółowo omawianą problematyką.

Pokazany sposób konstruowania zamka może się wydawać zbyt skomplikowany. Ci, którzy tak sądzą, niech spróbują rozwiązać to zadanie inną metodą. Przypuszczam, że zmienią zdanie.

* Dla łatwiejszego sprawdzenia, na rysunku 8 podano realizację formuły $\sim y$.



Rys. 8

3. Projektowanie maszyn matematycznych

Kto zapoznał się dobrze z ideami przedstawionymi w poprzednim paragrafie, nie będzie miał trudności w zrozumieniu działania współczesnych elektronicznych maszyn matematycznych *. Ich struktura wewnętrzna z logicznego punktu widzenia bardzo przypomina strukturę zamka.

Każdą maszynę matematyczną można zbudować z trzech typów podstawowych elementów **. Dwa z nich pokazane są na rysunku 9a, b. Zrozumienie ich działania wymaga znajomości zasady pracy lamp elektronicznych, stosowanych w naszych odbiornikach radiowych i telewizyjnych. Aby nie czynić zbyt odległych dygresji, nie będziemy wyjaśniali szczegółowo działania tych układów, a podamy tylko idee ich pracy, które bez trudu zrozumie każdy Czytelnik.

Układ przedstawiony na rysunku 9a ma taką własność, że jeżeli napięcie elektryczne między A i B (oznaczone przez x_1) ma niską wartość, to napięcie między punktami D i C (oznaczone na rysunku przez y) ma wartość wysoką i odwrotnie — wysokiej wartości napięcia x_1 odpowiada niska wartość napięcia y ***.

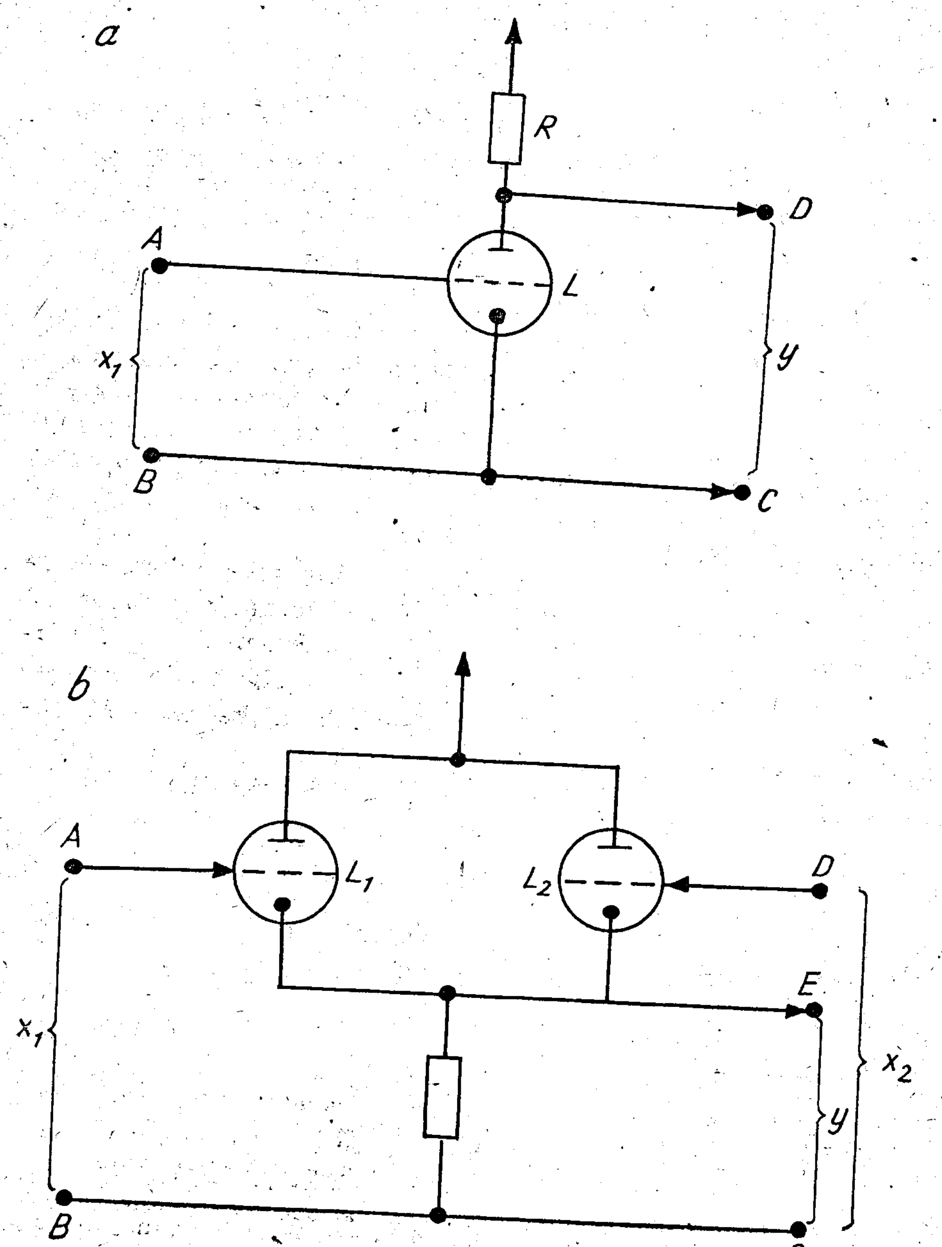
Działanie tego układu można więc opisać tabelką

x_1	y
niskie	wysokie
wysokie	niskie

* Chodzi tu o tzw. maszyny cyfrowe.

** Trzecim elementem jest tak zwany układ opóźniający, jednak nie będziemy się nim w tej książce zajmować.

*** Pod terminami napięcie niskie i wysokie rozumiemy jakieś dwa różne napięcia, których wartość jest dla nas nieistotna. Ważne jest, abyśmy umieli tylko oba te napięcia rozróżnić między sobą. Na przykład jako napięcie niskie możemy przyjąć 5 woltów, a jako wysokie 10 woltów, bądź też jako niskie — 10 woltów, a jako wysokie 50 woltów.



Rys. 9

Jeżeli słowa „niskie” i „wysokie” zastąpimy odpowiednio symbolami 0 i 1, to otrzymamy znaną nam tabelkę negacji

x_1	y
0	1
1	0

Dlatego układ ten nazywany jest negacją.

Rozpatrzmy teraz działanie układu przedstawionego na rysunku 9b. Składa się on z dwu lamp elektronicznych L_1 i L_2. Układ ten ma taką własność, że jeżeli napięcie między punktami A i B (oznaczone przez x_1) jest wysokie lub napięcie między punktami D i C (oznaczone przez x_2) jest wysokie, to również napięcie między punktem E i C (oznaczone przez y) jest wysokie. Możemy to zapisać w postaci tabeli

x_1	x_2	y
niskie	niskie	niskie
niskie	wysokie	wysokie
wysokie	niskie	wysokie
wysokie	wysokie	wysokie

Wprowadzając do tabelki symbole 0 i 1, jak to uczyniliśmy poprzednio, otrzymamy

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Jest to znana nam tabelka alternatywy, dlatego układ ten nosi nazwę alternatywy. Układy takie, podobnie jak zamki, można ze sobą łączyć w odpowiedni sposób, otrzymując bardzo skomplikowane urządzenia elektroniczne. Rysunek 8 możemy interpretować np. nie jako schemat zamka, lecz schemat pewnego układu lampowego.

Przedstawiona zasada jest wykorzystywana do budowy maszyn matematycznych. W maszynie takiej liczby są zapisywane tylko za pomocą dwu cyfr 0 i 1, a nie dziesięciu, jak to czynimy w rachunkach ręcznych. Każdą tak zapisaną liczbę można przedstawić za pomocą odpowiednio zmieniającego się napięcia elektrycznego. Działania na tych liczbach sprowadzają się do odpowiedniego przekształcania napięć elektrycznych za pomocą układów zbudowanych z negacji i alternatywy*. Maszyna matematyczna jest plątaniną często kilkudziesięciu tysięcy takich negacji i alternatyw.

Jeżeli ktoś chce sobie wyobrazić, jak projektuje się maszyny matematyczne, niech spróbuje jeszcze raz rozwiązać przykład projektowania zamka podany w poprzednim paragrafie, uświadamiając sobie, że należy w zadaniu zwiększyć liczbę elementów tysiąc albo i milion razy. Chodzi przy tym jeszcze, aby znalezione rozwiązanie nie było pierwsze lepsze, ale żeby szukany schemat zawierał jak najmniejszą liczbę elementów.

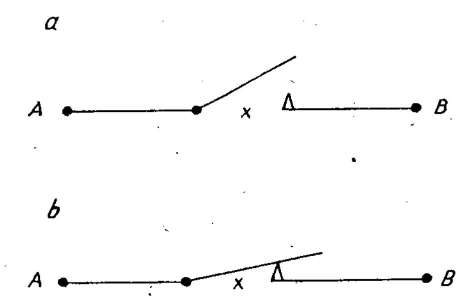
Poza tym dochodzi jeszcze szereg warunków natury technicznej, którą tutaj sobie beztrosko pominęliśmy. Nic więc dziwnego, że strukturę logiczną nowoczesnej maszyny projektuje zespół inżynierów czasem nawet kilka lat. Doskonałe zajęcie dla ludzi lubiących rozwiązywanie krzyżówek-gigantów.

* Dokładniej może się Czytelnik zapoznać z tą problematyką z książki A. W. Mostowskiego *Zastosowania algebry Boole'a*, PWN, 1964.

4. *Automatyka też korzysta z usług logiki*

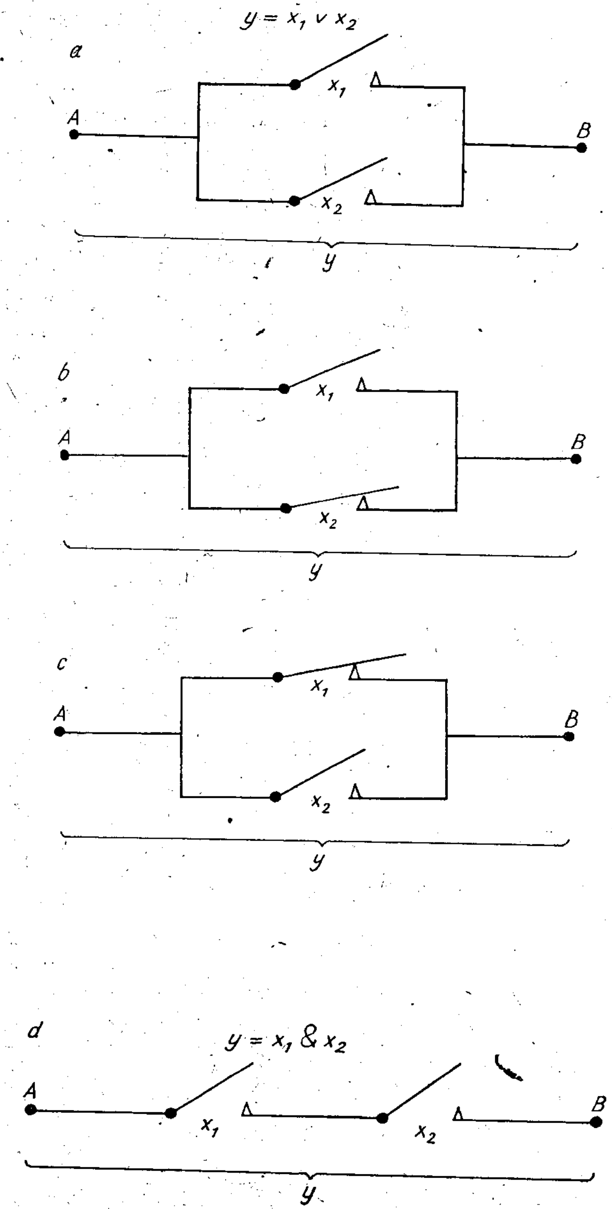
W automatycznych urządzeniach przemysłowych sterujących pracą hut, fabryk chemicznych, w automatycznych centralach telefonicznych i innych urządzeniach stosowane są tzw. przekaźnikowe urządzenia sterujące. Nie wchodząc w istotę działania tych urządzeń chcielibyśmy pokazać, że do ich projektowania potrzebna jest znajomość rachunku logicznego.

Zastosowanie tego rachunku polega tutaj na bardzo prostym fakcie. Na rysunku 10a, b przedstawiony jest dwupozycjowy kontakt, który może znajdować się w jednym z dwu położeń, zamykając lub otwierając obwód elektryczny. W położeniu kontaktu przedstawionym na rysunku 10a, między punktami A i B nie istnieje przewodność, natomiast w drugim położeniu (rys. 10b) przewodność między punktami A i B jest bardzo duża (często się mówi, że przewodność jest wtedy nieskończenie wielka).

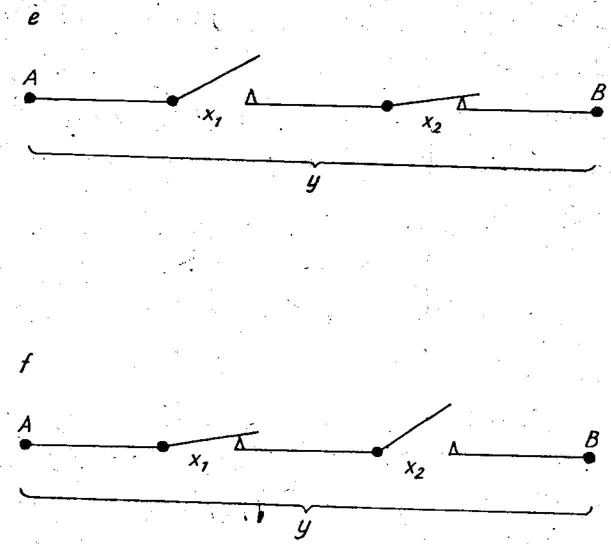


Rys. 10

Rozpatrzmy, jak będzie zależała przewodność między punktami A i B, jeżeli dwa kontakty x_1 i x_2 połączymy ze sobą równolegle, jak to pokazano na rysunku 11a. Przewodność między punktem A i B oznaczymy literą y. Aby istniała przewodność y, musi być zamknięty kontakt x_1 lub kontakt x_2, jak to pokazano na rysunkach 11b i c. Oczywiście, jeżeli oba



Rys. 11



Rys. 11

kontakty x_1 i x_2 są zamknięte, przewodność między A i B istnieje również.

Zapiszmy wszystkie możliwe sytuacje w takiej sieci kontaktów w postaci tabelki, oznaczając brak przewodności przez 0, a istnienie przewodności przez 1

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Mamy znów znaną nam tabliczkę alternatywy. Równoległe połączenie kontaktów realizuje więc alternatywę.

Co będzie, jeżeli dwa kontakty połączymy szeregowo, jak to pokazano na rysunku 11d? Napiszmy od razu tabliczkę przewodności przy wszystkich możliwych położeniach kontaktów x_1 i x_2

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

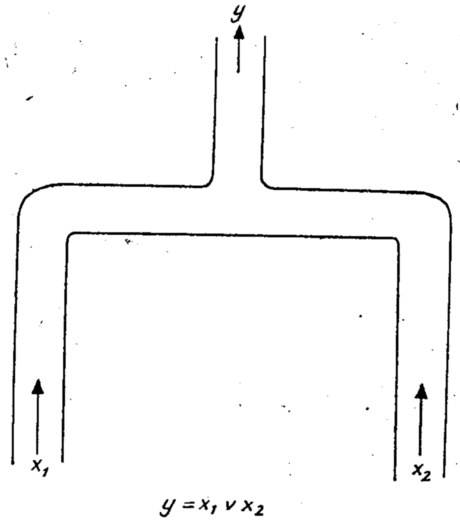
A więc przewodność y wynosi 1 wtedy, i tylko wtedy, jeżeli zamknięty jest kontakt x_1 i zamknięty jest kontakt x_2. Takie połączenie kontaktów realizuje więc koniunkcję.

Trochę kłopotów sprawia zrealizowanie tablicy negacji za pomocą odpowiedniego połączenia kontaktów. Umiejąc opisywać najprostsze połączenia kontaktów, możemy również w ten sposób, za pomocą rachunku logicznego, opisywać działania bardziej skomplikowanych sieci kontaktowych, jak również zastosować ten rachunek do ich konstruowania i upraszczania. Sieci takie są podstawą najrozmaitszych urządzeń automatycznych.

Przykładem pogmatwanego kłębowiska w najrozmaitsze sposoby połączonych ze sobą kontaktów jest centrala telefoniczna. Podnosząc słuchawkę aparatu telefonicznego, czy naciskając guzik do windy pamiętajmy, że wykorzystujemy przy tej operacji prawa logiki uwięzione w plątaninie przewodów elektrycznych.

Logika powinna również zainteresować hydraulików. Prawa logiki można bowiem zastosować do projektowania sieci hydraulicznych. Wtedy alternatywę realizuje zwykłe rozgałęzienie rur, pokazane na rysunku 12. Jeżeli do otworu x_1 lub x_2 puścimy płyn lub gaz (np. powietrze), to znajdzie się on również w otworze y. A więc takie rozgałęzienie rur realizuje także sumę logiczną. Trochę trudniejsza jest realizacja negacji.

Na zasadzie pneumatycznej bądź hydraulicznej budowane są maszyny matematyczne stosowane w rakietach, gdyż ten sposób realizacji technicznej jest bardzo niezawodny i wytrzymały na wstrząsy. Maszyna matematyczna w rakiecie przypomina bardzo skomplikowaną sieć wodociągową w miniaturze, w której zamiast wody przepływa sprężone powietrze lub specjalny płyn, pulsując odpowiednio w różnych jej zakamarkach w takt wykonywanego obliczenia. Sieć wodociągowa czy hydrauliczno-kanalizacyjna może być więc również ciekawym obiektem studiów dla logików zajmujących się zastosowaniami.



Rys. 12

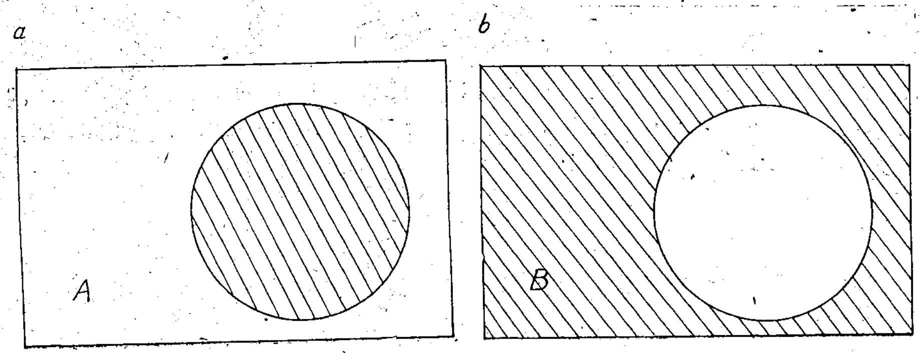
5. *Logika dla fotografów*

Każdy, kto kiedykolwiek wywoływał błonę fotograficzną, wie, że otrzymujemy na niej odwrócony obraz, tzw. negatyw, tzn. obraz, w którym każdy jego punkt ma odwrotne zaczernienie aniżeli odpowiedni punkt w obrazie fotografowanym. Punktowi czarnemu obrazu odpowiada biały punkt negatywu i odwrotnie. Jest to więc nowy sposób technicznej realizacji negacji.

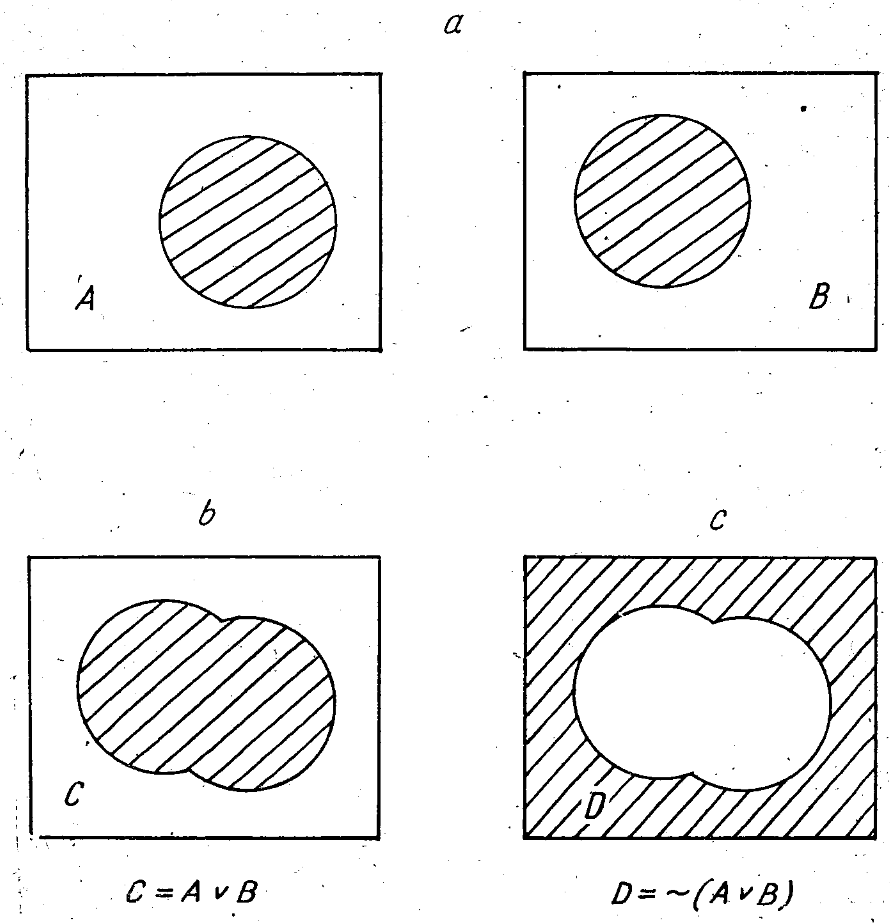
Przykład obrazu i jego negacji pokazano na rysunku 13a,b. Obraz A jest negacją obrazu B, co możemy zapisać w symbolice logicznej

$$A = \sim B$$

Mniej wprawny fotograf zetknął się zapewne z koniunkcją (sumą) obrazów, gdy zapomniał przesunąć błonę po wykonaniu zdjęcia i zrobił na tej samej klatce dwa obrazki. Takie podwójnie naświetlone zdjęcie będzie zaczernione w tych punktach, w których jeden lub drugi obraz był zaczerniony. Łatwiej sobie to uzmysłowimy, jeśli przyjmiemy, że każdy obraz fotograficzny składa się tylko z dwu rodzajów punktów: czarnych i białych (jak w gazecie) i nie posiada punktów o zaczernieniu pośrednim.



