Wiedza z Perspektywy Zbiorów Przybliżonych

Zdzisław Pawlak

ICS Research Report 23/92

Warsaw University of Technology

Warsaw, October 1992

1. Wprowadzenie

Zanim przystapie do dyskusji zasadniczego problemu tej pracy najpierw chciałbym kilka uwag poświecić głównym celom jakie sobie stawia sztuczna inteligencja. Istnieja tutaj dwa poglady (nie wykluczajace sie). Pierwszy z nich głosi, że celem sztucznej inteligencji jest opracowanie programów mogacych symulować inteligentne zachowanie sie - drugi zas przyjmuje, że celem sztucznej inteligencji jest modelowanie pracy mózgu.

Pierwsze rozumienie sztucznej inteligencji wiaże sie z psychologia, filozofia i na ten temat pojawia sie od dłuższego czasu bardzo duża liczba prac, na pograniczu filozofii, psychologii i informatyki (patrz np. **Bachimot, B. (1991), Bersini, H. (1991), Davis, R. i Lenat, D. (1982), Frixione, M. (1991), Hempel, C. G. (1952), Hunt, E. B. (1974)** oraz **Krish, D. (1991)**). Przy bliższym zapoznaniu sie z tym kierunkiem okazuje sie, iż nie wiadomo dokładnie co to jest inteligencja i trudno w istocie mówić o symulacji tego pojecia.

W drugim rozumieniu sztucznej inteligencji natrafiamy na podobne kłopoty jak w pierwszym, gdyż mimo olbrzymiej pracy włożonej w badania struktury i funkcji mózgu, do tej pory nie rozumiana jest ani istota tego organu ani nawet pojedynczego neuronu. W tej sytuacji trudno mówić poważnie o modelowaniu mózgu.

Dlatego czesto przyjmuje sie skromniejszy cel. Według tego pogladu głównym celem sztuczej inteligencji jest opracowanie programów, które pozwala maszynie (robotowi, automatowi) zachować sie celowo w otoczeniu, lub mówiac inaczej - opracowanie programów, pozwalajacych na rozwiazywanie możliwie szerokiej klasy konkretnych problemów zwiazanych z analiza danych otrzymywanych z otoczenia - i odpowiednie reagowanie na ich podstawie celem rozwiazania określonego zadania. W niniejszym opracowaniu przyjmiemy takie własnie rozumienie sztucznej inteligencji.

Tak wiec "inteligentne" programy (maszyny, roboty, automaty) maja na celu "właściwe" reagowanie na sygnały z otoczenia, przyczym pojecie sygnału jak i otoczenia ma bardzo ogólne znaczenie. Istnieja tutaj dwa podejścia.

Pierwsze, zwane *behawiorystycznym* (lub *funkcjonalnym)* głosi, że do zrealizowania postawionego powyżej zadania wystarcza algorytmy, które każdej, intersujacej nas sytuacji otoczenia, reprezentowanej poprzez odpowiednie sygnały, przypisuja jednoznacznie "wyjście" (decyzje, akcje, sterowanie etc.). Typowymi reprezentantami tej klasy sa przede wszystkim sieci neuronowe oraz systemy wspomagania decyzji. W obu wymienionych przypadkach rezultat dzialania systemu zalezy jedynie od wejscia i ewnetualnie stanu wewnetrznego systemu. W istocie, od strony teoretcznej, podejscie to moze byc wiec uwazane za szczególny przypadek teorii automatow skonczonych.

Kierunek drugi, zwany *symbolicznym*, zaklada, ze do wlasciwego zachowania sie robota (automatu) w otoczeniu konieczne jest aby robot posiadal pewna "wiedze" o otoczeniu w ktorym ma dzialac, lub innymi slowy, aby swiat otaczajacy robota byl reprezentowany w jakis sposob w jego pamieci. A wiec nie wystarcza w tym celu jedynie sygnaly dochodzace z otoczenia i zapisane na nie z gory reakcje robota, a konieczne jest "rozumienie" przez robota otaczajacego go swiata. W tym celu musi on o tym swiecie posiadac odpowiednia wiedze, ktora to wiedza jest odpowiednio reprezentowana w jego pamieci.

Chociaz na tematy te ukazuje sie olbrzymia liczba publikacji (patrz np. **Aikins, J. S. (1983), Airenti, G. i Colombetti, M. (1991), Bersini, H. (1991), Bobrow, D. G. (1977), Bobrow, D. G, and Winograd, T. (1977), Brachman, R. J. i Smith, B. C. (1980), Brachman, R.J. i Levesque, H. J. (Ed.) (1986), De Glas, M. (1991), Davis, R. i Lenat, D. (1982), Frixione, M. (1991), Grzymala-Busse, J. (1988), Halpern, J. (1986), Hayes-Roth, B. and McDermott, J. (1978), Holland, J. H., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E. i Thagard, P. R. (1986), Hunt, E. B. (1974), Hunt, E. D., Marin, J. i Stone, P. J. (1966), Kerber, M. (1991), Krish, D. (1991), McDermott, D. (1978), Minski, M. (1975), Newell, A. (1982), Orlowska, E. (1989), Orlowska, E. and Pawlak, Z. (1984a), Orlowska, E. i Pawlak, Z. (1984b), Vakarelov, D. (1987), Vakarelov, D. (1989), Wasilewska, A. (1987), Wasilewska, A. (1988), Ziarko, W. (1987)**) - to jednakze poglad na to co to jest wiedza i jak ja nalezy reprezentowac nie jest sprawa zbyt jasna i brak jest jednolitych pogladow na stan, cele i metody tej dziedziny (patrz **Brachman (1990)**).

Warto dodac, ze problematyka wiedzy od dawna zajmowali sie rowniez logicy i filozofowie (patrz np. **Hempel, C. G. (1952), Hintika, J. (1962), Popper, K. (1959), Russell, B. (1950)**), co dopiero kilka lat temu zostalo odkryte przez informatykow.