Rys. 13



Rys. 14

Suma logiczna obrazów pokazana jest na rysunku 14b. Możemy to zapisać

$$C = A \vee B$$

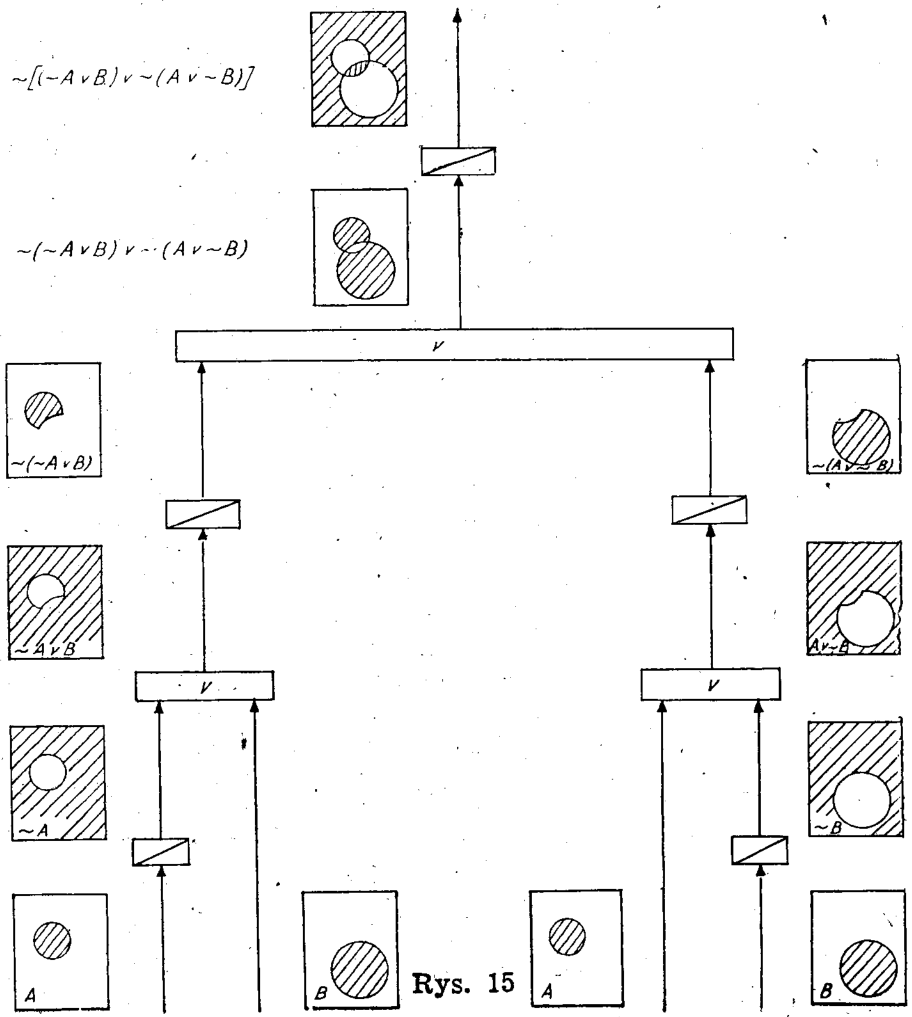
W aparacie fotograficznym uzyskujemy jednakże nie sumę, ale negację sumy, czyli obraz

$$C = \sim (A \vee B)$$

jak to pokazano na rysunku 14c. W ten sposób na obrazach możemy również wykonywać operacje rachunku logicznego. Ciekawym ćwiczeniem jest np. wykonanie obrazu według wzoru

$$C = (\sim A \vee B) \,\&\, (A \vee \sim B)$$

gdzie A i B są to obrazy pokazane na rysunku 14a.



Rys. 15

Ponieważ nie możemy za pomocą aparatu fotograficznego wykonać koniunkcji obrazów, musimy zastosować odpowiednie prawo de Morgana i otrzymamy wtedy formułę

$$C = \sim[\sim(\sim A \vee B) \vee \sim(A \vee \sim B)]$$

Tę formułę potrafimy już zrealizować za pomocą aparatu fotograficznego *.

Przebieg fotografowania przedstawiony jest na rysunku 15. Najpierw wykonujemy negatyw obrazu A. Następnie składamy ten negatyw ($\sim$ A) i pozytyw B i przez wspólne naświetlenie tworzymy obraz

$$\sim(\sim A \vee B)$$

Dalej tworzymy negatyw B i z obu obrazów A i $\sim B$ tworzymy obraz

$$\sim(A \vee \sim B)$$

Następnie składając jeszcze raz obrazy

$$\sim(\sim A \vee B) \quad \text{oraz} \quad \sim(A \vee \sim B)$$

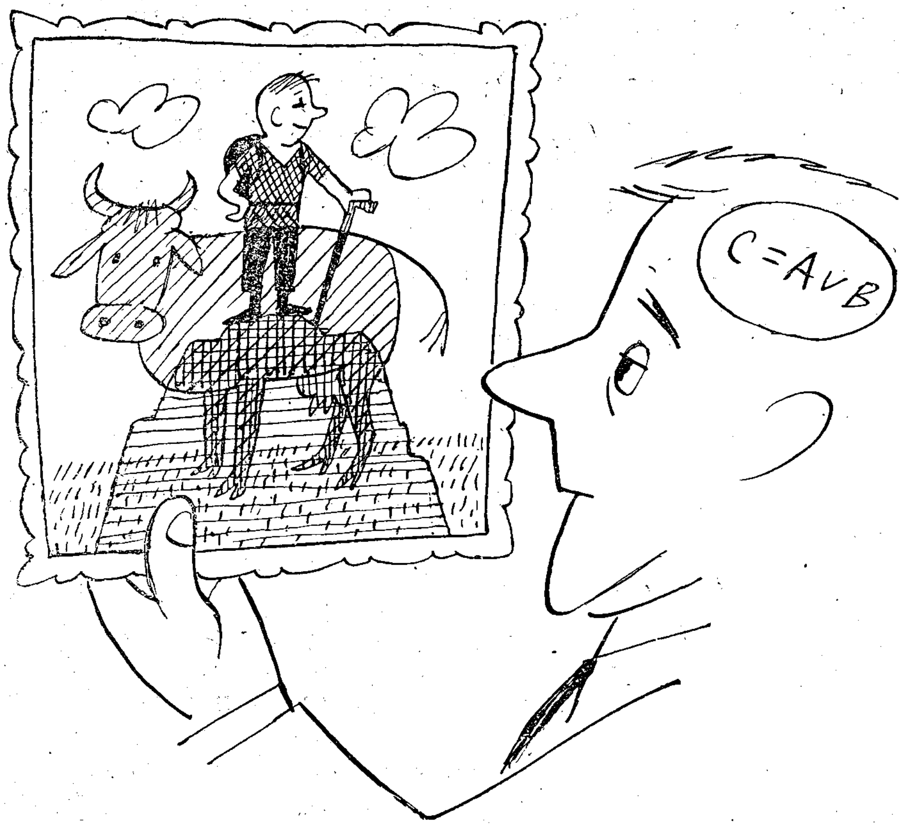
i wspólnie je naświetlając otrzymujemy obraz

$$\sim[(\sim A \vee B) \vee \sim(A \vee \sim B)]$$

Na możliwość interpretowania operacji logicznych jako operacji fotograficznych zwrócono niedawno uwagę w Anglii w związku ze studiami nad przyspieszeniem działania maszyn matematycznych. Obecne najszybsze maszyny wykonują do 10 000 000 operacji arytmetycznych w ciągu sekundy. Do rozwiązywania niektórych zagadnień potrzebne są jednak maszyny tysiące razy szybsze niż obecne.

Operacje na obrazach można wykonywać nie tylko na dro-

* Aparat fotograficzny jest tu w zasadzie niepotrzebny, gdyż można wykonywać odbitki stykowe.



dze chemicznej. Nowoczesna elektronika umożliwia wykonywanie na obrazach wielu milionów operacji w ciągu sekundy. Punkty obrazu mogą być wówczas interpretowane jako liczby, a operacje można tak dobrać, aby na którymś z kolei otrzymanym obrazie uzyskać wyniki obliczenia w postaci odpowiednio porozmieszczanych punktów czarnych i białych. Być może na tej drodze uda się rzeczywiście znacznie przyśpieszyć działanie maszyn matematycznych *.

* Warto zwrócić uwagę, że może udałoby się również znaleźć rachunek odpowiadający fotografii barwnej. Wiadomo, że barwy można dodawać, odejmować i uzupełniać, np. sumą barw niebieskiej i żółtej jest barwa zielona, a uzupełnieniem barwy żółtej — fioletowa.

6. *Pola logiczne*

Pojęciowego aparatu logiki można użyć również do uproszczonego opisu niektórych zjawisk fizycznych. Pokażemy to na przykładzie rozchodzenia się fali w przestrzeni, którą nazwiemy polem logicznym. Pole logiczne możemy sobie wyobrazić jako nieskończony zbiór punktów na płaszczyźnie, rozmieszczonych w węzłach siatki, np. prostokątnej, jak to pokazano na rysunku 16. Każdy punkt tej siatki jest określony przez jego współrzędne.

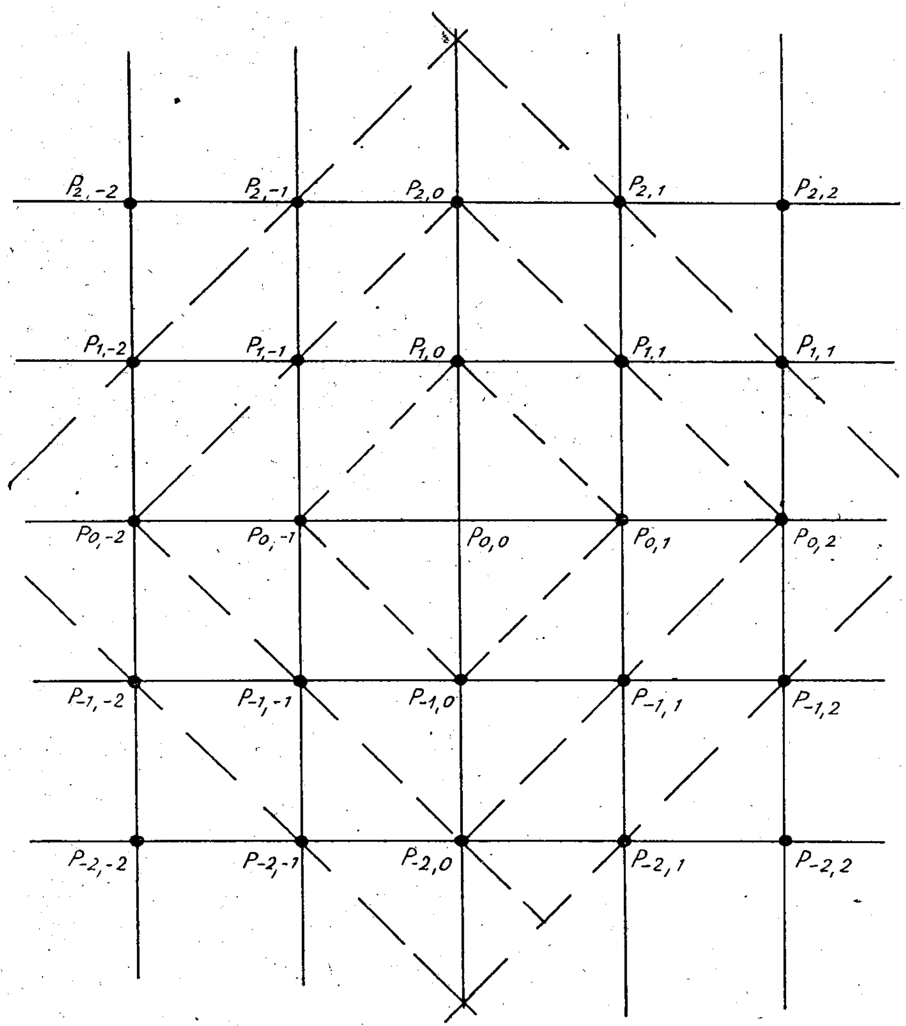
Przyjmijmy dalej, że każdy punkt siatki może znajdować się w stanie 0 bądź 1. Stan 0 może oznaczać np. brak napięcia, a 1 — obecność napięcia na danym punkcie. Będziemy mówili, że każdy punkt siatki jest otoczony czterema innymi punktami, np. dla punktu $p_{0,0}$ na rysunku 16 punktami otaczającymi są: $p_{0,-1}$; $p_{-1,0}$; $p_{0,1}$; $p_{1,0}$. Punkty $p_{0,-1}$ i $p_{0,1}$ oraz $p_{-1,0}$ i $p_{1,0}$ będziemy nazywali punktami przeciwległymi.

W dalszym ciągu założymy, że w każdym punkcie siatki znajduje się układ elektroniczny, realizujący funkcję logiczną w postaci

$$p_{i,j} = (p_{i,j-1} \vee p_{i-1,j} \vee p_{i,j+1} \vee p_{i+1,j}) \,\&$$
$$\& \sim [(p_{i-1,j} \,\&\, p_{i+1,j}) \vee (p_{i,j+1} \,\&\, p_{i,j-1})]$$

Zgodnie z tą funkcją punkt $p_{0,0}$ ma wartość 1 wtedy, i tylko wtedy, jeżeli wartość 1 posiada punkt $p_{0,-1}$ lub $p_{-1,0}$, lub $p_{0,1}$, lub $p_{1,0}$ i jednocześnie nie posiadają wartości 1 jakiekolwiek dwa punkty przeciwległe. I tak $p_{0,0} = 1$, jeżeli $p_{0,-1} = 1$, $p_{-1,0} = 1$, $p_{0,1} = 0$, $p_{1,0} = 0$. Jeżeli natomiast $p_{0,1} = 1$ i $p_{1,0} = 1$, to na podstawie podanego wzoru $p_{0,0} = 0$. Przyjmijmy jeszcze, że wartość funkcji w punkcie $p_{i,j}$ ustala się dopiero po upływie jakiejś jednostki czasu od ustalenia wartości wszystkich punktów otaczających.

Co się będzie działo w takiej sieci, jeżeli w pewnej chwili dowolnemu jej punktowi nadamy wartość 1 (zakładamy przy tym, że wszystkie pozostałe punkty posiadają wtedy wartość



Rys. 16

zero)? Po upływie jednostki czasu wartość ta zostanie przekazana do wszystkich czterech punktów otaczających punkt pobudzony. Co dalej? Każdy z nowo pobudzonych punktów pobudzi dalsze punkty itd., np. punkty $p_{1,0}$ i $p_{0,-1}$ pobudzą punkt $p_{1,-1}$. W ten sposób od pierwszego pobudzonego punktu zacz-

nie się rozchodzić po siatce fala pobudzeń, przypominająca falę kołową na powierzchni wody, wytworzoną wrzuconym do niej kamieniem.

Pobudzając nie jeden, ale jednocześnie dwa punkty siatki, możemy wywołać zjawisko interferencji fal, powstałych w dwu punktach pobudzenia. Jeżeli pobudzimy na jednej linii większą liczbę sąsiednich punktów, wywołamy w siatce falę płaską.

Możemy przyjąć, że siatka jest skończona i że na jej brzegu są spełnione określone warunki logiczne. Zależnie od przyjętych warunków brzegowych możemy wywołać pochłanianie lub odbicie fali od brzegu.

Opisany model, jakkolwiek w podanej postaci jest pozbawiony większej przydatności praktycznej, posiada niewątpliwie pewne walory dydaktyczne, ilustrujące w bardzo prosty sposób mechanizm rozchodzenia się fali.

7. *Sieci neuronowe*

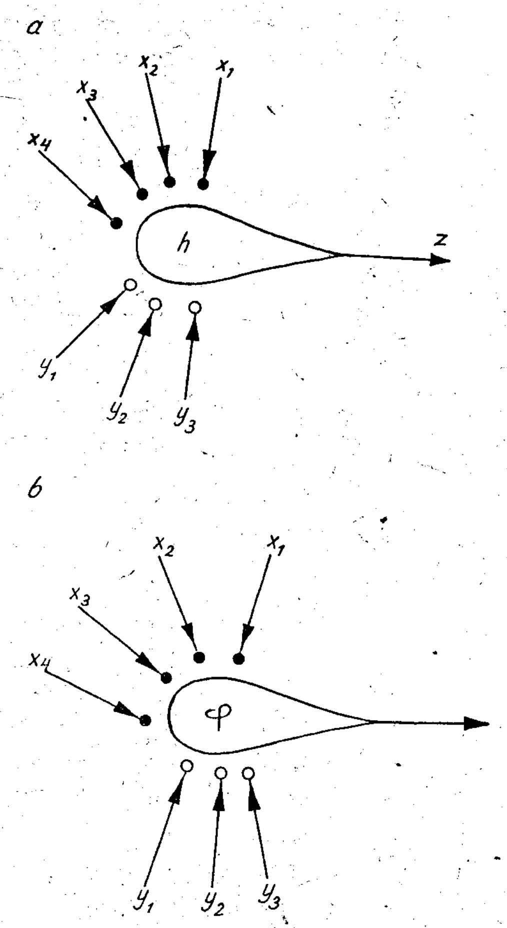
Neuron jest to element sieci nerwowej. Nie będziemy tutaj opisywali dokładnie jego działania, gdyż wykraczałoby to znacznie poza zakres poruszanych tu zagadnień *. Podamy natomiast jego model matematyczny, a ściślej nie jeden model, lecz więcej.

Jak już mówiliśmy, sieć nerwowa składa się z neuronów. Liczba neuronów w ludzkim systemie nerwowym jest astronomiczna. Wobec niej liczba elementów maszyny matematycznej jest znikomo mała. Neurony w sieci nerwowej są w najrozmaitszy sposób połączone ze sobą, tworząc bardzo skomplikowany system łączności w organizmie. Struktura i działanie tego systemu nie są do tej pory dostatecznie zbadane.

Celem dokładnego zbadania systemu nerwowego prowadzone

---

* Z działaniem neuronu można się zapoznać np. z książek tej samej serii: R. Galambos *Nerwy i mięśnie.* WP 1964 i A. Sowiński *Co to jest bioelektryka,* WP 1962 oraz W. Karczewski *Elektryczność w żywym organizmie,* PWN 1963.



Rys. 17

są prace w najrozmaitszych kierunkach, między innymi matematyczne, w poszukiwaniu matematycznej teorii systemu nerwowego. Punktem wyjściowym w tych dociekaniach jest dokładne określenie własności elementarnej cegiełki sieci nerwowej — neuronu. Mając już dokładnie opisaną i zbadaną tę podstawową cegiełkę konstrukcyjną, można się dalej zastanowić, co da się z niej konstruować przez łączenie neuronów ze sobą w duże zespoły i próbując za ich pomocą modelowania znanego już skądinąd fragmentu systemu nerwowego.

Badania tego rodzaju są dzisiaj bardzo modne i prowadzone w wielu badawczych placówkach świata. Spróbujemy pokazać w tym paragrafie, na czym polega ich istota.

Upraszczając mocno zagadnienie, neuron możemy sobie wyobrazić w postaci pokazanej na rysunku 17a, b. Neuron taki składa się z ciała (podłużna część na rysunku), z którego wychodzi długie włókno nerwowe, zwane aksonem. Akson jest oznaczony na rysunku literą z. Do ciała neuronu dochodzą synapsy, oznaczone na rysunku literami: x_1, x_2, x_3, x_4 oraz y_1, y_2, y_3. Liczba synaps może być znacznie większa niż w naszym

przykładzie. Synapsy zakończone czarną kropką i oznaczone literami x będziemy nazywali pobudzającymi, natomiast synapsy zakończone białym kółkiem i oznaczone literami y — hamującymi.

Jak wiemy, system nerwowy przewodzi impulsy elektryczne. Neuron w tym przesyłaniu spełnia zasadniczą funkcję. Jego działanie polega na tym, że zależnie od sposobu pobudzenia i hamowania jego synaps, na aksonie pojawi się impuls bądź też nie. Pobudzanie i hamowanie polega na przykładaniu impulsów elektrycznych do odpowiednich synaps. Jeżeli np. na synapsie x_1 jest impuls, to neuron jest pobudzony, jeżeli natomiast impuls znajduje się np. na synapsie y_2, to neuron jest hamowany.

Jak zależy pojawienie się impulsu w aksonie od sposobu pobudzenia i hamowania synaps? W pokazanym modelu neuronu przyjęto, że impuls w aksonie pojawi się po jakimś ustalonym czasie, charakterystycznym dla danego neuronu, tylko wtedy, jeżeli suma wejść pobudzanych jest nie mniejsza od h i nie występuje hamowanie. Liczba h jest nazywana progiem czułości neuronu.

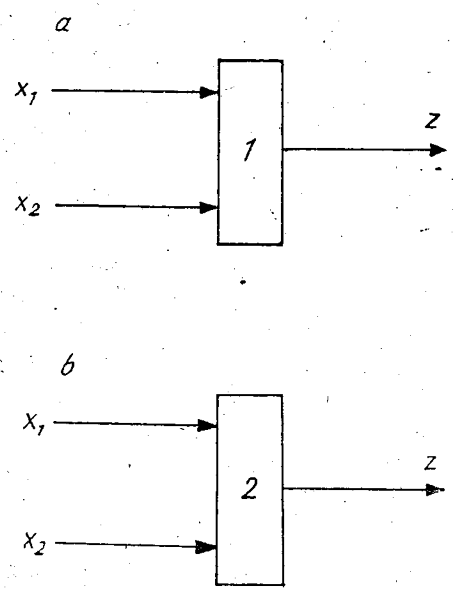
Jeżeli np. $h = 2$, to impuls w aksonie pojawi się, gdy zostaną pobudzone co najmniej dwie synapsy neuronu i nie ma żadnego impulsu hamującego. Jeżeli natomiast chociażby w jednej synapsie hamującej pojawi się impuls, to, niezależnie od pobudzonych synaps, w aksonie impuls się nie pojawi. Mówiąc prościej akson jest pobudzony, jeżeli do neuronu przyjdzie dostatecznie duża liczba pobudzeń i żaden „protest” nie pojawi się na synapsach hamujących. W neuronie odbywa się więc jak gdyby głosowanie z prawem *veta*.

Matematycznie działanie to możemy opisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant h \quad \text{i} \quad \bigcup_{j=1}^{m} y_j = 0$$

gdzie symbol Σ oznacza sumę arytmetyczną pobudzonych synaps, a $\cup$ — sumę logiczną (alternatywę) zahamowań.

Zwróćmy uwagę, że alternatywa i koniunkcja mogą być interpretowane jako szczególne przypadki neuronów (pomijamy tu sprawę czasu). Jeżeli przyjmiemy, że próg czułości neuronu wynosi 1 oraz że neuron nie posiada żadnej synapsy hamującej, lecz dwie synapsy pobudzające, to otrzymamy zwykłą alternatywę (rys. 18a). Aby więc na wyjściu pojawił się impuls, konieczny jest impuls choć na jednym z wejść pobudzających. Jeżeli natomiast przyjmiemy, że próg neuronu wynosi 2, to neuron taki realizuje koniunkcję (rys. 18b), gdyż do tego zadziałania konieczne jest pobudzenie obu wejść, a więc x_1 i x_2.



Rys. 18

Inny model neuronu przedstawiony jest na rysunku 17b. W tym neuronie synapsy hamujące (opozycje) nie mają prawa *veta*, a „głosowanie" odbywa się na zasadzie zliczania głosów „za" i „przeciw" pobudzeniu aksonu. Znaczy to, że sumowana jest liczba pobudzeń i hamowań i zależnie od tego, których głosów jest więcej, neuron zadziała lub nie. Jeżeli np. były trzy pobudzenia i dwa hamowania, to neuron zadziała wysyłając impuls z aksonu, jeżeli natomiast pobudzeń było trzy, a hamowań cztery, to neuron nie zadziała.

Działanie to może być dodatkowo skomplikowane przez wprowadzenie różnej wagi „głosów" hamujących i pobudzających. Możemy np. przyjąć, że trzy głosy „za" są równoważne jednemu głosowi „przeciw". Aby więc akson wysłał impuls, musi być trzy razy więcej pobudzeń aniżeli hamowań. Fakt

różnego uprzywilejowania „zwolenników" i „przeciwników" uruchomienia neuronu jest wyrażony współczynnikiem φ, który mówi o stopniu nierówności między synapsami pobudzającymi i hamującymi.

Działanie tego neuronu zapiszemy w postaci

$$\Sigma x_i \geqslant \varphi(\Sigma y_i)$$

Wzór ten mówi, że do zadziałania neuronu suma pobudzeń musi być większa albo równa sumie hamowań, pomnożonej przez współczynnik wagi tych ostatnich.

Można dalej skomplikować model neuronu, przyjmując, że również różne wagi przypisujemy poszczególnym synapsom, tzn. że nie wszystkie „głosy" mają jednakową wagę. Jeżeli wagi poszczególnych synaps pobudzających oznaczymy przez w_i, a synaps hamujących przez u_i, to otrzymamy teraz wzór na zadziałanie neuronu w postaci

$$\Sigma\, w_i x_i \geqslant \varphi(\Sigma\, u_i y_i)$$

Można wprowadzać wiele innych komplikacji chcąc, aby przyjęty model jak najbardziej odpowiadał rzeczywistości. Mając już przyjęty jakiś rodzaj neuronu, można dalej studiować własności układów z połączonych odpowiednio ze sobą neuronów określonego. typu. Do badania takich sieci neuronowych próbowano stosować rachunek logiczny. Okazało się jednak, że jest on do tego celu mało przydatny.

Trwają więc badania nad stworzeniem rachunku, który by pozwolił na studiowanie własności sieci neuronowych. Rachunek ten został nazwany logiką progową. Studia nad tą logiką są dopiero w stanie początkowym. Być może, w niedługim czasie logicy odkryją system logiki, którym „rządzi się" nasz system nerwowy *.

* Czynione są również próby budowy maszyn matematycznych na elementach neuronowych. Chodzi tu oczywiście nie o prawdziwe neurony, ale o układy elektroniczne działające w podobny sposób.

Postronnemu obserwatorowi może się wydawać, że obecnie budowane maszyny matematyczne stanowią niedościgniony wzór technicznej doskonałości, jednakże inżynierom pracującym w tej dziedzinie obecny stan tej gałęzi techniki wydaje się niezadowalający. Starają się znaleźć receptę na zbudowanie doskonalszych maszyn, przede wszystkim przez zwiększenie szybkości liczenia tych maszyn i obniżenie kosztów ich konstrukcji.

W związku z powyższym prowadzone są intensywne studia nad najrozmaitszymi możliwościami realizowania podstawowych operacji logicznych: alternatywy, koniunkcji i negacji. Szuka się więc zjawisk magnetycznych, optycznych, chemicznych i innych, które realizowałyby funktory „nie" „lub" oraz „i". Niemal wszystkie znane zjawiska fizyczne są ponownie badane pod kątem możliwości realizowania operacji logicznych.

Z drugiej strony, zastosowania logiki postawiły przed logikami szereg nowych problemów. O jednym z nich wspominaliśmy omawiając sieci neuronów. Sukcesy logiki na terenie maszyn matematycznych sprawiły, że próbuje się znaleźć nowe jej zastosowania. Ostatnio czynione są np. próby opisu skomplikowanych reakcji biochemicznych za pomocą środków logicznych.

Wszystkie te osiągnięcia powodują, że logika stała się od niedawna obiektem zainteresowań ludzi najrozmaitszych profesji. Niewątpliwie nie pozostanie to bez wpływu na dalszy jej rozwój.

Rozdział III

AUTOMATY SKOŃCZONE

1. *Nie bójmy się automatów*

W związku z wielkim rozwojem automatyki, w ostatnich latach w wielu krajach zaczęła się szerzyć obawa przed światem robotów. Człowiek poczuł się zagrożony w swojej doskonałości. Nie chodziło tu zresztą tylko o systematyczne wypieranie człowieka przez automaty ze stanowisk roboczych w zakładach produkcyjnych, ale również — a może przede wszystkim — o konkurencję na polu działalności twórczej.

Nie obawiajmy się automatów. Nic teraz nie wskazuje na to, aby mogły one kiedykolwiek naprawdę zastąpić człowieka w jego działalności intelektualnej. Zresztą obawy takie nie pojawiają się obecnie po raz pierwszy. Kilkadziesiąt lat temu przeżywali je poważnie matematycy, zastanawiając się, w jakim stopniu maszyna może zastąpić matematyka w jego pracy twórczej *.

Niektórzy, wybitni nawet matematycy sądzili, że przynajmniej potencjalnie istnieje możliwość zbudowania maszyny, która by zupełnie automatycznie tworzyła dowolne teorie matematyczne. Inni zaś byli przekonani, że sytuacja taka jest niemożliwa. Spór ten został ścisłymi matematycznymi metodami rozstrzygnięty definitywnie w 1930 roku przez matematyka austriackiego Kurta Gödla. Oczywiście na niekorzyść automatów.

* Jednakże obawy te miały charakter raczej natury filozoficznej niż praktycznej i nie dotarły do szerszego kręgu społeczeństwa.

Od tej pory matematycy, pozbywszy się lęku przed najazdem automatów na ich tereny, żyją sobie w spokoju, patrząc z pobłażaniem na usiłowania konstruktorów zmierzające do stworzenia „elektronicznego intelektualisty".

Rozstrzygnięcie sporu, o którym była wyżej mowa, wymagało ścisłego sprecyzowania, co to jest automat i jakie ma własności. Tak więc matematycy w pewnym sensie mimo woli i znacznie wcześniej niż inżynierowie zainteresowali się teorią automatów, tworząc podstawy teoretyczne tej dziedziny, która dzisiaj rozwija się intensywnie zarówno dzięki matematykom, jak i inżynierom.

2. *Automatyzacja w matematyce*

Rozumowanie matematyczne, zwane inaczej wnioskowaniem, polega — z formalnego punktu widzenia — na przekształcaniu według określonych praw jednych zdań prawdziwych w inne zdania prawdziwe. Jedną grupę tych praw stanowią prawa rachunku zdań. Nie wystarczają one jednak do przeprowadzania wszelkich rozumowań matematycznych.

Do tego celu konieczny jest oprócz rachunku zdań inny rachunek, w którym rolę podobną do spójników międzyzdaniowych w rachunku zdań grają słowa: „dla każdego" oraz „istnieje". Słowa te są nazywane kwantyfikatorami, stąd nazwa — rachunek kwantyfikatorów.

Zwrot „dla każdego" jest nazywany kwantyfikatorem ogólnym, a zwrot „istnieje" — kwantyfikatorem szczegółowym. Oba wspomniane zwroty występują niemal w każdym twierdzeniu matematycznym. Powstała więc potrzeba stworzenia rachunku, który by wskazywał sposób posługiwania się kwantyfikatorami, podobnie jak rachunek zdań podaje zasady posługiwania się spójnikami zdaniowymi.

Rachunek kwantyfikatorów rozwinął się pod wpływem trudności, jakie pojawiły się w matematyce na przełomie XIX i XX wieku w związku z powstającą wówczas nową

gałęzią matematyki — teorią mnogości. Okazało się mianowicie, że przeprowadzając w teorii mnogości pozornie zupełnie poprawne rozumowania, dochodzono do sprzeczności.

Rozumowania tego rodzaju nazwano antynomiami. Z cytowanej już książeczki A. Grzegorczyka przytoczymy przykład antynomii znanej pod nazwą „antynomia krokodyla".

„Gdy krokodyl porwał dziecko pewnej Egipcjance, ona prosiła go, aby dziecka nie zjadł, tylko jej oddał. Krokodyl odpowiedział: Nie zjem dziecka i oddam ci je, ale wtedy, i tylko wtedy, jeśli zgadniesz, co z nim uczynię — czy je zjem, czy nie? Na to Egipcjanka: Jesteś straszny, krokodylu, na pewno mi dziecka nie oddasz, tylko zjesz.

Pytanie: co ma uczynić krokodyl, aby postąpić zgodnie ze swoim postanowieniem? Mówiąc inaczej, kiedy krokodyl postąpi konsekwentnie? Rozumując potocznie każdy pomyśli, że jeżeli zje, to zgadła, co uczyni, a więc powinien dziecko oddać zgodnie z przyrzeczeniem. Jeżeli zaś odda, a nie zje, to wtedy nie zgadła, a więc powinien je zjeść zgodnie z przyrzeczeniem. Cokolwiek więc uczyni, zawsze postąpi niekonsekwentnie" *.

Bliższe badania wykazały, że źródłem antynomii jest niezbyt precyzyjne używanie pojęć. Dopiero ścisłe sformułowanie języka matematyki pozwoliło na budowanie zdań, w których każde pojęcie miało dokładnie sprecyzowane znaczenie. Stosując do takich zdań prawa rachunku zdań i kwantyfikatorów nie otrzymamy już antynomii.

Jednocześnie okazało się, że rachunek zdań i kwantyfikatorów w połączeniu z niewielką liczbą aksjomatów pozwala na uzyskanie wszystkich znanych twierdzeń matematycznych. Skoro wszystkie twierdzenia matematyczne można otrzymać z kilku zdań wyjściowych (aksjomatów) przez stosowanie do nich na różne możliwe sposoby reguł logicznych (rachunku zdań i kwantyfikatorów), to wynika stąd, że przynajmniej teoretycznie możliwe jest zbudowanie maszyny, która kombi-

* A. Grzegorczyk *Logika popularna*, PWN, 1960, str. 122.

nując ze sobą w najrozmaitszy sposób wyjściowe aksjomaty, zgodnie z zasadami logiki, wyprodukuje automatycznie całą wiedzę matematyczną. Nie chodzi tu oczywiście o to, czy taką maszynę można aktualnie zbudować praktycznie. Już sama możliwość takiej konstrukcji miałaby doniosłe znaczenie filozoficzne.

Dlatego też problem ten był jednym z najważniejszych problemów filozofii matematyki przed około 30 laty. Jak wspominaliśmy w poprzednim paragrafie, Kurt Gödel wykazał, że cała wiedza matematyczna nie da się uzyskać z żadnego układu aksjomatów na drodze mechanicznego stosowania reguł logicznych. Wynik ten jest uważany za jedno z najważniejszych osiągnięć logiki.

3. *Maszyna Turinga*

Z poruszoną problematyką wiąże się w sposób naturalny pojęcie automatu. Skoro mówimy, że coś się da bądź się nie da zrobić automatycznie, musimy najpierw zdać sobie sprawę z tego, co to jest automat, jakie ma własności, i dopiero wtedy można mówić o granicach jego możliwości.

Dwaj matematycy, Amerykanin Emil Post oraz Anglik Allan Turing, niemal jednocześnie w 1936 r. podali precyzyjne definicje maszyny matematycznej mogącej wykonywać automatycznie dowolne manipulacje na symbolach. Nie chodziło tu oczywiście o jakikolwiek projekt techniczny, ale raczej o pojęcie maszyny abstrakcyjnej. Od nazwiska jednego z twórców tej koncepcji nazwano ją maszyną Turinga.

Maszyna Turinga składa się z nieskończonej taśmy* papieru podzielonej na kratki. W każdej kratce może być zapisany jakiś symbol z ustalonego alfabetu. Maszyna może „obserwować" w każdej chwili jedną kratkę taśmy, odczytać zapisany w niej symbol i, zależnie od odczytanego symbolu i swego stanu, wykonać pewną czynność, która składa się z trzech elementów:

1. wpisania nowego symbolu na miejsce symbolu odczytanego (w szczególności może wpisać ten sam symbol lub też odczytany symbol wymazać z taśmy),
2. przejścia do obserwowania nowej kratki (w szczególności nową kratką może pozostać ta sama kratka),
3. zmiany swego stanu (w szczególnym przypadku maszyna może nie zmienić swego stanu).

Jeżeli więc na taśmie maszyny na początku zostanie umieszczony jakiś napis, to maszyna następnie „czyta" symbole tego napisu i zmienia je w określony sposób zależnie od swoich własności. W rezultacie, po skończonym działaniu, na taśmie znajduje się jakiś inny napis, który jest rozwiązaniem interesującego nas zagadnienia.

Turing wykazał, że wszystko to, co można w matematyce zrobić według z góry ustalonego schematu reguł postępowania, można również wykonać za pomocą zaproponowanej przez niego maszyny. Koncepcja Turinga stanowiła punkt wyjścia do dzisiejszej teorii maszyn matematycznych i automatów. Aby zbliżyć maszynę Turinga* do rzeczywistości, usunięto założenie o nieskończoności taśmy, tworząc w ten sposób pojęcie tzw. automatu skończonego.

4. *Automaty skończone*

Opis wszelkiego rodzaju maszyn i urządzeń może mieć dwojaki charakter: funkcjonalny lub strukturalny. W pierwszym przypadku opisuje się działanie, nie wchodząc bliżej w budowę urządzenia, w drugim przypadku — odwrotnie. Pier-

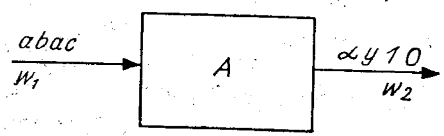
* Założenie nieskończoności taśmy jest oczywiście zupełnie nierealne technicznie, jednakże pamiętajmy, że chodziło tu nie o projekt techniczny, lecz o pewną abstrakcyjną koncepcję.

* Czytelnika pragnącego bliżej zapoznać się z maszyną Turinga, odsyłamy do książki A. Trachtenbrota *Automaty i algorytmiczne rozwiązywanie zadań*, PWN, 1961.

wszy sposób do wielu celów jest przydatniejszy, pomija bowiem nieistotne szczegóły. Dlatego tego rodzaju opis jest podstawą teorii automatów.

W maszynie Turinga symbole, na których manipulowała maszyna, były zapisane na taśmie papierowej. W automacie skończonym nie będziemy precyzowali, co jest nośnikiem informacji: taśma papierowa czy jakiekolwiek inne medium. Założymy tylko, że automat może reagować w określony sposób na docierające do niego symbole, produkując na swoim wyjściu nowe ciągi symboli.

A więc automat skończony możemy sobie wyobrazić jako maszynę, do której wprowadzamy jakiś tekst i po odpowiednim „przerobieniu" otrzymujemy z niej nowy ciąg symboli, jak to pokazano na rysunku 19. Automat taki jest nazywany też „czarną skrzynką", do której coś wprowadzamy poprzez wejście w_1 i po „przerobieniu" otrzymujemy nową informację w_2. Informacje wejściowe i wyjściowe mogą być zapisane w różnych alfabetach.



Rys. 19

Alfabetem automatu może być dowolny (skończony) zbiór jakichkolwiek symboli, np. liter czy cyfr, jak również zbiór sygnałów elektrycznych itd. Natura fizyczna tego zbioru w tej chwili nas bliżej nie interesuje. Przyjmujemy tylko, że automat potrafi „rozróżniać" wszystkie przychodzące na jego wejście symbole czy sygnały.

Na każdy przychodzący symbol automat reaguje w określony sposób, przy czym rodzaj reakcji zależy nie tylko od rozpoznanego symbolu, ale również od stanu automatu. Automat bowiem może znajdować się w jednym z wielu możliwych stanów, przy czym przyjmujemy, że liczba tych stanów jest skończona. Jeżeli jakiś automat może być np. w jednym z dwu stanów, które oznaczymy przez q_0 i q_1, a jego alfabet wejściowy składa się np. z dwu liter a i b, to automat ten

może różnie reagować na literę a, zależnie od stanu, w którym się znajduje.

Musimy jeszcze wyjaśnić, co to znaczy, że automat reaguje. A więc reakcja automatu polega na tym, że przechodzi on do jakiegoś nowego stanu. Jeżeli wspomniany automat dwustanowy odczyta np. literę a i jest w stanie q_0, to pozostanie w tym samym stanie, a jeżeli odczyta literę a w stanie q_1, to przechodzi do stanu q_0. Stany automatu to jak gdyby jego „humory". Zależnie od „humoru" automat na to samo zjawisko reaguje w różny sposób. Termin ten zresztą wziął się z psychologii: człowiek głodny inaczej reaguje na kotlet schabowy aniżeli człowiek najedzony.

A więc automat skończony to taka kapryśna maszyna, która — zależnie od aktualnego stanu i odczytanego symbolu na wejściu — przechodzi do nowego stanu. Ponadto jeżeli automat znajduje się w jakimś ze stanów, to na wyjściu produ-

kuje jeden z możliwych symboli wyjściowych. W ten sposób każdy symbol pojawiający się na wejściu automatu powoduje pojawienie się jednego symbolu na wyjściu automatu. Jest to więc „maszynka" do przetwarzania symboli czy sygnałów.

5. *Tablica przejść automatu*

Z podanej zasady działania automatu wynika, że aby dokładnie znać zachowanie się automatu we wszystkich możliwych sytuacjach, trzeba mieć tablicę, w której wypisane są wszystkie możliwe sytuacje automatu oraz sposób reagowania automatu w każdej z tych sytuacji. Tablicę tę nazywamy tablicą przejść. Ponadto musimy mieć drugą tablicę, tzw. tablicę wyjścia, w której podane są wszystkie stany automatu oraz odpowiadające im symbole alfabetu wyjściowego.