Od roku 1980 nastapilo zwrocenie duzej uwagi na mozliwosci zastosowania logiki do celow reprezenteacji wiedzy i dzisiaj logika jest jednym z glownych narzedzi reprezentacji wiedzy (chociaz nie jedynym), stad nazwa tego kierunku - symbolizm. Zaleta logiki jest jej scislosc oraz bogactwo srodkow formalnych, ktore moga byc przydatne w problematyce reprezenatcji wiedzy. Dokladniej biorac chodzi tu nie wylacznie o klasyczny rachunek predykatow, a o cala klase logik zbudowanych zarowno przez logikow dla celow scisle logicznych (patrz np. **Kripke (1971)**), jak i logik zaproponowanych przez informatykow specjalnie dla celow sztucznej inteligencji (patrz np. **McCarthy (1981), Gabbey, D.M. (1984)**).

Metody logiczne reprezentacji wiedzy, mimo swych niewatpliwych zalet, posiadaja rowniez powazne wady. Glowna z nich to fakt, ze logika nie odzwierciedla mechanizmow rozumowan stosowanych we wnioskowaniach potocznych, ktore sa niewatpliwie najciekawsze z punktu widzenia zainteresowan sztucznej inteligencji. Ogranicza to znacznie mozliwosci systemow budowanych w oparciu o srodki logiczne.

Jednym z glownych problemow w rozumowaniach potocznych jest koniecznosc operowania pojeciami niescislymi (nieostrymi), wiadomo natomiast, ze logika dopuszcza jedynie mozliwosc poslugiwania sie pojeciami scislymi (ostrymi). Klasyczne srodki logiczne sa w przypadku pojec nieostrych bezuzyteczne. Problem nieostrosci pojec interesowal zreszta od dawna rowniez logikow i filozofow (patrz np. **Black, M. (1937), Black, M. (1963), Fine, K. (1975), Hunt, E. B. (1974), Kohl, M. (1969), Popper, K. (1959), Russel, B. (1923), Russell, B. (1950)**) - jednakze rezultaty tych rozwazan, z uwagi na ich bardzo ogolny charkter, sa dla sztucznej inteligencji malo przydatne, chociaz niewatpliwie maja one znaczenie metodologiczne.

Najbardziej znany model matematyczny pojec nieostrych, zwany teoria zbiorow rozmytych, zostal zaproponowany przez Zadeha (patrz **Zadeh (1965)**). Model ten, mimo duzej krytyki (glownie ze strony matematykow) zdobyl duza popularnosc i znalazl wiele zastosowan. Zaleta tego modelu jest duza jego prostota oraz intuicyjnosc. Najczesciej krytykowana wada zbiorow rozmytych jest subiektywizm w okreslaniu tzw. funkcji stopnia przynaleznosci elementu do zbioru. Funkcja ta w wielu przypadkach jest definiowana dosc dowolnie, co zdaniem krytykow teorii zbiorow rozmytych nie pozwala na scisle operowanie tym pojeciem. Teoria zbiorow rozmytych znalazla rowniez zastosowanie w systemach sztucznej inteligencji, jednakze glownie w podejsciu behawiorystycznym, a nie symbolicznym. Wiaze sie to z wymieniona wada tej teorii, a mianowicie brakiem dostatecznej scislosci matematycznej, co w konsekwencji nie pozwala na zbudownie (jak dotad) odpowiedniej logiki rozmytej, chociaz proby w tym kierunku byly robione przez wielu autorow.

W niniejszym opracowaniu chcialbym przedstawic inne podejscie do wiedzy i jej reprezenatcji dla celow sztucznej inteligencji, anizeli to ma miejsce w podanej poprzednio literaturze. Podejscie to jest oparte o tzw. teorie zbiorow przyblizonych (patrz **Pawlak (1982)**) i zostalo szczegolowo omowione w licznych pracach, oraz podsumowane w ksiazce (patrz **Pawlak (1991)**). Punktem wyjscia proponowanego podejscia jest nowe spojrzenie na nieprecyzyjnosc pojec, wiedze oraz jej reprezentacje, chociaz wiele podobnych elementow mozna znalezc we wczesniejszych pracach innych autorow (patrz **Dubois i Prade (1988)**).

Wydaje sie, ze zaproponowane podejscie moze stanowic dobra podstawe teoretyczna do wielu problemow sztucznej inteligencji, a w szczegolnosci teorii wiedzy i jej reprezentacj, chociaz oczywiscie nie nalezy sie spodziewac, ze rozwiaze ono wszelkie problemy w tej dziedzinie.

Jak wykazaly dotychczasowe badania teoria zbiorow przyblizonych pozwala czesto uzyskac dobre rezultaty praktyczne, w przypadkach gdzie inne metody okazaly sie nie przydatne (patrz **Slowinski (1992)**). Wiaze sie to z faktem, ze proponowane podejscie nie wymaga numerycznego charakteryzowania nieprecyzyjnosci pojec a uzywa do tego celu srodkow teorio-mnogosciowych. W konsekwencji umozliwia to scisle sformulowanie rozumowan o charakterze jakosciowym, ktore stanowia podstawe rozumowan potocznych. Warto dodac. ze zblizona koncepcje podal ostanio De Glas (patrz **De Glas (1991)**), jednakze jego podejscie jest znacznie mniej zaawansowane. Nadmienmy jeszcze ze metodologia zbiorow przyblizonych moze byc stososwana zarowno do podejscia behawiorystycznego jak i symbolicznego.

W niniejszym opracowaniu rozpatrzymy przykladowo kilka najwazniejszych problemow zwiazanych z teoria wiedzy na potrzeby sztucznej inteligencji - w ujeciu zbiorow przyblizonych - a mianowicie: nieostrosc pojec, redukcja wiedzy oraz wyszukiwanie zaleznosci w danych. Wszystkie wyzej wymienione problemy daje sie latwo i precyzyjnie sformulowac w jezyku teorii zbiorow przyblizonych, co wiecej ujecie to prowadzi do nowych faktow na temat rozwazanych zagadnien, i ponadto do nowych algorytmow komputerowch zwiazanch z roznymi aspektami sztucznej inteligencji.