Dla przykładu rozpatrzmy automat, który posiada dwuliterowy alfabet wejściowy, składający się z liter a i b, oraz wyjściowy, składający się np. z symboli 0, 1,*. Wygodnie jest jeszcze wprowadzić tzw. symbol pusty — $\varnothing$. Założymy, że automat nasz posiada trzy stany, które oznaczymy przez q_0, q_1, q_2. Wszystkie stany w każdym automacie będziemy dzielili na bierne i czynne.

Przyjmiemy, że rozpatrywany automat posiada tylko jeden stan bierny i stan ten będziemy oznaczali przez q_0. Jeżeli automat znajdzie się w stanie biernym, to z tego stanu nie przejdzie już do żadnego innego stanu, niezależnie od tego, co będzie przychodziło na jego wejście. Zmiana stanu pod wpływem wejścia może nastąpić tylko wtedy, jeżeli automat jest w stanie czynnym *.

Teraz możemy przystąpić już do opisu automatu. Może on mieć np. taką tablicę przejść

* Czasem będziemy rozpatrywali automaty tylko ze stanami czynnymi.

Symbol wejściowy \ Stan	q_0	q_1	q_2
$\varnothing$	q_0	q_0	q_0
a	q_0	q_1	q_2
b	q_0	q_2	q_1

i tablicę wyjścia

Stan	Symbol wyjściowy
q_0	*
q_1	1
q_2	0

Automat ten działa w następujący sposób: litera a na wejściu (niezależnie od stanu automatu) nie zmienia jego stanu, litera b zmienia stan z q_1 na q_2 i odwrotnie, tj. z q_2 na q_1, ale nie zmienia stanu q_0. Symbol $\varnothing$ przeprowadza automat — niezależnie od stanu poprzedniego — do stanu q_0. Obie podane wyżej tablice wyczerpują więc całkowicie wszystkie możliwości, w jakich automat może się znaleźć. Zachowanie się jego jest zatem całkowicie określone.

Rozpatrzmy, co się będzie działo, jeżeli na wejściu tego automatu pojawi się ciąg symboli

a b a a b a b b a b

Założymy, że na początku automat znajdował się w stanie q_2. Na podstawie obu tablic możemy prześledzić zachowanie się automatu przez podanie kolejnych zmian jego stanu i produkowanych symboli wyjściowych, jak to pokazano niżej

1. q_2 (nad 1. literą)
   a b a a b a b b a b
   0

2. q_2 (nad 2. literą)
   a b a a b a b b a b
   0 0

3. q_1 (nad 3. literą)
   a b a a b a b b a b
   0 0 1

4. q_1 (nad 4. literą)
   a b a a b a b b a b
   0 0 1 1

5. q_1 (nad 5. literą)
   a b a a b a b b a b
   0 0 1 1 1

6. q_2 (nad 6. literą)
   a b a a b a b b a b
   0 0 1 1 1 0

7. q_2 (nad 7. literą)
   a b a a b a b b a b
   0 0 1 1 1 0 0

8. q_1 (nad 8. literą)
   a b a a b a b b a b
   0 0 1 1 1 0 0 1

9. q_2 (nad 9. literą)
   a b a a b a b b a b
   0 0 1 1 1 0 0 1 0

10. q_2 (nad 10. literą)
    a b a a b a b b a b
    0 0 1 1 1 0 0 1 0 0

11. q_1 (nad $\varnothing$)
    a b a a b a b b a b $\varnothing$
    0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1

12. q_0 (nad ostatnim $\varnothing$)
    a b a a b a b b a b $\varnothing$ $\varnothing$
    0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 *

Wszystkie kroki ponumerowaliśmy kolejno liczbami od 1 do 12. W każdym kroku nad każdą literą alfabetu wejściowego podano stan automatu, a pod spodem — wynikający z tablicy wyjść symbol wyjściowy odpowiadający danemu stanowi. I tak w pierwszym kroku automat „czytał" literę *a* i znajdował się w stanie początkowym q_2. Stanowi temu od-

powiada (zgodnie z tablicą wyjść) symbol 0, a więc na wyjściu automatu pojawiło się wtedy zero. Jednocześnie automat przeszedł do obserwowania następnego symbolu i do następnego stanu podanego w kroku drugim.

Po odczytaniu ostatniego symbolu automat przechodzi do stanu q_1, pisząc na wyjściu 1, a następnie odczytuje symbol pusty $\varnothing$ (to znaczy nic) i przechodzi do stanu biernego q_0, sygnalizując na wyjściu — przez podanie symbolu * — koniec działania.

W rezultacie opisany automat z ciągu liter

a b a a b a b b a b

produkuje ciąg

0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 *

Podobnie będzie nasz automat działał w przypadku innych ciągów symboli alfabetu wejściowego.

Ten może nieco nudny przykład miał na celu dokładne wyjaśnienie, jak działa automat skończony. Są tacy, co uważają, że człowiek jest w istocie pewnego rodzaju automatem skończonym, z tym że tablica przejść opisująca zachowanie człowieka we wszystkich możliwych sytuacjach jest potwornie wielka, zatem praktycznie niepoznawalna.

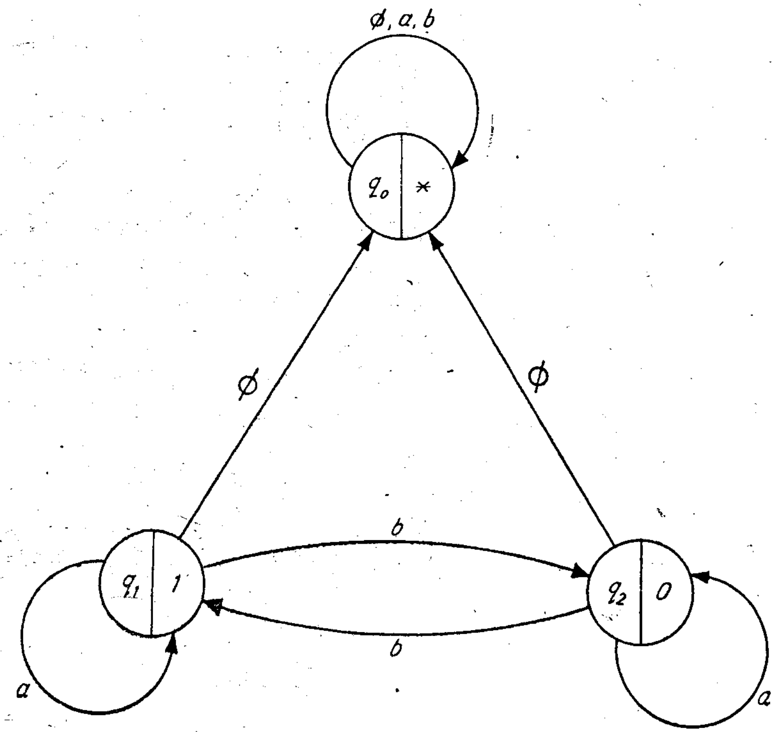
Być może istnieją tacy ludzie, którzy działają jak automaty skończone, na pewno jednak nie działają tak wszyscy. W tym kontekście jakoś kojarzy się pojęcie automatu skończonego z pojęciem skończonego idioty *.

---

* Idiota jest bardzo starym słowem pochodzenia hebrajskiego. Widocznie już dawno ludzie zastanawiali się nad automatyzacją myślenia.

6. *Wykres przejść automatu*

Często wygodniej jest podawać zachowanie się automatu nie w postaci tablicy, lecz specjalnego wykresu. Przedstawmy wszystkie stany automatu w postaci kółek na płaszczyźnie. Jeżeli automat przechodzi z jednego stanu do drugiego, to odpowiadające tym stanom kółka połączymy strzałką, pisząc przy strzałce symbol alfabetu wejściowego, przy którym to przejście następuje. Jednocześnie w każdym kółku będziemy pisać odpowiadający mu stan automatu i symbol wyjściowy powiązany z tym stanem — zgodnie z tablicą wyjść. Na przykład automat rozpatrywany w poprzednim paragrafie będzie miał wykres przejść pokazany na rysunku 20.



Rys. 20

Strzałka rozpoczynająca i kończąca się w tym samym kółku mówi, że automat pozostaje w niezmienionym stanie. Z wykresu przejść widać wyraźnie zachowanie się automatu w każdej sytuacji.

7. *Zamek jako automat skończony*

Wrócimy do zamków rozpatrywanych w pierwszym rozdziale, jednakże spojrzymy na nie obecnie z nieco innego punktu widzenia aniżeli poprzednio. Będziemy mianowicie rozpatrywali zamek jako automat skończony. Automat ten będzie posiadał dwa czynne stany wewnętrzne

q_0 — zamek otwarty
q_1 — zamek zamknięty

Alfabetem wejściowym zamka będą trzy „sygnały"

∅ — brak klucza w zamku
L — przekręcenie klucza w zamku w lewo
P — przekręcenie klucza w zamku w prawo

Przyjmiemy, że przekręcenie klucza w prawo powoduje zamknięcie zamka, a przekręcenie klucza w lewo powoduje otwarcie zamka. Przyjmiemy ponadto, że zamek posiada specjalne okienko, w którym pokazują się litery *Z* lub *O* oznaczające

Z — zamknięte
O — otwarte

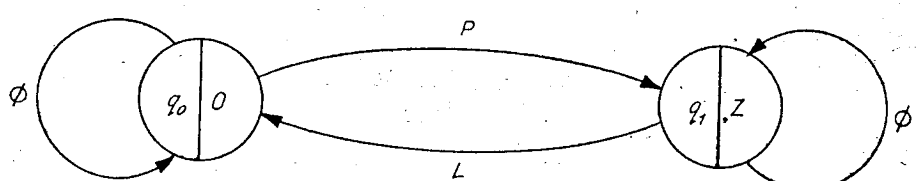
Tablica przejść tego automatu będzie miała postać

Symbol wejściowy \ Stan	q_0	q_1
$\emptyset$	q_0	q_1
L	—	q_0
P	q_1	—

a tablica wyjść będzie następująca

Stan	Symbol wyjściowy
q_0	O
q_1	Z

W tablicy przejść dwie kratki nie są wypełnione z tego powodu, że przy otwartym zamku przekręcenie klucza w lewo jest niemożliwe, natomiast przy zamku zamkniętym niemożliwe jest przekręcenie klucza w prawo. Brak klucza w zamku nie zmienia jego stanu wewnętrznego. Wykres przejść dla tego zamka pokazany jest na rysunku 21.



Rys. 21

8. *Obżartuch postępuje jak automat skończony*

Spróbujmy za pomocą automatu skończonego opisać zachowanie się człowieka głodnego i najedzonego, zależnie od tego, czy otrzymuje pożywienie, czy nie. Oba stany również oznaczymy przez q_0 i q_1

q_0 — głodny
q_1 — najedzony

oba stany są czynne.

Alfabetem wejściowym tego automatu będą litery I i B oznaczające

I — posiadanie jedzenia
B — brak pożywienia

Zakładamy tu, że posiadane jedzenie jest zjadane.

Jako alfabet wyjściowy przyjmiemy dwie litery Z i N oznaczające

Z — zadowolenie
N — niezadowolenie

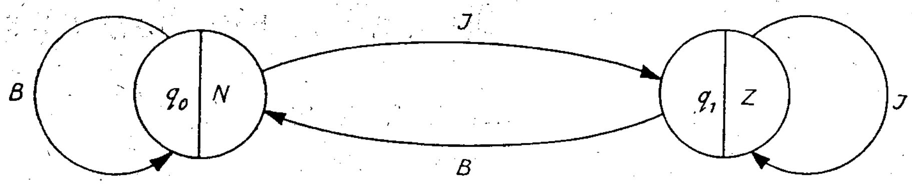
Możemy to opisać następującą tablicą przejść

Symbol wejściowy \ Stan	q_0	q_1
I	q_1	q_1
B	q_0	q_0

oraz tablicą wyjść

Stan	Symbol wyjściowy
q_0	*N*
q_1	*Z*

Wykres przejść tego automatu przedstawia rysunek 22.



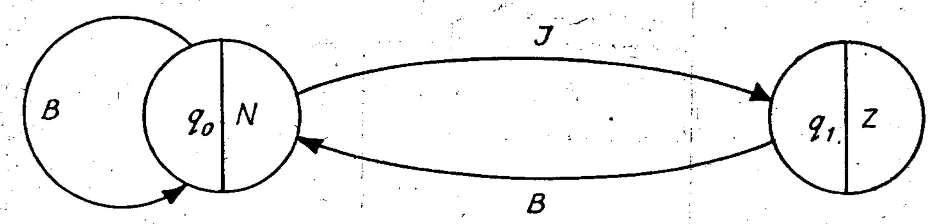
Rys. 22

Zachowanie tego typu nie wymaga właściwie komentarza. Zwróćmy tylko uwagę, że automaty, których wykresy przedstawiono na rysunkach 21 i 22, są właściwie identyczne. Automat opisany wykresem z rysunku 22 nazwaliśmy obżartuchem, gdyż brak pożywienia w stanie najedzenia powoduje natychmiast stan głodu (q_0). Z drugiej strony, automat ten w stanie najedzenia może nadal przyjmować pokarm.

Inny automat, określony np. niżej podaną tablicą przejść

Stan / Symbol wejściowy	q_0	q_1
I	q_1	—
B	q_0	q_0

byłby nieco kulturalniejszy, gdyż w stanie najedzonym nie przyjmowałby pokarmu (rys. 23). Może Czytelnik zechciałby



Rys. 23

podać w postaci automatu skończonego znane mu, bardziej skomplikowane postępowanie gastronomiczne.

9. *Smutek i radość*

Podobnym jak poprzednio schematem można opisać przechodzenie od stanu radości do smutku i odwrotnie. Przyjmijmy więc jako stany

q_0 — smutek
q_1 — radość

i jako alfabet wejściowy litery *S* i *W*, które oznaczają np.

S — smutną wiadomość
W — wesołą wiadomość

Jako alfabet wyjściowy przyjmijmy litery

U — uśmiech na twarzy
Z — zmartwiony wyraz twarzy

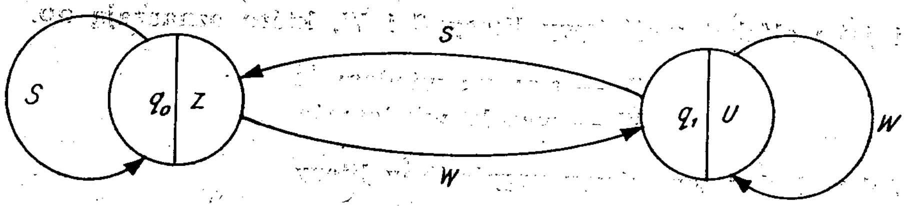
Przechodzenie od stanu radości do smutku możemy opisać tablicą

Stan / Symbol wejściowy	q_0	q_1
S	q_0	q_0
W	q_1	q_1

przy czym tablicę wyjść można przedstawić w postaci

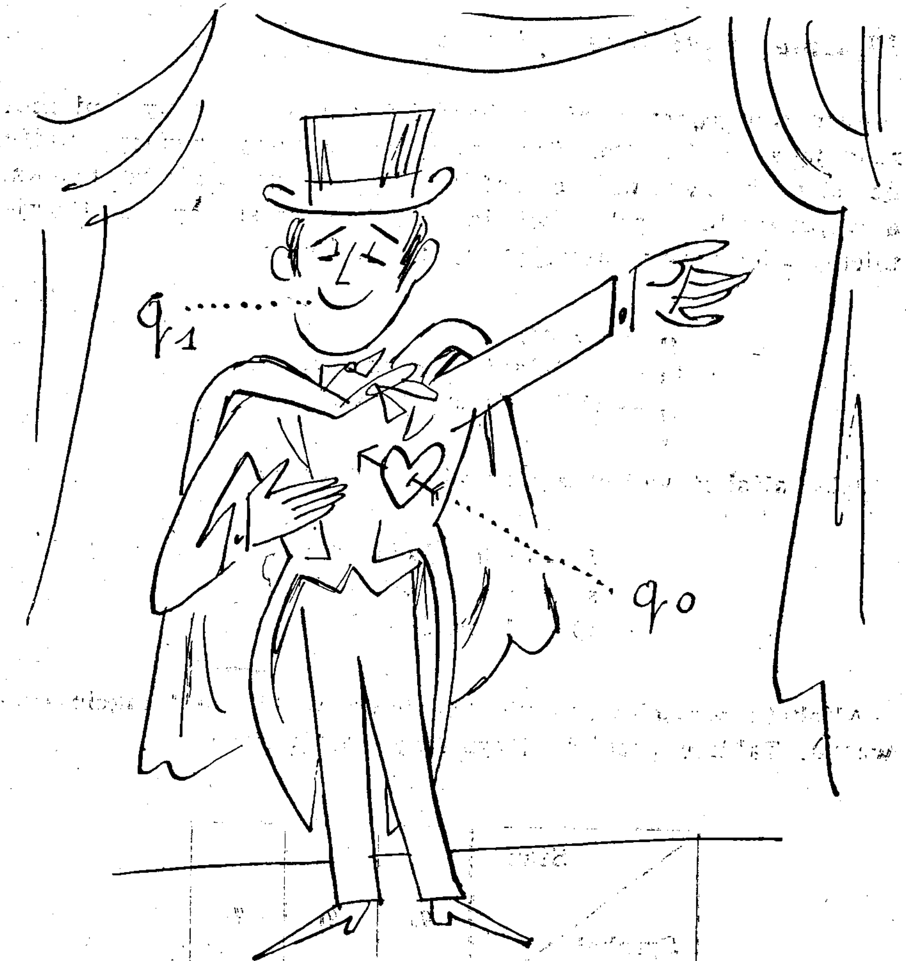
Stan	Symbol wyjściowy
q_0	Z
q_1	U

Nie zawsze zresztą postępujemy zgodnie z podaną wyżej tablicą wyjść, odpowiadającą wykresowi przedstawionemu na



Rys. 24

rysunku 24. Czasem należałoby raczej podać następującą tablicę



Stan	Symbol wyjściowy
q_0	U
q_1	Z

ilustrującą słowa ze znanej operetki *Uśmiech na ustach, a w sercu ból.*

10. *Ćma, czyli światło i cień*

Rozpatrzmy teraz nieco bardziej skomplikowany automat reagujący na światło. Wyobraźmy sobie nocne zwierzę, które do słabego światła się zbliża, od silnego światła ucieka, a w przypadku braku światła pozostaje w spoczynku. Przyjmiemy więc trzy następujące stany automatu

q_0 — spoczynek
q_1 — oddalanie się od światła
q_2 — zbliżanie się do światła

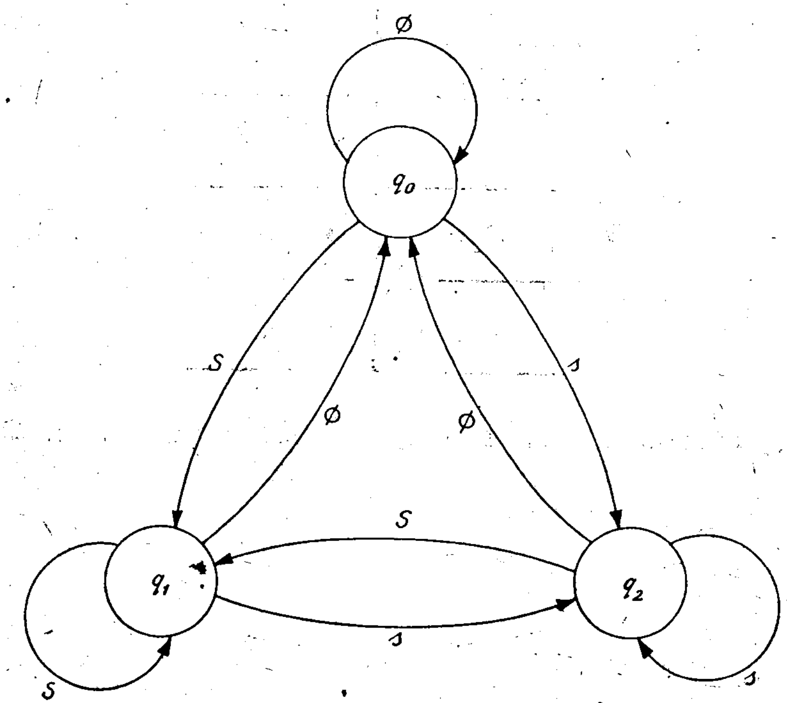
Jako alfabet wejściowy przyjmiemy litery

S — silne światło
s — słabe światło
$\varnothing$ — brak światła

Alfabetu wyjściowego nie będziemy w tym automacie rozważali. Tablicę przejść otrzymamy następującą

Symbol wejściowy \ Stan	q_0	q_1	q_2
$\varnothing$	q_0	q_0	q_0
S	q_1	q_1	q_1
s	q_2	q_2	q_2

Wykres przejść pokazany jest na rysunku 25.



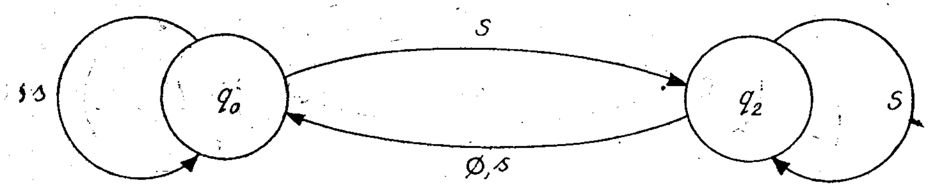
Rys. 25

Z tablicy bądź z wykresu widzimy, że jeżeli zwierzę poruszało się w kierunku światła słabego i nagle światło zwiększyło znacznie swą intensywność, to zwierzę zaczyna od źródła światła uciekać. I odwrotnie, jeżeli zwierzę oddalało się od intensywnego źródła światła i natężenie tego źródła nagle zmalało, to zwierzę zaczyna się do niego zbliżać.

Ćma natomiast postępowałaby inaczej. Jej zachowanie możemy opisać tablicą

Symbol wejściowy \ Stan	q_0	q_2
$\emptyset$	q_0	q_0
S	q_2	q_2
s	q_0	q_0

której odpowiada wykres przejść pokazany na rysunku 26.



Rys. 26

Nasza ćma na brak światła i słabe światło reaguje jednakowo — pozostaje w spoczynku. Natomiast silne światło powoduje jej ożywienie, gna ją ku przeznaczeniu.

11. *Prawo dżungli*

Rozpatrzmy, jak zachowuje się zwierzę, które poluje na inne słabsze od siebie zwierzęta, ale samo może paść łupem silniejszego od siebie przeciwnika. Przyjmiemy, że zwierzę to może znajdować się w jednym z trzech stanów

q_0 — spoczynek
q_1 — ucieczka przed wrogiem
q_2 — pogoń za zdobyczą

Oczywiście potrafi ono również ocenić siłę przeciwnika w stosunku do siebie, tak że system nerwowy zwierzęcia może odbierać jeden z trzech sygnałów

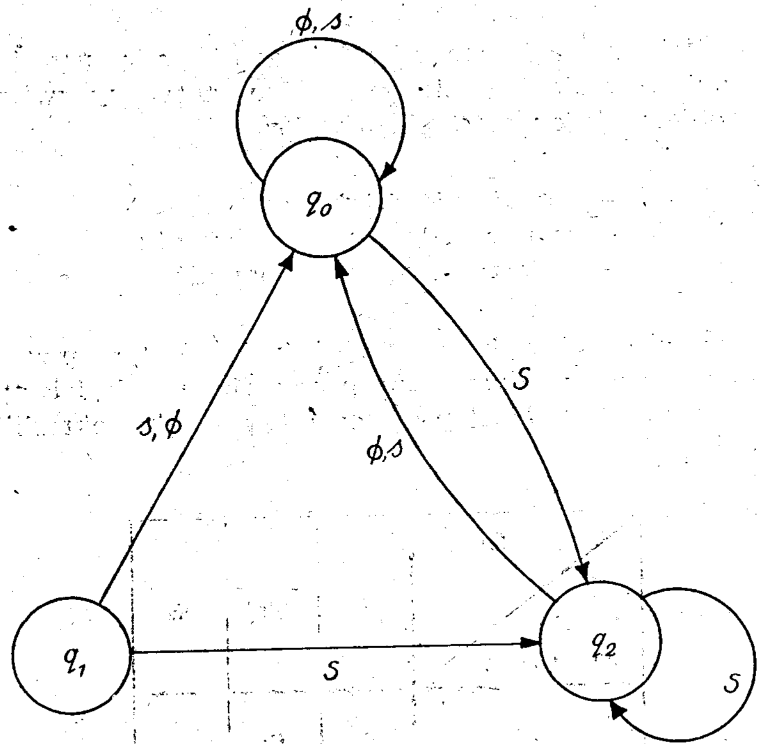
$\emptyset$ — nic się nie dzieje
S — zwierzę silniejsze w otoczeniu
s — zwierzę słabsze w otoczeniu

Tablica przejść i wykres przejść będą w tym przypadku analogiczne jak w poprzednim paragrafie, nie będziemy ich więc podawali. Natomiast postępowanie rycerskie określilibyśmy tablicą

Symbol wejściowy \ Stan	q_0	q_1	q_2
$\emptyset$	q_0	q_0	q_0
S	q_2	q_2	q_2
s	q_0	q_0	q_0

gdzie q_2 oznacza walkę z przeciwnikiem, a pozostałe oznaczenia są identyczne jak poprzednio.

Wykres tego automatu pokazany jest na rysunku 27. Rycerz ze słabszym przeciwnikiem nie walczy. Przyjmuje walkę tylko z silniejszym od siebie. Gdy przeciwnik został pokonany (jest słabszy od rycerza), rycerz przechodzi do stanu q_0.



Rys. 27

Niezbyt jasne jest, kiedy rycerz może uciekać z pola walki. Z naszego opisu to nie wynika. Możemy tylko odczytać, że jeżeli uciekał, a niebezpieczeństwo przestało mu zagrażać — przechodzi do stanu q_0. Jeżeli jednak w trakcie ucieczki natrafił na silniejszego przeciwnika, natychmiast przerywał ucieczkę, aby stanąć z nim do walki. Te i wiele innych szczegółów możemy odczytać z tablicy przejść automatu.

Gdyby natomiast opisywany przez nas osobnik zachowywał się według tablicy

Stan / Symbol wejściowy	q_0	q_1	q_2
Ø	q_0	—	—
S	q_0	—	—
s	q_0	—	—

powiedzielibyśmy, że jest odważny, Postępowanie jak niżej

Stan / Symbol wejściowy	q_0	q_1	q_2
Ø	q_0	—	—
S	q_1	—	—
s	q_0	—	—

nazwalibyśmy spokojnym (unikanie walki zarówno ze słabym, jak i silniejszym). Jeżeli natomiast na miejsce q_0 w powyższej tablicy wpiszemy q_1, to jest już bezwzględne tchórzostwo.

Przy powyższych założeniach można sklasyfikować wszystkie możliwe rodzaje zachowania się w zależności od stanu wewnętrznego i rodzaju wejść. Ponieważ w tablicy tej na każdym miejscu można wpisać jeden z trzech możliwych stanów: q_0, q_1, q_2, więc liczba typów psychicznych wynosi 3^9 = = 19 653. Jest to liczba olbrzymia.

Myślę, że ta uwaga może przydać się literatom penetrującym wnętrza duszy ludzkiej. Nawet przy tak prostych założeniach, komplikacji jest co niemiara. Zresztą wydaje się, że zamiast powieści analizujących zachowanie się bohatera w różnych sytuacjach, byłoby może wygodniej podać jego tablicę i wykres przejść. Rzecz byłaby nie mniej ciekawa niż powieść, a ułatwiłaby znacznie zrozumienie wszystkich wewnętrznych powikłań bohatera.

Przyjmując większy repertuar stanów wewnętrznych i doznań zewnętrznych, liczbę możliwych zachowań można by tak zwiększyć, że starczyłoby zajęcia dla wielu pokoleń literatów, nawet gdyby nie pisali, a tylko rysowali wykresy owych bohaterów. Dodam jeszcze, że tablice takie można by ze sobą kombinować. Wtedy ten sam automat (przepraszam bohater) raz może postępować według jednej, innym zaś razem według innej tablicy, tzn. raz może być bohaterem, a raz tchórzem.

12. Z pustego i Salomon nie naleje

Ciekawym przykładem automatu skończonego jest magazyn. Dla prostoty będziemy rozpatrywali magazyn, w którym można przechowywać tylko cztery przedmioty. Rodzaj przechowywanych przedmiotów jest dla nas nieważny. Stanem magazynu będziemy nazywali liczbę znajdujących się w nim aktualnie przedmiotów. A więc stan magazynu jest liczbą 0, 1, 2, 3 lub 4.

Alfabet wejściowy będzie składał się z trzech symboli

$\varnothing$ — nic się nie dzieje
P — pobranie jednego przedmiotu z magazynu
W — włożenie jednego przedmiotu do magazynu *

* Zakładamy, że jednoczesne wkładanie lub pobieranie przedmiotów z magazynu jest niedozwolone.

Alfabetem wejściowym magazynu są właściwie nie symbole, ale czynności wkładania i pobierania z magazynu. A więc włożenie przedmiotu do magazynu lub jego pobranie, bądź też nienaruszanie zawartości magazynu jest symbolem wejściowym.

Jako alfabet wyjściowy magazynu przyjmiemy litery

p — magazyn pusty
z — magazyn całkowicie zapełniony
n — magazyn normalny *

Dla rozważanego magazynu możemy podać następujące tablice — przejść i wyjść

Symbol wejściowy \ Stan	0	1	2	3	4
$\varnothing$	0	1	2	3	4
P	—	0	1	2	3
W	1	2	3	4	—

Stan	0	1	2	3	4
Symbol wyjścia	*p*	*n*	*n*	*n*	*z*

* Znaczy to, że można do niego bądź włożyć, bądź pobrać z niego jeden przedmiot.

Wykres przejść dla tego magazynu ma postać pokazaną na rysunku 28.

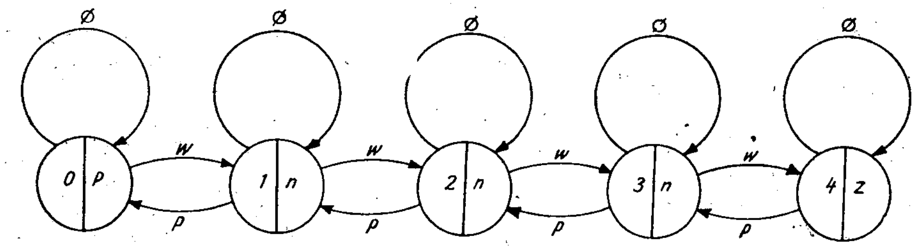
Włożenie przedmiotu do magazynu zwiększa jego stan o 1. Pobranie przedmiotu z magazynu zmniejsza jego stan o 1. Z pustego magazynu nie można nic pobrać, do pełnego magazynu nie można nic włożyć. O tym, czy można do magazynu wkładać, czy pobierać, informuje tablica wyjść.

Zasadę tę znamy dobrze z życia codziennego. Są jednak dziedziny, w których ona nie obowiązuje. Są to maszyny cyfrowe. Maszyny te są wyposażone w specjalne magazyny przechowujące impulsy elektryczne. W tych właśnie magazynach obowiązują dziwne prawa: można pobrać z magazynu pustego i włożyć do magazynu pełnego. I co najdziwniejsze, po pobraniu z magazynu pustego staje się on pełny i odwrotnie — po włożeniu do magazynu pełnego staje się on pusty *. Tablica przejść takiego magazynu ma postać

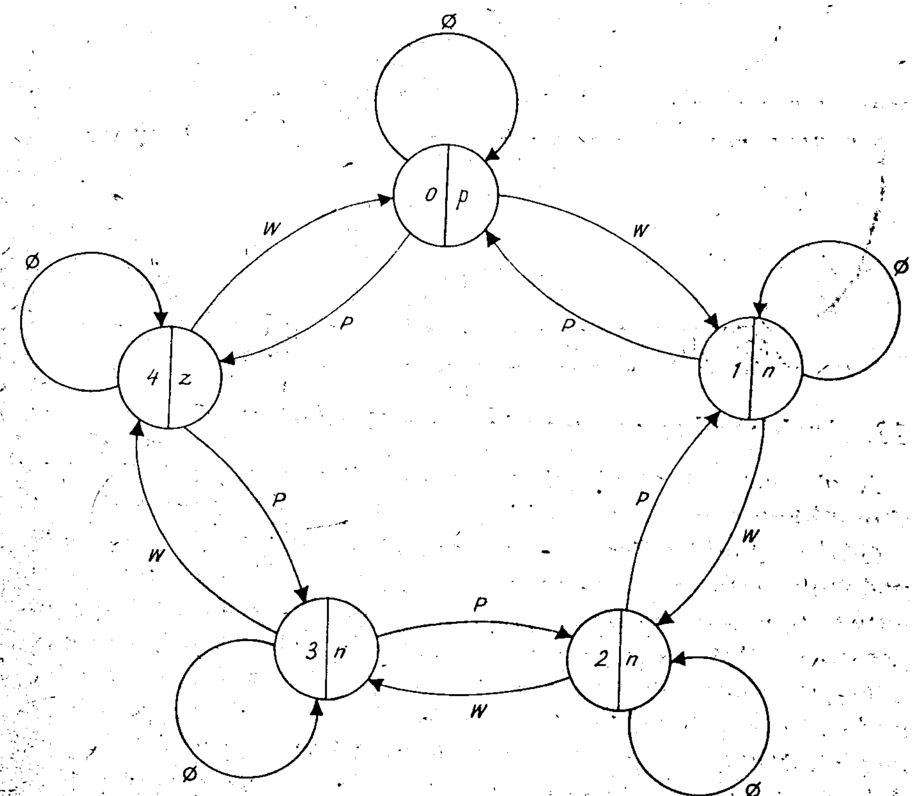
Stan / Symbol wejściowy	0	1	2	3	4
$\emptyset$	0	1	2	3	4
P	4	0	1	2	3
W	1	2	3	4	0

a jego wykres przedstawiono na rysunku 29. Magazyn taki nazywa się licznikiem rewersyjnym — dlaczego? — zgadnąć nietrudno.

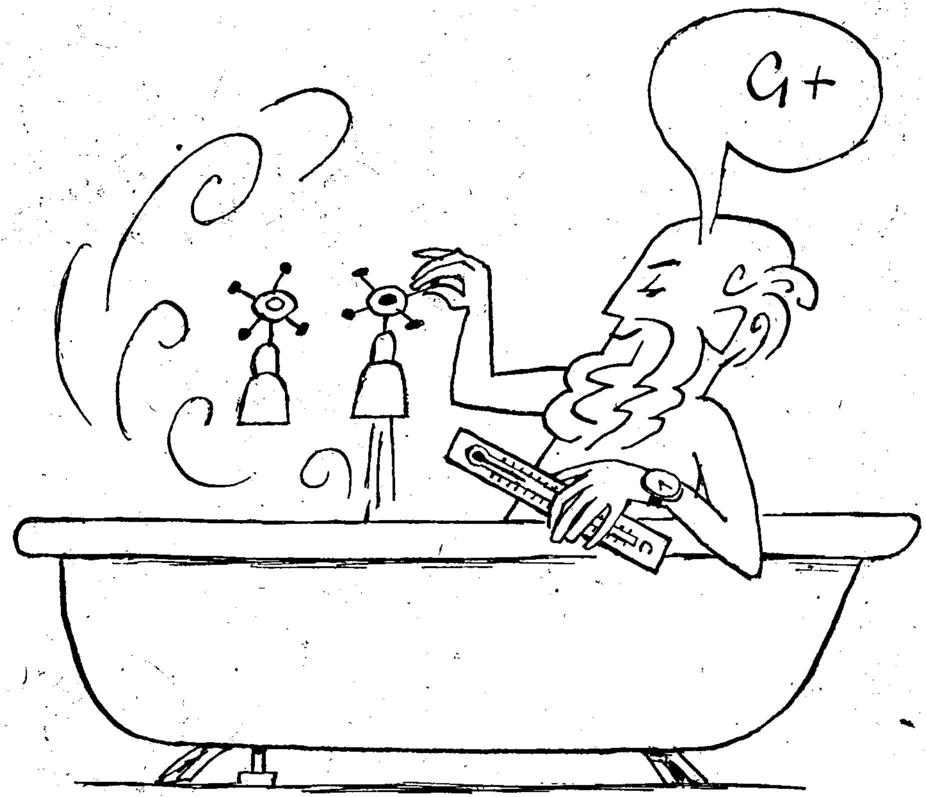
* Szkoda, że prawa te, szczególnie pierwsze, nie obowiązują w życiu codziennym.



Rys. 28



Rys. 29



13. *Archimedes w wannie (współczesnej)*

A oto ostatni przykład automatu skończonego, najbardziej skomplikowany ze wszystkich podanych do tej pory.

Gdyby Archimedes żył w czasach dzisiejszych, prawdopodobnie oprócz znanego prawa stworzyłby również teorię automatów skończonych. Rozpatrzmy proces regulowania temperatury i ilości wody wypływającej z kranu do wanny. Zakładamy, że mamy do dyspozycji kran z dwoma kurkami: jeden służy do regulowania dopływu wody zimnej, drugi zaś do ciepłej. Manipulując odpowiednio kurkami możemy doprowadzić do tego, że z kranu popłynie woda o określonej temperaturze i w odpowiedniej ilości.

Kran taki możemy traktować jako automat skończony. Stanem tego automatu będziemy nazywali dwie wielkości fizyczne: ilość wody wypływającej z kranu w jednostce czasu i jej temperaturę. Nie będziemy się przy tym interesowali szczegółowymi danymi liczbowymi, a tylko jakościowymi zmianami, tzn. będzie nas interesowało, czy temperatura wody jest właściwa, za niska czy za wysoka, i podobnie, jeżeli chodzi o ilość wypływającej wody z kranu.
Przyjmiemy następujące oznaczenia temperatur

T_0 — właściwa temperatura wypływającej wody
T_+ — temperatura wypływającej wody za wysoka
T_- — temperatura wypływającej wody za niska

Podobnie będziemy oznaczali ilość wypływającej wody z kranu

W_0 — ilość wypływającej wody jest właściwa
W_+ — wypływa za dużo wody
W_- — wypływa za mało wody

Rozpatrywany kran może się więc znajdować w jednym z dziewięciu możliwych stanów

0. T_0, W_0	3. T_+, W_0	6. T_-, W_0
1. T_0, W_+	4. T_+, W_+	7. T_-, W_+
2. T_0, W_-	5. T_+, W_-	8. T_-, W_-

Liczby z lewej strony oznaczają numer stanu. Na przykład w stanie nr 5 mamy T_+, W_-, tzn. temperaturę za wysoką, a wypływ wody za mały. Nie interesuje nas przy tym, o ile jest temperatura wody wypływającej z kranu za wysoka i o ile za mały jest jej przepływ. Wystarczą do naszych celów tylko wskazówki jakościowe.

Wejście automatu stanowią dwa kurki: kurek wody gorącej i kurek wody zimnej. Oznaczymy je odpowiednio przez G i Z. Dla kurka G wprowadzimy dalsze oznaczenia

G_0 — nie zmieniać dopływu wody gorącej
G_+ — zwiększyć dopływ wody gorącej
G_- — zmniejszyć dopływ wody gorącej

i podobnie dla kurka wody zimnej Z

Z_0 — nie zmieniać dopływu wody zimnej
Z_+ — zwiększyć dopływ wody zimnej
Z_- — zmniejszyć dopływ wody zimnej

Symbolem alfabetu wejściowego rozpatrywanego automatu będzie para liter określająca położenie obu kurków. Alfabet wejściowy będzie więc składał się z dziewięciu następujących par

0. G_0, Z_0	3. G_+, Z_0	6. G_-, Z_0
1. G_0, Z_+	4. G_+, Z_+	7. G_-, Z_+
2. G_0, Z_-	5. G_+, Z_-	8. G_-, Z_-

A więc dając różne symbole przyjętego alfabetu na wejście automatu, tj. kręcąc kurkami, powodujemy zmianę stanu automatu, czyli zmianę ilości i temperatury wypływającej wody. Na przykład jeżeli automat znajdował się w stanie 5, tj. T_+, W_- (co znaczy, że woda była za gorąca i wypływało jej za mało), to przyłożenie na wejściu automatu sygnału 1, tj. G_0, Z_+ (tzn. niezmienianie ilości wody gorącej i zwiększenie ilości wody zimnej), może automat przeprowadzić do stanu 2, tj. T_0, W_-. Stan ten oznacza właściwą temperaturę wody, a za małą jej ilość.