W pracy stosujemy standardowa notacje matematyczna i nie bedziemy jej blizej wyjasniac zakladajac, ze jest ona znana czytelnikowi.

2. Wiedza i Klasyfikacja

W pracach z zakresu sztycznej ineligencji dotyczacych wiedzy nie ma nigdzie, nawet roboczej, definicji tego pojecia. Mowi sie jedynie o reprezenatcji wiedzy. Wydaje sie, iz aby cos reprezentowac nalezy najpierw wiedziec co ma byc reprezentowane. Dlatego tez w proponowanym podejściu przyjmuje jako punkt wyjścia definicje pojecia wiedzy i na tej podstawie zdefiniuje pozniej pojecie reprezentacji wiedzy.

W dalszym ciagu przez *wiedzę* bede rozumiał *zbiór pojeć*. Takie rozumienie wiedzy, na pierwszy rzut oka wydaje sie dalekie od powszechnego rozumienia tego pojecia, jednakze po blizszym przyjzeniu sie tej definicji okazuje sie, ze ma ona wiele wspolnego z paradygmatem wiedzy obowiazujacym aktualnie w sztucznej inteligencji i w istocie jest ona mu bardzo bliska. Z drugiej strony, formalnie taka definicja wydaje sie całkiem naturalna i przypomina ona definicje wielu innych pojeć. Na przykład *teoria* jest definiowana w logice jako zbior twierdzeń, a *jezyk* w lingwistyce matematycznej - jako zbior zdań. Z formalnego punktu widzenia wiec nic nie przeszkadza aby wiedze rozumieć jako zbior pojeć.

Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia co rozumiemy przez pojecie. Jak wiadomo w konwencji teorio-mnogościowej, *pojecie* utozsamia sie z *podzbiorem* pewnego ustalonego zbioru obiektów, ktorymi jesteśmy zainteresowani. Np. pojecie *stary człowiek* utozsamia sie w tej konwencji ze *zbiorem wszystkich ludzi starych*, a pojecie *dobra ksiązka* ze zbiorem wszystkich dobrych ksiazek. Widać od razu, ze ten sposób formalizacji pojeć jest mało intuicyjny, jednakze jak dotad lepszego sposobu nie znaleziono, dlatego w dalszym ciagu bedziemy posługiwać sie ta konwencja.

Tak wiec dla zdefiniowania wiedzy musimy mieć pewien zbiór obiektów, ktorymi jesteśmy zainteresowani. Czym sa obiekty nie gra roli. Moga to być obiekty fizyczne, abstarkcyjne, momenty czasu etc. Oczywiście przyjmiemy, iz zbiór ten jest skończony i ustalony na czas naszych rozwazań. Zbiór taki bedziemy nazywać *uniwersum*. Majac wiec ustalone uniwersum mozemy nastepnie wybrać odpowiedni zbiór pojec do wyrazania własności tegoz uniwersum. Oczywiście zaleznie od zainteresowań, mozemy operować roznym zestawem pojec odnośnie tego samego uniwersum. Np. jezeli uniwersum jest zbiorem ludzi, to dla wyrazenia ich stanu zdrowia potrzebny jest inny zestaw pojeć anizeli dla analizy ich umiejetności zawodowych.

Poniewaz pojecie jest podzbiorem ustalonego uniwersum, w ten sposób, kazde pojecie wprowadza podział objektów na dwie klasy: tych objektów które do rozwazanego pojecia naleza i tych - które do niego nie naleza. A wiec z kazdym pojeciem zwiazana jest klasyfikacja binarna. Wygodniej jest przyjać troche ogólniejsze załozenie, a mianowicie, ze klasyfikacja moze być podziałem na wiecej niz dwie klasy. Dlatego tez w dalszym ciagu bedziemy przyjmowali, ze wiedza zwiazana jest z rodzina podziałów (klasyfikacji) ustalonego uniwersum. Np. jezeli rozwazanym uniwersum jest zbiór ludzi w określonym szpitalu, to wiedza potrzebna do diagnozy ich stanu zdrowia, oraz terapii wiaze sie z mozliwościa klasyfikowania ich odnośnie np. temperatury ciała, ciśnienia krwi, etc. Równiez automat ktory miałby autonomicznie zachowywać sie właściwie w określonym otoczeniu musi być wyposazony w sensory, które daja mu informacje o otoczeniu oraz jego stanie wewnterznym, klasyfikujac w ten sposób stany otoczenia oraz jego stany wewnetrzne i umozliwjajac mu właściwa reakcje na otoczenie. Wiadomo, ze umiejetność klasyfikacji jest podstawowym mechanizmem, w który wposożone sa wszystkie istoty zyjace - niezbednym do celowego działania w otoczeniu. Podobnie klasyfikacja na poziomie abstarkcyjnym jest podstawowym mechanizmem nauki. Tak wiec wybranie umiejetności klasyfikowania jako podstawoego mechanizmu wiedzy, przynajmniej z punktu widzenia potrzeb sztucznej inteligencji wydaje sie całkowicie uzasadnione.

Zwróćmy równiez uwage, ze przyjety tu punkt widzenia na wiedze ma charakter jakościowy a nie ilościowy. Nie mówimy tu o pomiarze temperatury, a klasyfikacji ze wzgledu na temperature, co nie musi wiazać sie z liczbowym wyrazeniem temperatury. Proponowane podejście wiaze sie wiec w bardzo naturalny sposób z intensywnie ostatnio uprawianym jakościowym podejściem do wielu rozumowań (np. w fizyce jakościowej) uwazanym równiez za dział sztucznej inteligencji.

W swietle powyzszych rozwazan naturalna rzecza jest przyjecie definicji wiedzy o okreslonym swiecie (uniwersum) jako zbioru podzialow (klasyfikacji) ze wzgledu na intersujace nas wlasnosci. To znaczy, ze wiedze na okreslony temat (o ustalonym uniwersum) utozsamiamy z umiejetnoscia klasyfikowania intersujacych nas zjawisk, procesow, mysli etc. (obiektow uniwersum). Oczywiscie definiacja ta miesci sie w podanej na poczatku ogolniejszej definicji wiedzy, gdyz kazdy podzial wyznacza pewien zbior pojec, ktore sa blokami tego podzialu.