Załóżmy jeszcze, że za każdym razem kurki można obrócić tylko o jakiś ustalony, dla obu kurków zawsze jednakowy kąt, tak że jak jeden kurek przekręcimy jednorazowo w prawo, a drugi w lewo, to ilość wypływającej wody pozostanie bez zmiany. Teraz dopiero możemy napisać dla naszego automatu tablicę przejść

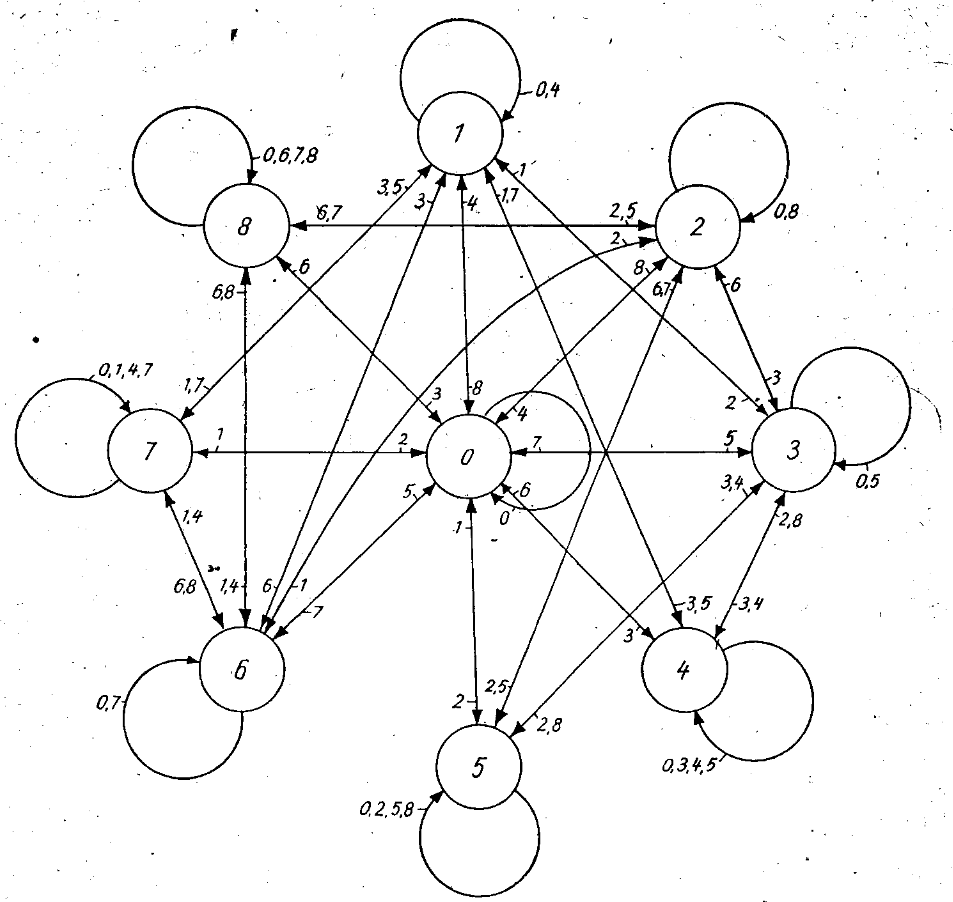
Symbole wejściowe \ Stan	0 T_0, W_0	1 T_0, W_+	2 T_0, W_-	3 T_+, W_0	4 T_+, W_+	5 T_+, W_-	6 T_-, W_0	7 T_-, W_+	8 T_-, W_-
0 (G_0, Z_0)	0 T_0, W_0	1 T_0, W_+	2 T_0, W_-	3 T_+, W_0	4 T_+, W_+	5 T_+, W_-	6 T_-, W_0	7 T_-, W_+	8 T_-, W_-
1 (G_0, Z_+)	7 T_-, W_+	7 T_-, W_+	6 T_-, W_0	1 T_0, W_+	1 T_0, W_+	0 T_0, W_0	7 T_-, W_+	7 T_-, W_+	6 T_-, W_0
2 (G_0, Z_-)	5 T_+, W_-	3 T_+, W_0	5 T_+, W_-	5 T_+, W_-	3 T_+, W_0	5 T_+, W_-	2 T_0, W_-	0 T_0, W_0	2 T_0, W_-
3 (G_+, Z_0)	4 T_+, W_+	4 T_+, W_+	3 T_+, W_0	4 T_+, W_+	4 T_+, W_+	3 T_+, W_0	1 T_0, W_+	1 T_0, W_+	0 T_0, W_0
4 (G_+, Z_+)	1 T_0, W_+	1 T_0, W_+	0 T_0, W_0	4 T_+, W_+	4 T_+, W_+	3 T_+, W_0	7 T_-, W_+	7 T_-, W_+	6 T_-, W_0
5 (G_+, Z_-)	3 T_+, W_0	4 T_+, W_+	5 T_+, W_-	3 T_+, W_0	4 T_+, W_+	5 T_+, W_-	0 T_0, W_0	1 T_0, W_+	2 T_0, W_-
6 (G_-, Z_0)	8 T_-, W_-	6 T_-, W_0	8 T_-, W_-	2 T_0, W_-	0 T_0, W_0	2 T_0, W_-	8 T_-, W_-	6 T_-, W_0	8 T_-, W_-
7 (G_-, Z_+)	6 T_-, W_0	7 T_-, W_+	8 T_-, W_-	0 T_0, W_0	1 T_0, W_+	2 T_0, W_-	6 T_-, W_0	7 T_-, W_+	8 T_-, W_-
8 (G_-, Z_-)	2 T_0, W_-	0 T_0, W_0	2 T_0, W_-	5 T_+, W_-	3 T_+, W_0	5 T_+, W_-	8 T_-, W_-	6 T_-, W_0	8 T_-, W_-

W tablicy tej zakładamy, że jeżeli np. wody wypływało za dużo, to zmniejszenie wypływu jednego bądź nawet obu kranów może zmniejszyć ilość wypływającej wody tylko do właściwej ilości, a nie np. do ilości zbyt małej. W czasie regulacji nie może być więc przejść o dwa stopnie wielkości (tzn. od + do — czy odwrotnie). Podobne założenie przyjęliśmy dla temperatury. Oczywiście można przyjąć inne założenia i wtedy otrzymalibyśmy inną tablicę przejść.

W tablicy podkreślono stan T_0, W_0, tzn. stan, w którym temperatura i ilość wypływającej wody jest właściwa. Stan ten nazwiemy stanem normalnym. Aby z dowolnego stanu sprowadzić automat do stanu normalnego, musimy zgodnie z tablicą przejść dać na wejście odpowiedni sygnał, czyli pokręcić odpowiednio kurkami. Jeżeli kran jest np. w stanie T_+, W_0 (tzn. ilość wody właściwa, temperatura za wysoka), to zgodnie z tablicą przejść należy zastosować sygnał G_-, Z_+ (tzn. zmniejszyć ilość wody gorącej i zwiększyć ilość wody zimnej). Wiemy już z poprzednich rozważań, że nie zmieni to ilości wody wypływającej, natomiast obniży jej temperaturę do właściwej.

Wykres przejść tego automatu przedstawiono na rysunku 30. Dla uproszczenia podano na nim tylko numery sygnałów wejściowych i numery stanów. Z rysunku widać, że nawet z tak prostej rzeczy jak działanie zwykłego kranu do wody można uczynić rzecz zupełnie niezrozumiałą, stosując metody naukowe. Gdybyśmy jednak chcieli zrobić urządzenie, które automatycznie reguluje temperaturę i przepływ wody, analiza taka, mimo że skomplikowana, byłaby potrzebna.

W przypadku jeszcze bardziej skomplikowanych obiektów taka analiza jest nieodzowna, musimy bowiem wiedzieć dokładnie, jak zachowuje się sterowany obiekt we wszystkich możliwych sytuacjach. Bardzo wiele interesujących szczegółów dotyczących działania kranu można wyczytać z jego wykresu. Nie będziemy jednak wyczerpywać cierpliwości Czytelnika studiowaniem tej sprawy. Pozostawimy to entuzjastom automatów skończonych.



Rys. 30

W podobny sposób można opisać start czy lądowanie samolotu lub rakiety, sterowanie obrabiarką, przebieg procesu chemicznego w fabryce czy wytopu stali w hucie. Jako automat skończony możemy interpretować fabrykę, a nawet zespół współpracujących fabryk. Możemy zadanie skomplikować jeszcze bardziej i rozpatrywać nie pojedyncze automaty, a ich zespoły współdziałające bądź też przeciwdziałające sobie według określonych reguł, modelując w ten sposób problemy z teorii gier.

Mając dokładnie opisane zachowanie się jakiegoś obiektu we wszystkich możliwych sytuacjach, możemy z jednej strony badać własności tak opisanego obiektu, z drugiej zaś — możemy pytać, jak zbudować urządzenie techniczne, które zachowuje się jak zadany automat skończony. Urządzenie takie będzie mogło odbierać różne sygnały i zależnie od swego stanu wewnętrznego reagować na nie w różny sposób, produkując na swoim wyjściu odpowiednie sygnały sterujące. Dlatego umiejętność konstruowania skomplikowanych automatów skończonych jest bardzo ważna w automatyce.

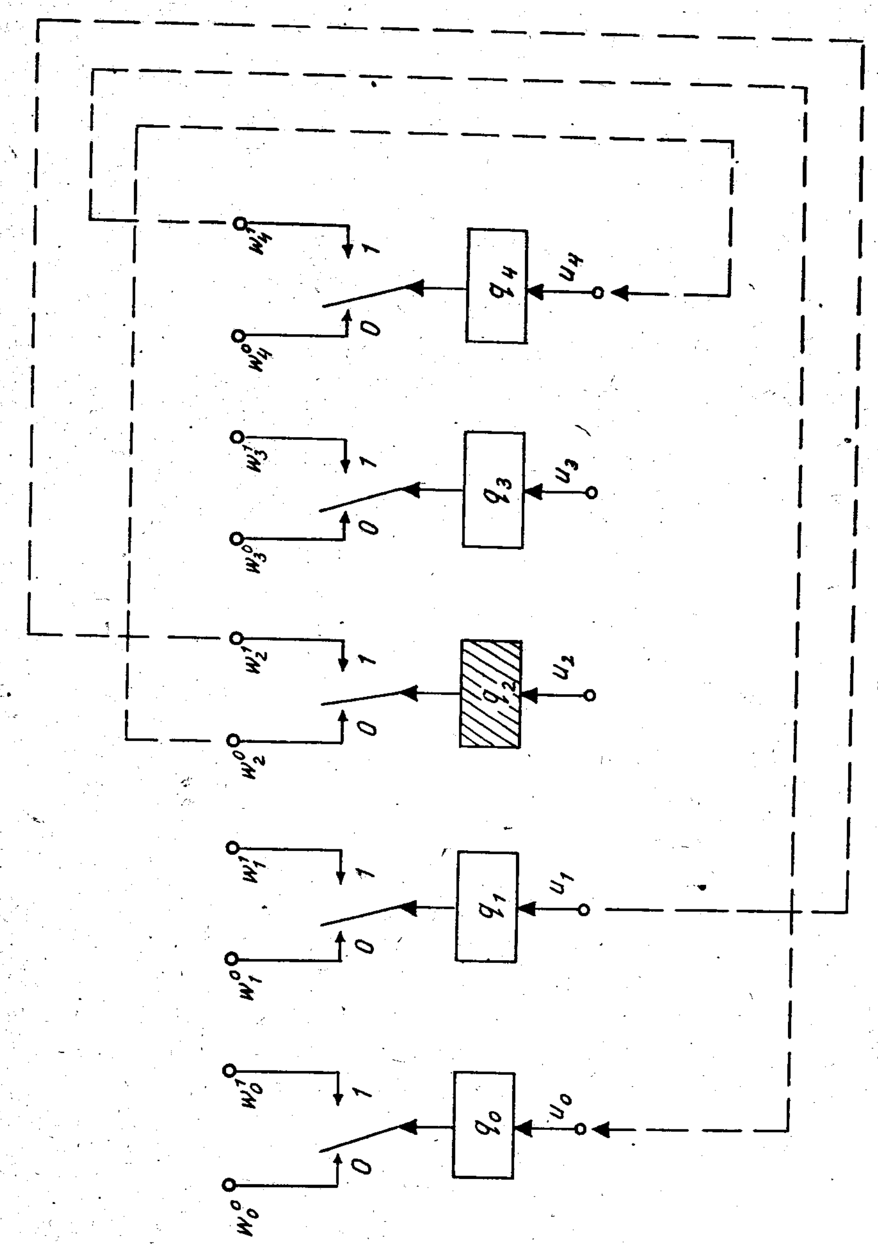
14. Jak zbudować automat skończony

Dla prostoty będziemy rozpatrywali tylko automaty posiadające dwuliterowy alfabet wejściowy. Liczby stanów ani alfabetu wyjściowego nie będziemy ograniczali.

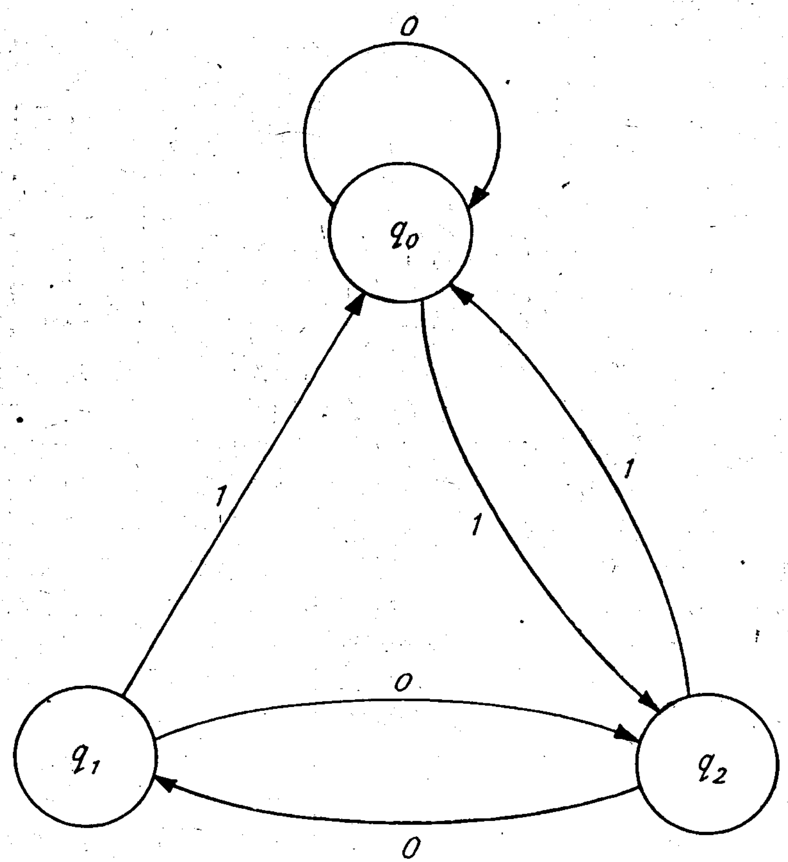
Schemat uniwersalnego automatu skończonego o pięciu stanach wewnętrznych przedstawiono na rysunku 31. Automat ten składa się z pięciu (tyle ile stanów) elementów „pamiętających", oznaczonych symbolami q_0, q_1, q_2, q_3, q_4. Każdy z tych elementów jest urządzeniem o dwu stanach. Elementem „pamiętającym" może być np. przekaźnik, który — jeżeli przepływa przez niego prąd elektryczny — jest w stanie działania, a jeżeli prąd przez niego nie przepływa — jest w stanie spoczynku. Elementem takim może być także odpowiednie urządzenie elektroniczne.

Jeżeli automat jest np. w stanie 2, to tylko drugi element „pamiętający" automatu, tj. q_2, jest w stanie pracy, a wszystkie pozostałe elementy są w stanie spoczynku. Element w stanie pracy przedstawiono na rysunku w postaci zakreskowanego prostokąta, a pozostałe elementy, znajdujące się w stanie spoczynku, są na nim przedstawione jako prostokąty niezakreskowane

Każdy element „pamiętający" posiada przełącznik dwupozycyjowy. Położenie wszystkich przełączników zależy od odczytywanej aktualnie przez automat litery alfabetu wejścio-



Rys. 31



Rys. 32

wego. Przyjmiemy, że alfabet wejściowy składa się z symboli 0 i 1. Jeżeli automat odczytuje symbol 0, to wszystkie przełączniki są ustawione w położeniu lewym (jak na rysunku), natomiast jeżeli automat odczytuje symbol 1, to wszystkie przełączniki są przechylone na prawo.

Każdy element „pamiętający" posiada jedno wejście oznaczone literą u i dwa wyjścia oznaczone literami w^0 i w^1. Jeżeli automat jest np. w stanie 2 i na wejściu jest symbol 0, to przez wyjście $w^0{}_2$ płynie prąd elektryczny, a na żadnym innym wyjściu automatu prądu nie ma. Ponieważ wyjście

w_2^0 elementu „pamiętającego" jest połączone z wejściem u_4 elementu q_4, więc spowoduje to zadziałanie elementu pamiętającego q_4. Jednocześnie element q_2 przejdzie w stan spoczynku, gdyż — jak powiedzieliśmy — elementy „pamiętające" są połączone w ten sposób, że tylko jeden z nich może być w stanie pracy w danym momencie czasu.

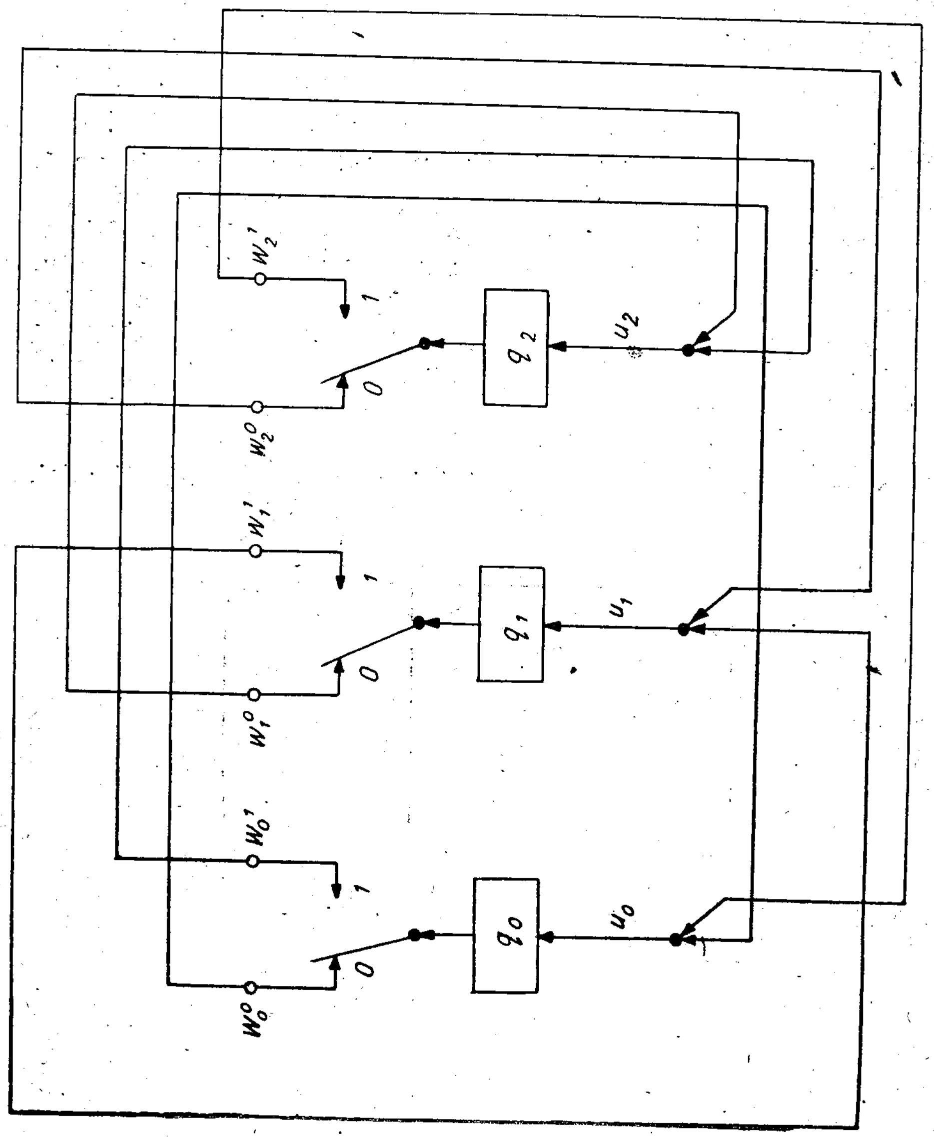
Gdyby symbol wejściowy zmienił się w tym czasie na 1, to po elemencie q_4 zadziałałby element q_0, gdyż wyjście $w^1{}_4$ jest połączone z wejściem u_0. Połączenia między wejściami i wyjściami decydują więc o kolejności stanów automatu, przy czym kolejność ta zależy również od symbolu wejściowego. Gdybyśmy między wszystkimi wyjściami i wejściami elementów „pamiętających" wykonali połączenia zgodnie z tablicą przejść automatu, to otrzymalibyśmy automat działający dokładnie według niej.

Bardzo prosty przykład wyjaśni ewentualne wątpliwości. Weźmy pod uwagę następującą tablicę przejść

Symbol wejściowy \ Stan	q_0	q_1	q_2
0	q_0	q_2	q_1
1	q_2	q_0	q_0

Wykres przejść tego automatu pokazano na rysunku 32, a schemat na rysunku 33. Połączenia między wyjściami i wejściami elementów „pamiętających" wykonano zgodnie z poprzednio podaną zasadą, tzn. dokładnie według tablicy przejść.

Ze schematu podanego na rysunku 33 widać, iż ze stanu q_1 przy wejściu 0 automat przechodzi do stanu q_2, a ze stanu



Rys. 33

q_2 przy wejściu 1 — do stanu q_0. Wyjście $w\,_1^0$ elementu q_1 połączone jest więc z wejściem u_2 elementu q_2, a wyjście $w^1{}_2$ elementu q_2 połączono z wejściem u_0 elementu q_0. Podobnie wykonano połączenia dla pozostałych stanów. Urządzenie to będzie więc przechodziło od stanu do stanu zależnie od wejścia, zgodnie z tablicą przejść, według której wykonano połączenia.

W ten sposób można wykonać dowolny automat skończony. Oczywiście, w wielu przypadkach można go zrealizować znacznie prościej, niż to wynikało z podanej zasady, jednakże metoda, którą przedstawiliśmy, ma tę zaletę, że jest całkowicie uniwersalna. Nie podaliśmy wyżej, jak realizować tablicę wyjść rozważanego automatu. Jest to sprawa bardzo prosta, więc nie będziemy jej tu omawiali. Ktoś, kto orientuje się w sprawach łączności, z łatwością zrobi to samodzielnie.