3. Wiedza i Baza Wiedzy

W paragrafie tym podamy scisle, matematyczne sformulowanie poprzednich rozwazan. W tym celu wprowadzimy najpierw pojecie *bazy wiedzy.*

Niech U bedzie skonczonym, niepustym zbiorem, zwanym *uniwersum.* Elementy U bedziemy nazywac *obiektami* i bedziemy oznaczac malymi literami alfabetu x, y, z, ewentualnie ze wskaznikami. Jezeli x jest obiektem uniwersum U zapiszemy $x \in U$. Kazdy podzbior $X \subseteq U$ bedziemy nazwyli *pojeciem* w U. Dowolna rodzine podzbiorow (pojec) $P(U)$ bedziemy nazywali wiedza o U, natomiast pare $K = (U, P(U))$ nazwiemy *bazaa wiedzy* o U.

Baza wiedzy w naszym ujeciu jest wiec para skladajaca sie ze swiata (uniwersum) ktorym jestesmy zainteresowani oraz zbioru pojec, ktorymi chcemy ten swiat opisywac. Ten zbior pojec stanowi wiedze o interesujacym nas swiecie. Definicja ta pozornie odbiega dalece od tego co sie potocznie rozumie w sztucznej inteligencji przez baze wiedzy, ale jak sie przekonamy w dalszym ciagu powyzsza definicja bardzo dobrze oddaje intuicje bazy wiedzy przyjmowane aktualnie w tej dyscyplinie.

Poniewaz, jak to podalismy poprzednio, jestesmy zaintersowani takimi ukladami pojec ktore stanowia podzialy, nasza definicje bazy wiedzy mozemy zmodyfikowac w nastepujacy sposob.

Przez baze wiedzy bedziemy rozumieli pare $K = (U, \mathbf{C})$, gdzie $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ jest rodzina podzialow (klasyfikacji) U, to jest kazdy podzial $C \in \mathbf{C}$ jest rodzina rozlacznych podzbiorow U taka, ze ich suma jest rowna calemu uniwersum.

Ze wzgledow matematycznych wygodniej jest uzywac zamiast podzialow, relacji rownowaznosci, gdyz oba te pojcia sa rownowazne (tj. kazdy podzial wyznacza pewna relacje rownowaznosci i odwrotnie - kazda relacja rownowaznosci wyznacza pewien podzial) - natomiast relacje rownowaznosci sa latwiejsze w operowaniu. Dlatego tez wyzej podana definicje bazy wiedzy sformulujemy nastepujaco: baza wiedzy bedziemy nazywali system relacyjny $K = (U, \mathbf{R})$, gdzie $\mathbf{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$, oraz kazde R_i (1,2, ..., n) jest relacja rownowaznosci. Oczywiscie kazdy podzial U/R (tj. zbior klas abstrakcji relacji R) jest, zgodnie z przyjeta poprzednio definicja, wiedza o U. Dla uproszczenia rowniez kazda relacje $R \in \mathbf{R}$ bedziemy rowniez nazywali wiedza o U.

Wprowadzimy obecnie dwa wazne rodzaje pojec, a mianowicie pojecia podstawowe i pojecia elementarne.

Klasy abstrakcji kazdej relacji $R \in \mathbf{R}$ (tj, zbiory $Y \in U/R$) bedziemy nazywali *pojęciami podstawowymi* w bazie wiedzy K. Np. jezeli relacja $R \in \mathbf{R}$ reprezentuje podzial obiektow uniwersum ze wzgledu na kolor, to poszczegolne klasy abstrakcji tej relacji sa pojeciami podstawowymi w tej bazie i odpowiadaja pojeciom mozliwych kolorow, np. czerwony, zielony, etc.

Poniewaz iloczyn teorio-mnogosciowy relacji rownowaznosci jest rowniez realcja rownowaznosci, a wiec kazda rodzina **R** relacji rownowaznosci wyznacza rowniez relacje rownowaznosci $\cap$ **R** a tym samym podzial $U/\cap$ **R**, tj. zbior pewnych pojec o U, gdzie $\cap$ **R** oznacza iloczyn wszystkich relacji nalezacych do **R**. Klasy abstrakcji relacji $\cap$ **R** bedziemy nazywali *pojeciami elementranymi* (*atomowymi*) w bazie *K*. Oznacza to, ze jezeli mamy na przyklad w jakiejs bazie wiedzy pojecia elementarne *czerwony* (zbior wszystkich obiektow czerwonych) oraz *kwadratowy* (zbior wszystkich obiektow kwadratowych), to w bazie tej istniej tez pojecie, ktore jest kombinacja powyzszych pojec, a mianowicie *czerwony oraz kwadratowy* (*czerwony kwadrat*, tj. zbior wszystkich obiektow, ktore sa czerwonymi kwadratami) i pojecie to jest wlasnie pojeciem elementarnym w tej bazie wiedzy. Pojecia elementarne sa jak gdyby najmniejszymi pojeciami ktorych mozemy uzywac do opisu naszego swiata (uniwersum). Rodzina wszystkich pojec elementarnych $U/\cap$ **R** jest oczywiscie wiedza o U, i bedziemy ja nazywac *wiedza elemenetarna*. Dla uproszczenia rowniez zbior relacji rownowaznosci **R** bedziemy nazywac wiedza o U.

Jezeli pojecie X w bazie wiedzy K jest suma teorio-mnogosciowa pojec elementarnych bazy wiedzy K, to pojecie X bedziemy nazywali *pojeciem definiowalnym* w bazie wiedzy K; w przeciwnym wypadku pojecie X jest *niedefiniowalne* w K. Zauwazmy, ze jezeli X i Y sa pojeciami definiowalnymi w bazie wiedzy K, to ich iloczyn i suma teorio-mnogosciowa, a takze uzupelnienie sa rowniez pojeciami definiowalnymi w tej bazie wiedzy. Pojecia elementarne moga byc wiec przyrownane do cegielek (atomow) z ktorych sklada sie kazde pojecie definiowalne w danej bazie wiedzy. Tak wiec rodzina podzialow, lub rodzina relacji ronowaznosci, wyznacza jednoznacznie zbior pojec elementarnych danej bazy wiedzy, a tym samym zbior wszystkich pojec definiowalnych tej bazy, tj. wszystkiego tego co moze byc w tej bazie wiedzy wyrazone. Zbior pojec elementarnych moze byc wiec uwazany za jednoznaczna charakterystyke kazdej bazy wiedzy.

Wprowadzone pojecia wiedzy i bazy wiedzy pozwalaja na scisle i proste definiowanie wielu waznych aspektow wiedzy, z ktorych kilka przykladowo podajemy ponizej.

Powiemy, ze baza wiedzy $K = (U, \mathbf{Q})$ jest *rownowazna* bazie wiedzy $K' = (U, \mathbf{R})$, jezeli $U/\cap \mathbf{Q} = U/\cap \mathbf{R}$, tzn. jezeli zbiory pojec elementarnych bazy wiedzy K oraz K' sa identyczne. Znaczy to, ze bazy wiedzy K i K' rownowazne, gdy posiadaja one taki sam zbior pojec elementarnych (atomowych), a w konsekwencji - taki sam zbior pojec definiowalnych. Mowiac inaczej, jezeli bazy wiedzy K i K' sa rownowazne to zawieraja one taka sama wiedze o uniwersum U.

Mozemy rowniez latwo zdefiniowac, uzywajac wprowadzonego formalizmu, pojecia wiedzy ogolniejszej i bardziej szczegolowej.

Powiemy, ze wiedza **Q** jest *ogolniejsza* od wiedzy **R** (lub, ze wiedza **R** jest *bardziej szczegolowa* od wiedzy **Q**) gdy $\cap \mathbf{R} \subseteq \cap \mathbf{Q}$, tzn. kazda klasa abstrakcji relacji $\cap$ **R** jest zawarta w jakiejs klasie abstrakcji relacji $\cap$ **Q**; mozemy tez powiedziec, ze wiedza **Q** jest *uogolnieniem* wiedzy **R**, a wiedza **R** jest *uszczegolnieniem* wiedzy **Q**. Mowiac jeszcze inaczej wiedza **Q** jest ogolniejsza od wiedzy **R**, gdy kazde pojecie wiedzy **Q** jest pewna kombinacja pojec wiedzy **R**. A wiec wiedza bardziej szczegolowa (ogolniejsza) posiada bardziej szczegolowe (ogolne) pojecia. Np. jezeli w jakiejs bazie wiedzy mamy pojecie koloru czewonego, zas w innej bazie wiedzy mamy pojecia wielu odcieni czerwieni, to pierwsza wiedza jest ogolniejsza od drugiej, natomiast druga - jest bardziej szczegolwa od pierwszej.

Przyjeta definicja wiedzy oraz bazy wiedzy, jest wiec naturalna i pozwala na latwe definiowanie interesujacych nas wlasnosci wiedzy.

3. Reprezentacja Wiedzy

Poniewaz w proponowanym ujeciu wiedza jest, z fromalnego punktu wiedzenia, systemem relacyjnym, scislej zbiorem relacji rownowaznosci, powstaje pytanie jak taki zbior mozna wygodnie reprezentowac w pamieci komputera. Istnieje do tego celu bogaty arsenał srodkow. Mozna tu np. zastosowac rachunek predykatow, ktory na pierwszy rzut oka wydaje sie najbardziej naturalny do tego celu. Tak jednakze nie jest. Zaproponujemy tu formalizm, ktory jest znacznie wygodniejszy niz rachunek predykatow do reprezentowania relacji rownowaznosci w komputerze - mianowicie zbior relacji rownowznosci bedziemy przedstawiac w postaci tablicy, ktorej wiersze sa indeksowane obiektami, kolumny - *atrybutami*, zas elementami tablicy sa *wartości atrybutów*. Kazdej obiektowi i atrybutowi jest jednoznacznie przyporzadkowana w tablicy wartosc atrybutu w ten sposób, ze wartosc ta reprezentuje własnosc tego obiektu dla danego atrybutu. Np. jezeli obiektem jest KOWALSKI, atrybutem zas WIEK, to wartoscia tego atrybutu dla obiektu KOWALSKI moze byc np, MŁODY. Tablice takie nosza nazwe systemow informacyjnych, tablic kontygencji, tablic "atrybut-wartosc" i inne. My bedziemy je nazywac *systemem reprezentacji wiedzy.*

Prosty przykład takiej tablicy podany jest nizej.

U	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
1	1	0	2	2	0
2	0	1	1	1	2
3	2	0	0	1	1
4	1	1	0	2	2
5	1	0	2	0	1
6	2	2	0	1	1
7	2	1	1	1	2
8	0	1	1	0	1

Tablic 1

W tablicy tej, dla uproszczenia obiekty i wartosci atrybutow sa reprezentowane liczbami, atrybuty zas - literami *a, b, c* itp.

Łatwo zauwazyc, ze kazdy atrybut wyznacza pewna relacje rownowaznosci okreslona na obiektach tablicy. Do jednej klasy abstrakcji danej realcji rownowaznosci naleza wszystkie obiekty majace takie same wartosci atrybutow. Np. atrybut *a* wyznacza relacje rownowaznosci o nastpujacych klasach abtsrakcji

$\{2, 8\}, \{1, 4, 5\}, \{3, 6, 7\}$,

zas atrybut *b* definiuje relacje o klasach abstrakcji jak nizej

$\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 7, 8\}, \{6\}$.

Oczywiscie kazdy podzbior atrybutow rowniez wyznacza pewna realcje rownowaznosci. Np. podzbior atrybutow $\{c, d\}$ wyznacza relacje rownowaznosci o nastpujacych klasach abstrakcji

$\{1\}, \{3, 6\}, \{2, 7\}, \{4\}, \{5\}, \{8\}$,

natomaist podzbior atrybutow $\{a, b, c\}$ wyznacza relacje rownowaznosci o klasach abstarkcji podanych nizej:

$\{1, 5\}, \{2, 8\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}$.