15. *Teoria automatów skończonych*

Zaczęliśmy ten rozdział od teorii i kończymy go również kilkoma uwagami na temat teorii. Pojęcie automatu skończonego okazało się bardzo wygodne do opisu wielu zjawisk. Jest ono między innymi bardzo użyteczne w opisywaniu działania współczesnych maszyn matematycznych. Nic więc dziwnego, że problematyka automatów skończonych zaczęła interesować liczne grono ludzi różnych specjalności, głównie matematyków i konstruktorów maszyn matematycznych, i w chwili obecnej rozrosła się do samoistnej dyscypliny naukowej.

Czym się ta teoria zajmuje? Jednym z najważniejszych problemów jest problem minimalizacji. Polega on na tym, że mając zadany jakiś automat, chcemy znaleźć inny automat o identycznym działaniu, ale o mniejszej liczbie stanów. Liczba stanów automatu charakteryzuje bowiem stopień jego skomplikowania.

Innym ciekawym zagadnieniem jest problem identyfikacji automatu. Problem ten polega na obserwacji tego, co automat o nieznanej tablicy przejść produkuje na wyjściu, gdy na jego wejście przykładamy różne możliwe ciągi sygnałów wejściowych. Na podstawie tych obserwacji możemy określić automat, tj. podać jego tablice przejść. Nietrudno się domyślić, że nie mając żadnych informacji o automacie nie potrafimy go zidentyfikować. Teoria automatów skończonych podaje warunki na to, co musimy wiedzieć o automacie, aby dał się on zidentyfikować, oraz podaje sposoby organizowania eksperymentów identyfikujących. Jak się wydaje, rezultaty teorii automatów skończonych mogą mieć znaczenie ogólniejsze, wybiegające poza zakres automatów i maszyn.

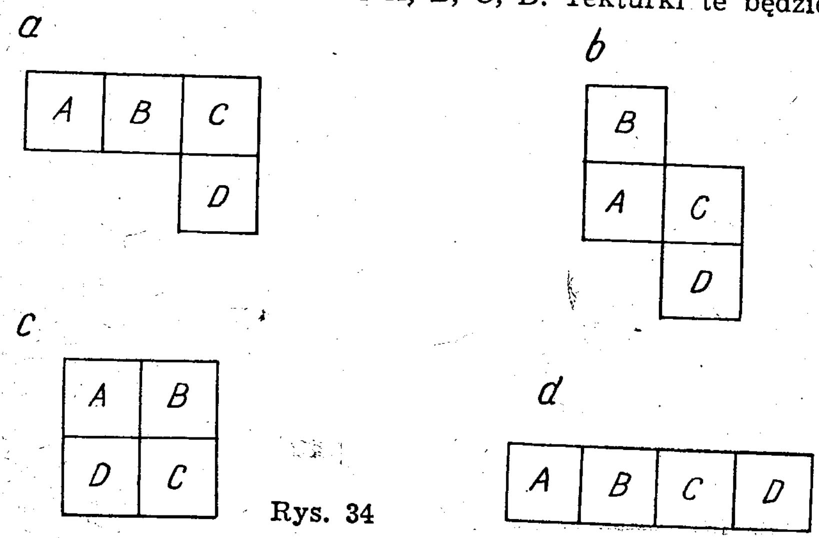
Rozdział IV

STRIP-TEASE THEOREM

1. *O ubieraniu się*

Strip-tease ma swych licznych zwolenników, jednakże udział w tym widowisku trudno by nazwać zajęciem poważnym. Zajmowanie się strip-teasem nie zawsze jednak ma charakter rozrywki. Sztuka rozbierania się może dostarczyć niebłahych problemów zarówno dla logiki, jak i dla maszyn matematycznych, a może i innych dziedzin nauki. Dlaczego? Spróbujemy to wyjaśnić w tym rozdziale:

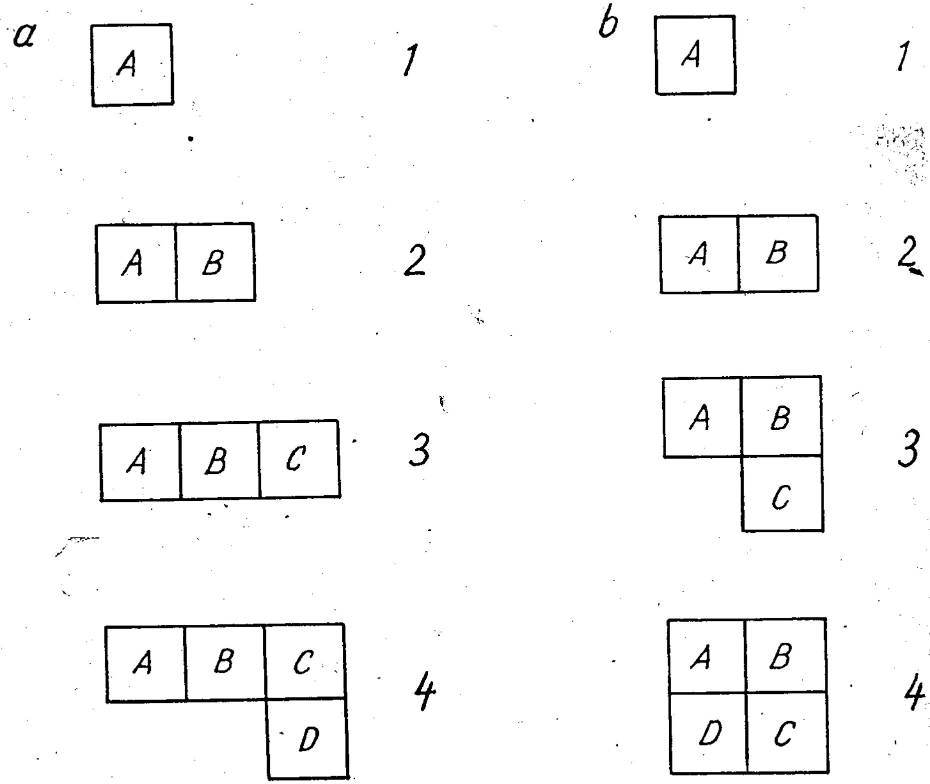
Rozważmy przebieg składania jakiegoś przedmiotu z jego elementów składowych. Dla prostoty przyjmiemy, że naszymi elementami konstrukcyjnymi będą cztery kwadratowe tekturki oznaczone literami *A*, *B*, *C*, *D*. Tekturki te będziemy



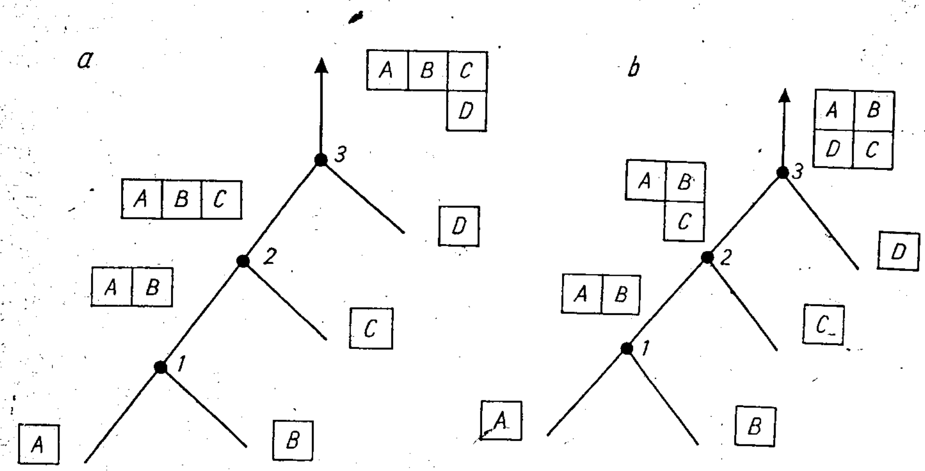
Rys. 34

stykali z sobą krawędziami, tworząc w ten sposób nowe konfiguracje. Załóżymy przy tym, iż proces konstruowania przebiega w ten sposób, że zawsze przystawiana jest tylko jedna tekturka do istniejącej już konfiguracji tekturek. Zabawa nasza przypomina więc nieco grę w domino. Na rysunku 34a ÷ d pokazane są niektóre możliwe konfiguracje kwadracików.

Kolejne etapy konstruowania dwu z tych składanek przedstawione są na rysunku 35a,b. Nie wymagają one komentarza. Przebieg tego procesu możemy przedstawić w postaci przypominającej trochę drzewo (rys. 36a,b). Punkty na rysunku oznaczają dostawianie odpowiednich kwadratów do



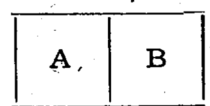
Rys. 35



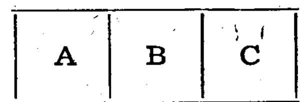
Rys. 36

siebie, obok zaś narysowano kolejne stadia konstruowanej układanki.

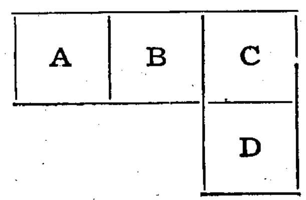
I tak w wyniku operacji nr 1 (rys. 36a) z kwadaratów *A* i *B* otrzymano figurę

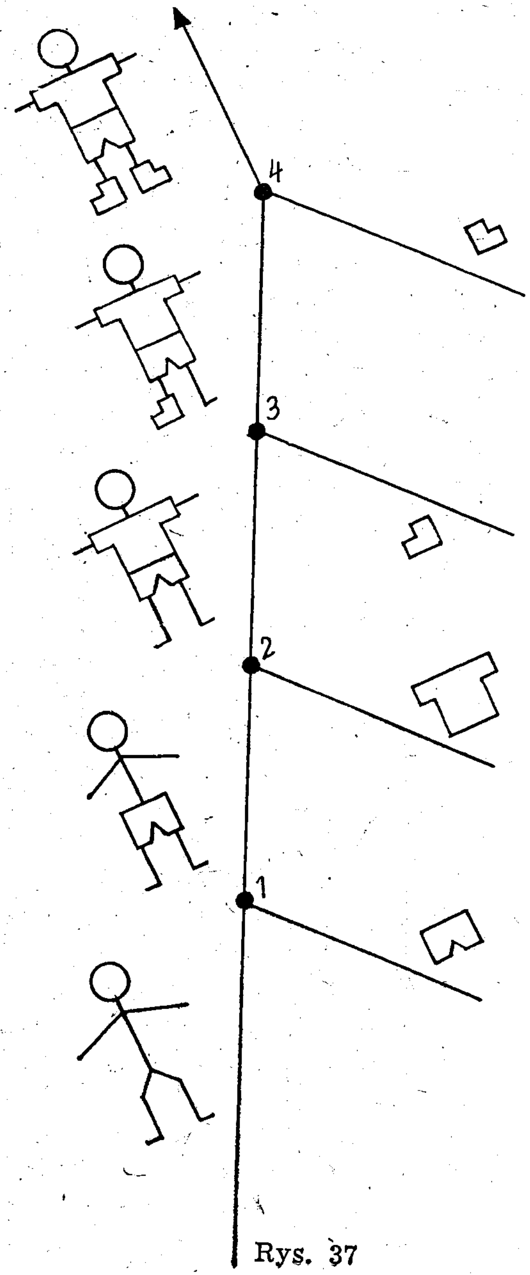


Z tej zaś figury i kwadratu C (operacja nr 2) otrzymano figurę



Dostawiając zaś odpowiednio do tak otrzymanej figury kwadrat *D* (operacja nr 3) otrzymamy w rezultacie figurę





Rys. 37

W podobny sposób przebiega proces konstruowania dowolnego przedmiotu, złożonego z jego części składowych. Inne mogą być elementy, sposób ich składania oraz inny rysunek drzewa opisującego przebieg tego procesu, tym niemniej ogólny charakter tego zjawiska będzie podobny.

W szczególnym przypadku ubieranie się możemy również traktować jako proces składania, którego elementami są: goły człowiek i wszystkie części jego garderoby. Proces ubierania się pokazany jest na rysunku 37.

2. *Sztuka rozbierania się*

Rozpatrzmy teraz zagadnienie odwrotne do tego, które rozważaliśmy w poprzednim paragrafie: rozkładanie przedmiotu złożonego na jego elementy składowe. Przebieg tego rozkładu możemy również przedstawić w postaci drzewa, należy je tylko „czytać" odwrotnie niż w paragrafie poprzednim, tj. wykonywać operacje w odwrotnym porządku aniżeli przy składaniu. A więc np. na rysunku 37, przedstawiającym przebieg ubierania się, należy najpierw wykonać operację 4 (zdjąć jeden but), następnie operację 3 (zdjąć drugi but) itd.

W związku ze składaniem i rozkładaniem przedmiotów powstaje wiele ciekawych problemów logicznych. Jeden z nich przedstawimy w dalszym ciągu.

3. Konstrukcje jednoznaczne

Przedmiot, który otrzymamy w wyniku składania, będziemy nazywali konstrukcją. Konstrukcją jest więc np. zegarek, samolot, most czy też rozmaite figury geometryczne. Konstrukcje, które rozważaliśmy do tej pory, miały tę własność, że można je było wykonywać w różny sposób. Na przykład figurę przedstawioną na rysunku 34a mogliśmy zacząć konstruować nie od kwadratów A i B, lecz np. od kwadratów C i D, bądź też jeszcze inaczej.

Rozkładając gotową konstrukcję na elementy składowe, możemy postępować również w różny sposób. Na przykład figurę pokazaną na rysunku 34a możemy rozkładać tak

1. $A, B, C, \underline{D}$
2. $A, B, \underline{C}$
3. $A, \underline{B}$
4. $\underline{A}$

bądź też w kolejności

1. $\underline{A}, B, C, D$
2. $B, C, \underline{D},$
3. $\underline{B}, C,$
4. $\underline{C}$

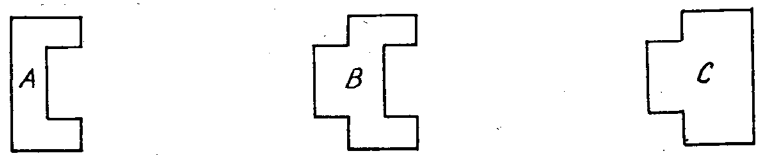
Podkreślone litery oznaczają, że odjęliśmy w tym kroku dany kwadrat.

Oczywiście istnieje jeszcze wiele innych sposobów dekompozycji rozpatrywanej figury. Szczególnie interesujące są takie konstrukcje, których składanie i rozkładanie może

przebiegać tylko w jeden jedyny sposób. Konstrukcje takie nazwiemy jednoznacznymi. W takiej konstrukcji zapisana jest więc cała historia jej powstania i można ją w każdej chwili jednoznacznie odczytać.

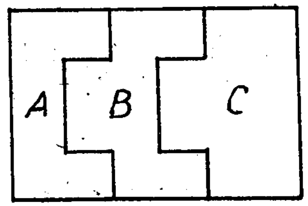
4. Przykłady konstrukcji jednoznacznych

Konstrukcją jednoznaczną będzie np. układanka z tak dobranych elementów, że do zbudowanego już fragmentu można dołączyć tylko jeden nowy element w ściśle określonym miejscu. Jako elementy przyjmijmy figury przedstawione na rysunku 38. Wolno je składać tylko w ten sposób, aby krawędzie posiadające wycięcia i występy stykały się ze sobą, natomiast łączenie innych krawędzi jest niedozwolone.



Rys. 38

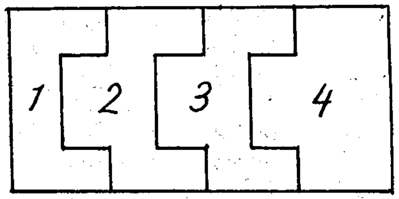
Przyjmiemy, że układankę zawsze rozpoczynamy od elementu A, a kończymy elementem C, dołączając zawsze tylko jeden element. A więc z elementów tych możemy utworzyć konstrukcję, pokazaną na rysunku 39. Zakładając, że rozkła-



Rys. 39

danie możemy zacząć tylko od elementu *C*, proces dekompozycji tych konstrukcji jest również jednoznaczny *.

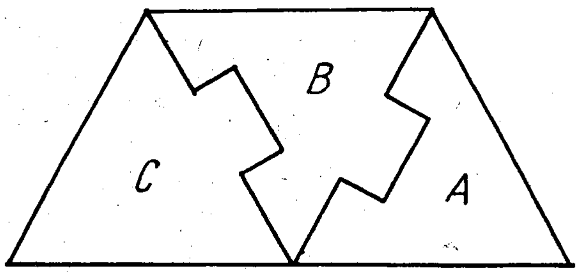
W konstrukcji pokazanej na rysunku 40 najpierw możemy usunąć jedynie element *4*, po nim zaś jedynie *3* itd. Nie możemy natomiast rozebrać tej konstrukcji zaczynając od usu-



Rys. 40

nięcia elementu np. *3*, gdyż wtedy otrzymalibyśmy dwie niezależne konstrukcje: jedną składającą się z elementów *1* i *2* oraz drugą składającą się z jednego elementu *4*.

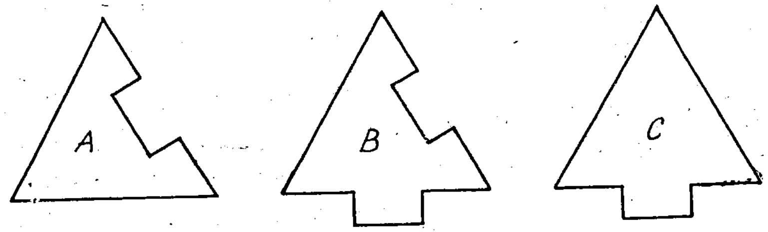
Przykładem konstrukcji jednoznacznej będzie także układanka (rys. 41) z elementów przedstawionych na rysunku 42.



Rys. 41

Tu również przyjmujemy, że składanie konstrukcji można rozpocząć tylko od elementu *A*, a zakończyć elementem *C*. Inny prosty przykład konstrukcji z tych elementów pokazano na rysunku 43.

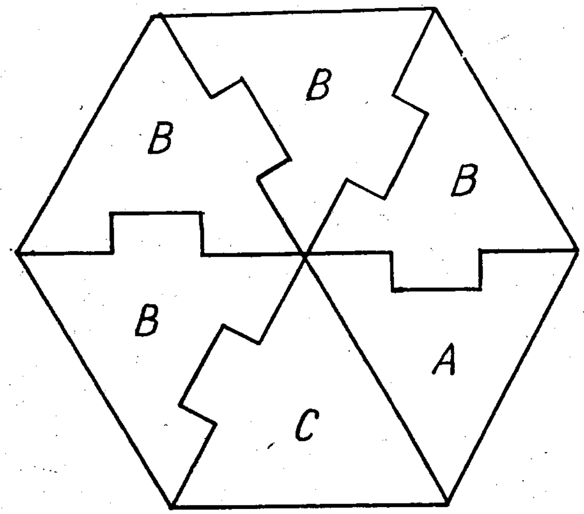
* Musimy tu dodatkowo założyć, że dozwolone jest tylko takie odejmowanie elementów, które nie dzieli konstrukcji na dwie niezależne części, a więc nie wolno usuwać elementów ze środka łańcucha.



Rys. 42

Istnieje wiele jeszcze innych konstrukcji jednoznacznych. Polecamy jako ćwiczenie zastanowić się nad tym, czy można podać taki kształt klepek, aby pokrycie nimi podłogi było konstrukcją jednoznaczną, tzn. aby podłogę można było pokryć klepkami w jednej ściśle określonej kolejności i aby zdejmowanie klepki było możliwe również tylko w jednej określonej kolejności.

Można również studiować tego rodzaju konstrukcje nie na płaszczyźnie, lecz w przestrzeni, której elementami są pewne bryły przestrzenne, jak np. czworościan, sześcian itp.



Rys. 43

Gdzie spotykamy takie konstrukcje i po co są potrzebne studia nad nimi? W technice sprawa jednoznaczności konstrukcji nie gra większej roli, bowiem raz zbudowane urządzenie nie jest zaraz po ukończeniu rozbierane, natomiast w niektórych dziedzinach nauki konstrukcje tego rodzaju mają podstawowe znaczenie. Należą do nich między innymi: biochemia, językoznawstwo i logika *.

Jest wielce prawdopodobne, że każde białko jest budowane w jeden ściśle określony sposób z podstawowych elementów i jego dekompozycja na podstawowe elementy składowe — aminokwasy — przebiega dokładnie odwrotnie do procesu syntezy.

5. *Konstrukcje symboliczne*

Elementami układanek, które rozważaliśmy do tej pory, były przedmioty fizyczne, „kafelki", które składaliśmy w różne sposoby. Obecnie będziemy rozpatrywali konstrukcje składające się z innego rodzaju elementów, mianowicie symboli. Istota sprawy nie ulega zmianie. Symbole możemy uważać za pewne elementy fizyczne, a zestawienie ich w jednej linii, według określonych reguł, stanowi pewną konstrukcję.

Przyjmijmy jako elementy dwa symbole a i b, a jako reguły składania

$$R_1\colon \alpha\, a \rightarrow \alpha\, a\, b$$
$$R_2\colon \alpha\, a\, b \rightarrow \alpha\, a\, b\, a$$

gdzie α oznacza dowolny, już skonstruowany ciąg symboli (w szczególnym przypadku α może być ciągiem pustym). Reguła R_1 pozwala w dowolnym ciągu symboli zakończonym literą a dopisać z prawej strony literę b. Natomiast reguła R_2

* Pomijamy tu dziewiarstwo. Prucie np. swetra przebiega dokładnie odwrotnie do procesu jego wytworzenia. Natomiast proces rozbierania nie musi przebiegać dokładnie w odwrotnej kolejności do ubierania. Człowiek wraz ze swym ubraniem nie jest więc konstrukcją jednoznaczną.

do ciągu zakończonego literami $a\ b$ pozwala dopisać z prawej strony literę a. A więc z symboli a i b za pomocą reguł R_1 i R_2 możemy konstruować różne ciągi symboli.