Kazda wiec taka tablice mozna uwazac za zapis formalny pewnego zbioru relacji rownowaznosci. Atrybuty mozna wtedy uwazac za nazwy relacji rownowaznosci wystepujacych w systemie, zas wartosci atrybutow - za nazwy klas abstrakcji danej relacji.

Odwrotnie, dla kazdego systemu relacyjnego (bazy wiedzy, czyli zbioru relacji rownowaznosci) mozna podac tablice, taka jak to pokazano wyzej, ktora ten system reprezentuje. Zauwazmy, ze taka operacja nie jest jednoznaczna. Kazdej bazie wiedzy mozna przyporzadkowac wiele tablic, rozniacych sie nazwami atrybutow i nazwami wartosci atrybutow. Jezeli te roznice uznamy za nieistotne, to rowniez i ta operacja bedzie jednoznaczna. Tak wiec zamiast mowic o relacjach rownowaznosci (wiedzy) mozemy, przy przyjetym sposobie reprezentacji wiedzy, mowic o danych zawartych w tablicy - co ma bardzo duze praktyczne znaczenie z algorytmicznego punktu widzenia, pozwala bowiem na proste sformulowanie wielu podstawowch algortmow zwiazanych z analiza wiedzy zawartej w bazie wiedzy. Baze wiedzy mozna uwazac za twor semantyczny, zas odpowiadajacy jej system reprezentacji wiedzy za - koncept syntaktyczny. Jezeli $K = (U, \mathbf{R})$ jest baza wiedzy, to odpowiadajacy jej system reprezentacji oznaczymy $S_K = (U, A)$, lub krocej $S = (U, A)$, gdy K jest znane i gdzie A jest zbiorem atrybutow reprezentujacych relacje ze zbioru **R**.

Z kazdym atrybutem $a \in A$ mozemy oprocz relacji rownowaznosci zwiazac rowniez funkcje calkowita $[a]$: $U \to V_a$, gdzie V_a jest zbiorem wartosci atrybutu a, i zwany jest *dziedzina* atrybutu a - taka ze $[a](x) \in V_a$ dla kazdego $x \in U$ oraz $a \in A$. W dalszym ciagu wszedzie tam gdzie to nie bedzie prowadzic do nieporozumien zamiast $[a]$ bedziemu pisac a. Funkcja ta jest wygodna do definiowania wielu pojec dotyczacych reprezenatcji wiedzy.

Uzywajac wprowadzonego wyzej pojecia funkcji mozemy teraz latwo podac nastepujaca definicje.

Niech $S = (U, A)$ bedzie systemem reprezenatcji wiedzy i niech $B \subseteq A$. Relacje rownowaznosci generowana przez zbior atrybutow $B \subseteq A$ - oznaczymy przez $IND\ (B)$ i zdefiniujejmy nastepujaco:

$$IND(B) = \{(x,y) \in U^2\text{: dla kazdego } a \in B,\ a(x) = a(y)\}$$

oczywiscie

$$IND\ (B) = \bigcap_{a \in B} IND\ (a),$$

oraz

$$[x]_{IND\ (B)} = \bigcap_{a \in B} [x]_{IND\ (a)}$$

gdzie $[x]_\rho$ ozancza klase abstrakcji relacji ρ zawierajaca obiekt x.

Mozemy teraz zamiast uzywac pojecia zbioru relacji, poslugiwac sie pojeciem systemu reprezentacji wiedzy tj. poprostu tablica danych - i wszystkie interesujace nas problemy i wlasnosci zwiazane z wiedza wsylawiac dalej w terminach danych zawartych w tablicy.

4. Pojecia Nieostre, Zbiory Przyblizone

Majac ustalony sposob reprezentacji wiedzy mozemy obecnie przystapic do analizy intersujacyh nas problemow. Jednym z glownych zagadanien, ktorymi bedziemy sie tu zajmowac to sprawa nieostrosci pojec a w konsewkencji - niedokladnosci wiedzy.

Pojecia moga byc ostre lub nieostre. Na przyklad pojcie *liczby parzystej* jest ostre, gdyz o kazdej liczbie naturalnej mozemy jednoznacznie powiedziec czy jest parzysta czy tez nie, natomaist pojecie *pięknej kobiety* jest niesotre, gdyz nie o kazdej kobiecie mozemy powiedziec czy jest piekna czy tez nie. O niektorych kobietach mozemy stwierdzic jednoznacznie, ze sa piekne - ale moga istniec kobiety ktorych nie potrafimy jednoznacznie zakwalifikowac jako piekne czy tez nie. Niemozliwosc rozstrzygniecia niektorych przypadkow nie wynika z naszego braku wiedzy na okreslony temat, lecz jest zwiazana z istota nieprecyzyjnosci pojec, i zwiekszanie wiedzy na ich temat nie zmienia tu sprawy. Jak wspomniano we wstepie problematyka niesotrosci pojec interesowala od dawna filozofow, logikow, lingwistow - a ostatnio bardzo intensywnie zajeli sie tym zagadnieniem rowniez informatycy, a scislej badacze zajmujacy sie sztuczna inteligencja.

Wspolczesna matematyka (scislej teoria mnogosci) pozwala na operowanie jedynie pojeciami ostrymi, natomiast pojecia nieostre nie moga byc traktowane metodami teorii mnogosci.

Istnieje wiele podejsc teoretycznych do tego zagadnienia, ktorych z uwagi na obszernosc tego tematu nie bedziemy tu referowac, a zwrocimy jedynie uwge na kierunek, ktory nieostrosc pojec wiaze z istnieniem tzw. obszaru granicznego (*booundary-line region*), tj. przypadkow ktore z racji swej istoty nie moga byc prawidlowo zaklasyfikowane, niezaleznie od wiedzy, ktora na ich temat posiadamy. Pierwszy, ktory zwrocil uwage na nieostrosc pojec byl filozof i logik niemiecki, tworca wspolczesnej logiki, Gotlob Frege (patrz **Frege (1904)**). Pisze on:

The concept must have a sharp boundary. The concept without a sharp boundary there would correspond an area that had not a sharp boundary-line all around.