Przebieg takiej konstrukcji może wyglądać następująco

1.	a	R_1
2.	$a\,b$	R_2
3.	$a\,b\,a$	R_1
4.	$a\,b\,a\,b$	R_2
5.	$a\,b\,a\,b\,a$	

z prawej strony każdego wiersza podano zastosowaną regułę.

Możemy teraz zapytać, jak wykonać zadanie odwrotne, tj. zadany ciąg symboli rozłożyć na elementy składowe w kolejności odwrotnej do kolejności złożenia. W naszym przykładzie zadanie to jest wykonalne i jego rozwiązanie jest bardzo proste. Jako reguły rozkładania należy po prostu przyjąć reguły „odwrotne" do reguł składania, czyli

$$R_1\colon \alpha\, a\, b \rightarrow \alpha\, a$$
$$R_2\colon \alpha\, a\, b\, a \rightarrow \alpha\, a\, b$$

które mówią, że jeżeli jakieś wyrażenie kończy się literami $a\ b$, to mogę z niego usunąć ostatnią literę b, a jeżeli wyrażenie kończy się literami $a\ b\ a$, to mogę z niego usunąć ostatnią literę a.

A więc dekompozycja ciągu symboli $a\ b\ a\ b\ a$ będzie przebiegała w sposób

1.	$a\,b\,\overline{a\,b\,a}$	
2.	$a\,b\,\overline{a\,b}$	R_2
3.	$\overline{a\,b\,a}$	R_1
4.	$\overline{a\,b}$	R_2
5.	a	R_1

Nie zawsze jednak takie postępowanie jest możliwe. Łatwo podać taki zespół reguł konstruowania wyrażeń z symboli, że po skonstruowaniu wyrażenia odtworzenie drogi jego powstawania jest już niemożliwe. Nie da się ono bowiem już rozłożyć w jednoznaczny sposób na elementy składowe.

Badania tego rodzaju konstrukcji symbolicznych mają duże znaczenie w powstałej niedawno nauce — lingwistyce matematycznej. Każde zdanie w dowolnym języku naturalnym jest pewną konstrukcją symboliczną, tzn. można je skonstruować z elementów (słów), postępując zgodnie z regułami gramatycznymi danego języka. A więc z zadanego zbioru słów, stosując kolejno taki czy inny zespół reguł gramatycznych, otrzymujemy różne zdania. Oczywiście, dla jakiegokolwiek zadanego języka żywego reguły gramatyczne są znacznie bardziej skomplikowane od reguł podanych w poprzednim przykładzie. Tym niemniej ogólny charakter tego procesu nie ulega zmianie.

Ważne jest również zadanie odwrotne: zadany jest ciąg symboli i pytamy, czy jest on zdaniem w jakimś języku. Ogólna metoda postępowania w tym przypadku jest odwrotna do postępowania przy budowie zdania poprawnego. Musimy dysponować zbiorem reguł, które pozwolą nam rozłożyć badane zdanie na jego elementy składowe.

Zbiór tych reguł stanowi również gramatykę języka, jednakże w zasadzie inną niż ta, która służy do składania zdań. Dlatego też w lingwistyce matematycznej rozróżnia się dwa pojęcia gramatyki: mianowicie gramatykę syntetyczną (tj. zbiór reguł pozwalających na budowanie zdań poprawnych ze słów) oraz gramatykę analityczną (tj. zbiór reguł pozwalających na rozkładanie zdania na jego elementy składowe).

Człowiek piszący (bądź wymawiający) zdanie w jakimś języku posługuje się gramatyką syntetyczną. Natomiast człowiek czytający (bądź słuchający) posługuje się gramatyką analityczną *, tzn. analizuje (rozkłada) w umyśle odbierane zdanie na elementy składowe **.

---

* Posługiwanie to odbywa się całkowicie bez udziału naszej świadomości.

** Dlatego czasem zamiast gramatyka analityczna bądź gramatyka syntetyczna mówi się gramatyka piszącego (bądź mówiącego) oraz gramatyka czytającego (bądź słuchającego).

Istnieje przypuszczenie, że w rozumieniu tego, co się słyszy (bądź czyta), zasadniczą rolę odgrywa proces analizy odbieranego zdania. Od sposobu jego rozkładu zależy zrozumienie sensu zdania. Jeżeli zdanie jest konstrukcją jednoznaczną, to posiada ono jeden jedyny sens i jest rozumiane przez odbierającego jednoznacznie. Jeżeli zdanie można rozłożyć według reguł gramatyki analitycznej na wiele sposobów, to posiada ono tyle znaczeń, ile istnieje sposobów jego rozkładu.

Odbiorca powinien na podstawie odebranego zdania odtworzyć w umyśle proces konstruowania zdania przez nadawcę. Jeżeli odtworzony przebieg konstrukcji przez odbiorcę jest niezgodny z przebiegiem konstrukcji u nadawcy, sens zdania zostanie przez odbiorcę zrozumiany inaczej, niż tego sobie życzył nadawca. Studia nad jednoznacznymi konstrukcjami, składającymi się z symboli, mają więc w tej dziedzinie ważne znaczenie.

6. Wracamy do logiki

Konstrukcje, które rozważaliśmy do tej pory, mają duże znaczenie w logice. Jak pamiętamy z rozdziału pierwszego, centralnym zagadnieniem logiki jest sprawa prawdziwości zdań. Jedną z metod badania prawdziwości zdań rozważaliśmy na początku tej książeczki. Polegała ona na wykonywaniu odpowiednich rachunków. Istnieje w logice jeszcze inna metoda sprawdzania prawdziwości zdań, z którą zapoznamy się pobieżnie w tym paragrafie. A więc będziemy się interesowali prawdziwością zdań matematycznych. Zanim przystąpimy do bliższego omówienia tego problemu, poświęcimy parę słów matematyce.

Matematycy zajmują się badaniem i tworzeniem teorii matematycznych. Każda teoria matematyczna składa się ze zdań wyjściowych, które dla ich oczywistości czy też z innych względów przyjmuje się za prawdziwe, oraz z reguł logicznych pozwalających ze znanych zdań prawdziwych otrzymywać nowe zdania prawdziwe. Zdania wyjściowe nazywane są aksjomatami, pewnikami lub założeniami, a zdania, które z nich otrzymujemy za pomocą reguł logicznych, wnioskami lub tezami teorii.

Proces otrzymywania wniosków z założeń nazywany jest wnioskowaniem lub dowodzeniem, a reguły logiczne danej teorii zwane też są regułami wnioskowania albo dowodzenia. Jako kryterium prawdziwości wniosków w takiej teorii wystarczy tylko fakt, że można je wyprowadzić za pomocą ustalonych reguł wnioskowania z przyjętych założeń. Fakt ten ma zasadnicze znaczenie dla maszyn matematycznych. Pozwala on bowiem przeprowadzać rozumowanie w sposób całkowicie mechaniczny bez rozumienia tego, co się robi.

Ponieważ zdania matematyczne są zapisywane w specjalnym języku symbolicznym, wnioskowanie polega więc na przekształceniu jednych napisów w inne napisy w myśl określonych reguł. Jeżeli chcemy sprawdzić, czy jakieś zdanie Z należy do interesującej nas teorii T, musimy je umieć zbudować z aksjomatów tej teorii za pomocą reguł wnioskowania obowiązujących w rozpatrywanej teorii.

Jak już wspominaliśmy, postępowanie takie nazywa się dowodzeniem lub wnioskowaniem. Ciąg zdań $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$, w którym zdanie Z_n jest identyczne ze zdaniem Z oraz każde zdanie Z_i jest aksjomatem teorii T lub też Z_i jest otrzymane za pomocą reguł wnioskowania teorii T ze zdania Z_j poprzedzającego Z_i, przy czym $i > j$, nazywamy dowodem zdania Z w teorii T.

Dowód jest to więc ciąg zdań wzajemnie powiązanych ze sobą w ten sposób, że każde zdanie tego ciągu jest albo aksjomatem, albo wynika z jakichś poprzednich zdań. Wynika — znaczy tu — jest otrzymywane za pomocą reguł wnioskowania. Dowodzenie więc polega na znalezieniu dla zadanego zdania Z jego dowodu, tj. ciągu $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$.

W dalszym ciągu rozpatrzymy przykłady teorii matematycznych oraz podamy przykłady dowodów w tych teoriach. Będziemy przy tym rozróżniali dwie metody poszukiwania

dowodów: metodę dedukcyjną i metodę redukcyjną. Najpierw omówimy wnioskowanie dedukcyjne. Nie będziemy jednak rozpatrywali żadnych rzeczywistych teorii matematycznych, są one bowiem zbyt skomplikowane, abyśmy je mogli tutaj przedstawić. Pokażemy natomiast taki sposób manipulowania symbolami, że będzie on przypominał postępowanie przy dowodzeniu twierdzeń w prawdziwych teoriach matematycznych.

Nasze „teorie” będą pozbawione jakiegokolwiek sensu matematycznego, nie będzie to jednak stanowiło przeszkody w zrozumieniu głównych myśli zawartych w tym paragrafie. Celem naszym jest bowiem zapoznanie Czytelnika z ogólną strukturą takich teorii oraz z pojęciem dowodu, a do tego wystarczą w zupełności podane w dalszym ciągu przykłady.

Rozpatrzmy teorię T_1 posiadającą jeden aksjomat

$$A_1\colon +$$

oraz dwie reguły wnioskowania

$$R_1\colon \alpha \to \alpha\, o$$
$$R_2\colon \alpha \to + \alpha +$$

Teoria ta jest bardzo prymitywna. Jedynym jej aksjomatem jest symbol $+$, którego znaczenie nas tutaj nie interesuje.

Znaczenie pierwszej reguły wnioskowania R_1 jest następujące: litera α oznacza dowolne twierdzenie teorii T_1. Jeżeli do dowolnego twierdzenia teorii T_1 dopiszemy na końcu symbol o, to w wyniku otrzymamy również twierdzenie należące do tej teorii, np. znak $+$ jest twierdzeniem należącym do teorii T_1, więc $+$o na podstawie reguły R_1 należy również do teorii T_1. Reguła druga mówi, że do dowolnego twierdzenia teorii T_1 możemy z obu stron dopisać symbol $+$ i otrzymane w ten sposób zdanie jest również twierdzeniem tej teorii, np. $+$o$+$ jest twierdzeniem teorii T_1.

Zdanie $++$o$+$ jest również twierdzeniem teorii T_1. Dowód tego twierdzenia jest następujący

1.	$+$	A_1
2.	$+\,o$	$R_1, 1$
3.	$+\,+\,o\,+$	$R_2, 2$

Liczby z lewej strony oznaczają kolejny numer zdania. Z prawej strony podane są użyte we wnioskowaniu reguły oraz numer zdania, do którego je zastosowano.

Zdanie *1* jest aksjomatem, a więc należy do teorii. Zdanie *2* jest otrzymane ze zdania *1* przez zastosowanie reguły R_1. Zdanie *3* jest otrzymane ze zdania *2* poprzez zastosowanie do niego reguły R_2. A więc zdanie $+\,+\,o\,+$ można wyprowadzić z aksjomatu A_1 za pomocą reguł R_1 i R_2, jest więc ono twierdzeniem teorii T_1.

Podobnie możemy przeprowadzić dowód twierdzenia $+\,+\,+\,o\,+\,o\,+$

1.	$+$	A_1
2.	$+\,o$	$R_1, 1$
3.	$+\,+\,o\,+$	$R_2, 2$
4.	$+\,+\,o\,+\,o$	$R_1, 3$
5.	$+\,+\,+\,o\,+\,o\,+$	$R_2, 4$

A więc $+\,+\,+\,o\,+\,o\,+$ jest twierdzeniem teorii T_1.

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład — teorię T_2, posiadającą jeden aksjomat

$$A_1\colon\ o$$

oraz dwie reguły wnioskowania

$$R_1\colon\ \alpha \to \alpha +$$
$$R_2\colon\ \alpha, \beta \to \alpha\,\beta$$

Pierwsza reguła pozwala do twierdzeń dopisywać na końcu krzyżyk, druga natomiast pozwala na pisanie dwu twierdzeń obok siebie.

W teorii T_2 wyrażenie $o\,+\,+\,o\,+\,o\,+\,+\,+$ jest twierdzeniem. Dowód tego twierdzenia ma postać

1.	o	A_1
2.	$o\,+$	$R_1, 1$
3.	$o\,+\,+$	$R_1, 2$
4.	$o\,+\,+\,o\,+$	$R_2, 3, 2$
5.	$o\,+\,+\,+$	$R_1, 3$
6.	$o\,+\,+\,o\,+\,o\,+\,+\,+$	$R_2, 4, 5$

Czytelnik z łatwością poda już samodzielnie przykłady innych podobnych teorii oraz dowodów. Cechą charakterystyczną pokazanej metody jest to, że znalezienie dowodu interesującego nas twierdzenia polega na poszukiwaniu takiego ciągu operacji, które od aksjomatów prowadzą do dowodzonego twierdzenia. Nie wiadomo jednak z góry, jakie operacje i w jakiej kolejności należy wykonać. Muszą one być wyszukane przez dowodzącego metodą prób i błędów. Nie można więc, ogólnie biorąc, podać przepisu na przeprowadzenie dowodu.

Przedstawiona metoda nosi nazwę metody dedukcyjnej. We wnioskowaniu dedukcyjnym tworzyliśmy wnioski z przesłanek, za pomocą odpowiednich reguł. Wnioskowanie redukcyjne pozwala na dokonanie czynności odwrotnej, na znalezienie przesłanek dla zadanych wniosków. Proste przykłady wyjaśnią różnicę między tymi dwoma rodzajami postępowania.

Rozpatrzmy teorię T_3 z trzema aksjomatami

$$A_1\colon\ +\,+$$
$$A_2\colon\ o\,+$$
$$A_3\colon\ +\,o$$

oraz jedną regułą wnioskowania

$$R_1\colon\quad x\,\alpha\,y \to x\,\alpha, \alpha\,y$$

Litery x i y oznaczają krzyżyk lub kółko, natomiast litera α oznacza dowolny ciąg kółek i krzyżyków. Reguła R_1 mówi, że przesłankami dla dowolnego wyrażenia są wyrażenia otrzymane z niego przez usunięcie pierwszej lub ostatniej litery.

Dowolny ciąg kółek i krzyżyków jest twierdzeniem T_3, jeżeli — stosując do niego wielokrotnie regułę R_1 — otrzymamy w wyniku wyrażenia, których już dalej rozłożyć za pomocą reguły R_1 nie można, i wszystkie one są aksjomatami. Na przykład dowód twierdzenia + + o + ma przebieg następujący

1.	+ + o +		
2.	+ o +	R_1,1	
3.	+ + o	R_1,1	
4.	o +	R_1,2	A_2
5.	+ o	R_1,2	A_3
6.	+ +	R_1,3	A_1
7.	+ o	R_1,3	A_3

W wyniku przeprowadzonej redukcji otrzymaliśmy cztery wyrażenia elementarne (nie dające się dalej rozłożyć) i każde z tych wyrażeń jest aksjomatem. A więc + + o + jest twierdzeniem w teorii T_3.

Natomiast wyrażenie + o o o nie jest twierdzeniem, gdyż otrzymane w wyniku dedukcji

1.	+ o o o		
2.	o o o	R_1,1	
3.	+ o o	R_1,1	
4.	o o	R_1,2	—
5.	o o	R_1,2	—
6.	o o	R_1,3	—
7.	+ o	R_1,3	A_3

wyrażenia *4, 5, 6* nie są aksjomatami.

Wnioskowanie redukcyjne pozwala na jednoznaczne postępowanie w celu znalezienia dowodu twierdzenia. Mamy więc tutaj ponownie zagadnienie jak gdyby konstruowania zdania ze zdań wyjściowych (eksjomatów) i rozkładania zdania już złożonego na elementy wyjściowe. Konstrukcje te mają jednak taki charakter, że od jednych zdań prawdziwych prowadzą do nowych zdań prawdziwych.

Obecnie większość teorii matematycznych jest budowana w sposób dedukcyjny, tzn. teoria taka stanowi zbiór zdań początkowych (aksjomatów) oraz zbiór reguł wnioskowania, które pozwalają z aksjomatów budować nowe zdania prawdziwe. Znalezienie dowodu twierdzenia w tej teorii polega na próbie znalezienia takiego ciągu reguł, które od aksjomatów prowadzą do interesującego nas twierdzenia.

Dla logiki zdań, którą omawialiśmy krótko w pierwszym rozdziale, został podany taki system reguł, który pozwala na postępowanie w obu kierunkach, tj. wychodząc z aksjomatów możemy udowodnić dowolne twierdzenie rachunku zdań i, odwrotnie, mając zadany jakiś napis w tej teorii, możemy jednoznacznie przejść do aksjomatów.

Twierdzenia w tej teorii są konstrukcjami jednoznacznymi. Ma to bardzo duże znaczenie ze względów praktycznych. Dzięki temu można dla dowolnego twierdzenia tej teorii w jednoznaczny sposób znaleźć jego dowód. Dane twierdzenie jest jak gdyby programem własnego dowodu, opisuje ono bowiem jednoznacznie postępowanie, jakie należy wykonać, aby znaleźć ten dowód.

W konsekwencji pozwala to na stosowanie maszyn matematycznych do dowodzenia twierdzeń, gdyż takie jednoznaczne postępowanie może być z łatwością realizowane przez współczesne maszyny matematyczne. W związku z perspektywą możliwości zastosowania maszyn matematycznych do dowodzenia twierdzeń, czynione są próby takiego formułowania teorii matematycznych, aby twierdzenia tych teorii były konstrukcjami jednoznacznymi.

Pierwszy system logiki, w którym możliwe było postępowanie od aksjomatów do twierdzeń i odwrotnie, został podany przez Gentzena *. Ponieważ dowodzenie twierdzeń w tym systemie można przyrównać do ubierania się bądź rozbierania, prof. Roman Sikorski ** twierdzenie Gentzena nazwał twierdzeniem o strip-teasie.

Jak widzimy, studiowanie procesów składania i rozkładania ma dość ogólne znaczenie i może być interesujące zarówno dla biochemików, językoznawców, jak i logików. Obecnie badania nad takimi procesami znajdują się w stanie początkowym, niewykluczone jednak, że w przyszłości mogą one mieć większe znaczenie.

---

* Gentzen — współczesny matematyk niemiecki.

** Roman Sikorski — matematyk, dyrektor naukowy Instytutu Matematycznego PAN.

ZAKOŃCZENIE

Zróbmy krótki przegląd problematyki, którą poruszaliśmy w niniejszej książeczce. Wychodząc z praw logiki pokazaliśmy, że mogą odnosić się one nie tylko do zasad myślenia, ale również mają różne interpretacje techniczne. Zastosowania techniczne logiki postawiły wiele dalszych problemów, których rozwiązanie może w pewnym stopniu wpłynąć na rozwój logiki. Z drugiej strony, trudno sobie wyobrazić dzisiejszy rozwój maszyn matematycznych bez udziału potencjału wiedzy zmagazynowanego przez logików, zresztą do zupełnie innych celów, bez myśli o jakichkolwiek zastosowaniach technicznych.

Również pojęcie automatu bierze swój rodowód z abstrakcyjnych rozważań logiki, robionych bez jakichkolwiek intencji zastosowań praktycznych, tworząc zaczątek samodzielnej dyscypliny naukowej. Jak się wydaje, teoria ta może mieć bardzo wszechstronne zastosowania, choć dziś jeszcze nie może się wykazać większymi rezultatami praktycznymi.

Zagadnienia poruszane w ostatnim rozdziale stanowią punkt wyjścia do mechanicznych tłumaczeń za pomocą maszyn matematycznych, do maszynowego dowodzenia twierdzeń w teoriach matematycznych i kto wie, czy nie znajdą zastosowań również w biochemii.

W każdym przypadku widać jednakowy, ciekawy schemat rozwoju omawianych dyscyplin naukowych. Od zupełnie abstrakcyjnych, filozoficznych rozważań poprzez bardzo prozaiczne zastosowania następuje powrót do teorii matematycznej o wysokim stopniu abstrakcji, która — być może — zrodzi nowe zastosowania, i tak dalej, i tak dalej ...

Redaktor: Regina Jarzębowska
Redaktor techniczny: Janusz Kuligowski
Korektor: Halina Waliszewska

PRINTED IN POLAND

P.W. „Wiedza Powszechna", Warszawa 1966. Wydanie I. Nakład 3245 egz. Obj. 5,5 ark. wyd., 4,125 ark. druk. Papier druk. sat. kl. V, 70 g, 70×100/32 z f-ki we Włocławku. Oddano do składania 18. XI. 1965 r. Podpisano do druku 25. IV. 1966 r. Druk ukończono w maju 1966 r. Cena zł 8.— Pabianickie Zakł. Graf., Pabianice, P. Skargi 40. 1509-65. M-15