Teoria zbiorow przyblizonych nawiazuje do tej idei i moze byc uwazana za pewna jej formalizacje. Podstawowym pomyslem jest tutaj zastapienie nieprecyzyjnego pojecia para pojec precyzyjnych, zwanych dolnym i gornym przyblizeniem tego pojecia. Np. dolnym przyblizeniem pojecia *piękna kobieta* jest zbior wszystkich tych kobiet, ktore bez watpienia sa piekne, natomiast gornym przyblizeniem tego pojecia bedzie zbior tych wszystkich kobiet, ktorych nie mozna wykluczyc, ze sa piekne. Roznica miedzy gornym i dolnym przyblizeniem jest wlasnie tym obszarem granicznym, do ktorego naleza wszystkie przypadki, ktore nie moga byc prawidlowo zaklasyfikowane, na podstawie aktualnej wiedzy. Dolne i gorne przyblizenie pojecia nieostrego sa pojeciami dokladnymi, tak ze mozna do nich stosowac metody klasycznej teorii mnogosci. Im wiekszy obszar graniczny pojecia tym bardziej jest ono nieostre (nieprecyzyjne, nieokreslone). Oczywiscie pojecia precyzyjne maja obszar graniczny pusty, tzn. kazdy przypadek w takim przypadku moze byc prawidlowo zaklasyfikowany.

Podane wyżej rozważania sformułujemy obecnie we wprowadzonym w poprzedniej sekcji języku. W tym celu wprowadzimy idee przybliżenia jednego pojęcia przez inne pojęcie (tj. przybliżania jednych zbiorów przez inne zbiory). W tym celu wprowadzimy nastepujące definicje.

Niech $S = (U, A)$ będzie systemem reprezenatcji wiedzy, oraz $B \subseteq A$. Przez *dolne B-przybliżenie X w S* bedzięmy rozumieli zbiór

$$\underline{B}X = \bigcup\{Y \in U/IND\ (B):\ Y \subseteq X\}$$

zas przez *górne B-przybliżenie X w S* - zbiór

$$\bar{B}X = \bigcup\{Y \in U/IND\ (B):\ Y \cap X \neq \emptyset\}.$$

Dolne przybliżenie pojęcia jest więc sumą teorio-mnogościową wszystkich tych pojęć elementarnych, ktorę są w nim zawarte, zas górne przybliżenie - jest sumą tych wszystkich pojęć elementarnych które mają niepuste przecięcie z danym pojęciem.

Różnica między górnym a dolnym przybliżeniem jest brzegiem pojęcia. Prowadzi to do nastepującej definicji.

B-brzegiem pojęcia X w S, nazwiemy zbiór $BN_B(X) = \bar{B}X - \underline{B}X$.

Bedzięmy używac następującej terminologii. Jezli $x \in \underline{B}X$ - powiemy, że x jest *pozytywnym przykładem* (*reprezentantem*) pojęcia X; jeżeli $x \in U - \bar{B}X = NEG_B(X)$ - powiemy, że x jest *negatywnym przykładem* (*reprezentantem*) pojęcia X; jezeli $x \in BN_B(X)$, to x będziemy nazywać *brzegowym przykładem* (*reprezentantem*) pojęcia X. Wprowadzimy ponadto następujace terminy: $\underline{B}X = POS_B(X)$ - *obszar pozytywny* X, $NEG_B(X)$ - *obszar negatywny* X, oraz $BN_B(X)$ - *obszar brzegowy* (lub krócej - *brzeg*) X.

Dolne przybliżenie pojęcia jest to więc pojęcie (dokładne) do którego należą wszystkie obiekty co do których nie ma watpliwości, że są one reprezentantami tego pojęcia w świetle posiadanej wiedzy. Do górnego przybliżenia należa obiekty, których nie można wykluczyć, że są reprezentantmi tego pojęcia przy posiadanej wiedzy. Brzegiem zas pojęcia są wszystkie te obiekty o ktorych nie wiadomo, na podstawie posiadanej wiedzy, czy są one czy też nie reprezentantami danego pojęcia.

Oczywiście pojęcie jest definiowalne w danym systemie reprezenatcji wiedzy tylko wtedy gdy jego obszar brzegowy jest pusty, lub innymi słowy, gdy jego dolne i górne przybliżenia są identyczne. Oczywiście im wiekszy jest obszar brzegowy pojęcia tym bardziej jest ono nieostre.

Tak więc pojęcia ostre (dokładne) w danej bazie wiedzy, to tylko te pojęcia, które są suma teorio-mnogościową pojęć elementarnych (atomowych) w tej bazie wiedzy. Wszystkie inne pojęcia są pojęciami nieostrymi. Pojęcia ostre (w danej bazie wiedzy) są to więc pojęcia, które można wyrazić przy pomocy pojęc elementarnych intersującej nas bazy wiedzy. Oczywiście dane pojęcie może być dokładne w jednej bazie wiedzy a niedokładne w innej.

Dla dokładniejszego scharakteryzowania nieostrości pojęć wprowadzimy dwie metody ścisłego jej określania. Pierwsza będzie miala charakter numeryczny, druga zas topologiczny.

Dla numerycznego scharakteryzowania nieostrości pojeć wprowadzimy nastepujaca miare

$$\alpha_R(X) = \frac{card\ \underline{R}X}{card\ \bar{R}X}$$

gdzie $X \neq \emptyset$ oraz $R \in A$, która bedziemy nazywać *współczynnikiem dokładności* pojecia X w systemie reprezentacji wiedzy $S = (U, R)$ (lub bazie wiedzy $K = (U, IND\ (R))$, lub krótko - *współczynnikiem dokładności X.*

Oczywiście $0 \leq \alpha_R(X) \leq 1$. Jeżeli wiec $\alpha_R(X) = 0$, to pojecie X jest całkowicie nieostre i jego własności nie moga być wyrażone za pomoca zbioru atrybutów R (wiedzy $IND\ (R)$); jeżeli $\alpha_R(X) = 1$, to pojecie jest ostre i jego własności moga być w pełni wyrażone za pomoca zbioru atrybutów R, natomiast w przypadku gdy $0 < \alpha_R(X)$ 1 pojecie jest również nieostre i jego własności moga być cześciowo wyrażone przy pomocy zbioru atrybutów R (wiedzy $IND\ (R)$).

Zilustrujmy powyższe rozważania nastepujacym przykładem. Przyjmijmy system reprezenatcji wiedzy jak pokazano w Tablicy 2.

U	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
1	1	0	2	2	0
2	0	1	1	1	2
3	2	0	0	1	1
4	1	0	2	2	0
5	0	1	1	1	2
6	2	2	0	1	1
7	0	1	1	1	2
8	1	0	2	2	0

Tablica 2

W systemie tym mamy nastepujce pojecia elementarne:

$$E_1 = \{x_1, x_4, x_8\}$$
$$E_2 = \{x_2, x_5, x_7\}$$
$$E_3 = \{x_3\}$$
$$E_4 = \{x_6\}$$

Przyjmijmy ponadto nastepujace pojecia

$$X_1 = \{x_1, x_4, x_5\}$$
$$X_2 = \{x_3, x_5\}$$

$$X_3 = \{x_3, x_6, x_8\}$$

i sprawdzmy czy pojecia te sa ostre. W tym celu nalezy policzyc dolne i gorne przyblizenia tych pojec oraz ich wspolczynniki dokladnosci. Wyniki tych obliczen podane sa ponizej, gdzie $R = \{a, b, c, d, e\}$.

$$\underline{R}X_1 = \emptyset$$

$$\bar{R}X_1 = E_1 \cup E_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_8\}$$

$$BN_R(X_1) = E_1 \cup E_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_8\}$$

$$NEG_R(X_1) = E_3 \cup E_4 = \{x_3, x_6\}$$

$$\alpha_R(X_1) = 0/6 = 0$$

$$\underline{R}X_2 = E_3 = \{x_3\}$$
$$\bar{R}X_2 = E_2 \cup E_3 = \{x_2, x_3, x_5, x_7\}$$
$$BN_R(X_2) = E_2 = \{x_2, x_5, x_7\}$$
$$NEG_R(X_2) = E_1 \cup E_4 = \{x_1, x_4, x_6, x_8\}$$
$$\alpha_R(X_2) = 1/4$$

$$\underline{R}X_3 = E_3 \cup E_4 = \{x_3, x_6\}$$
$$\bar{R}X_3 = E_1 \cup E_3 \cup E_4 = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_8\}$$
$$BN_R(X_3) = E_1 = \{x_1, x_4, x_8$$
$$NEG_R(X_3) = E_2 = \{x_2, x_5, x_7\}$$
$$\alpha_R(X_3) = 2/5$$

Dla ilustracji podalismy rowniez obszary brzegowe oraz obszary negatywne tych pojec. A wiec zadne z rozpatrywanych pojec nie jest ostre.

Zwrocmy uwage, ze wspolczynnik dokladnosci pojec nie jest przyjmowany dowolnie, jak to ma miejsce np. w zbiorach rozmytych, a jest obliczany na podstawie danych wystepujacych w systemie reperezenatcji wiedzy.

Numeryczna charakteryzacja nieostrosci pojec nie daje pelnej informacji o charakterze nieostrosci pojecia dlatego podamy jeszcze jeden spsosob charakteryzacji nieostrosci, ktory bedziemy nazywali topologicznym. Okazuje sie mianowicie, ze przy przyjetej definicji wiedzy istnieja cztery naturalne rodzaje nieostrych pojec, ktore zdefiniowane sa ponizej.

Niech X bedzie pojeciem nieostrym w $S = (U, A)$ oraz $R \subseteq A$.

a) Jeżeli $\underline{R}X \neq \emptyset$ oraz $\overline{R}X \neq U$, to X jest w *przybliżeniu R-definiowalne*

b) Jeżeli $\underline{R}X = \emptyset$ oraz $\overline{R}X \neq U$, to X jest *wewnętrznie R-niedefiniowalne*

c) Jeżeli $\underline{R}X \neq \emptyset$ oraz $\overline{R}X = U$, to X jest *zewnętrznie -niedefiniowalne*

d) Jeżeli $\underline{R}X = \emptyset$ oraz $\overline{R}X = U$, to X jest *całkowicie R-niedefiniowalne.*

Znaczenie tych definicji jest nastepujace.

Jeżeli pojecie X jest w przybliżeniu R-definiowalne znaczy to, że przy pomocy zbioru atrybutów R (wiedzy *IND* (R)) można określić pozytywne i negatywne przykłady pojecia X, ale istnieje również pewien obszar brzegowy tego pojecia.

Jeżeli pojecie X jest wewnetrznie R-niedefiniowalne nie można przy pomocy zbioru atrybutów R (wiedzy *IND* (R)) zdefiniować pozytywnych przykładów pojecia X.

Jeżeli pojecie X jest zewnetrznie R-niedefiniowalne nie można przy pomocy zbioru atrybutów R (wiedzy *IND*(R)) zdefinować negatywnych przykładów pojecia X.

Jeżeli pojecie X jest całkowicie R-niedefiniowalne nie można w opraciu o zbiór atrybutów R (wiedze *IND* (R)) zdefiniować ani przykładów pozytywnych ani negatywnych pojecia X.

Jest to bardzo ważna klasyfikacja pojeć nieostrych, mówi ona bowiem jak wiaże sie wiedza z możliwoscia określania pewnych pojeć. Np. gdybysmy chcieli przy pomocy odpowiednich symptomów określić jakaś chorobe mogłoby sie okazać, że jest to niemożliwe. Mogłoby sie również zdarzyć np. że dany zestaw symptomów pozwala scharakteryzować osoby które napewno nie sa chore na określona chorobe, natomiast nie pozwalaja one dobrze określić ludzi chorych (badz odwrotnie). Intuicyjnie wiaże sie to faktem, że pojeć niesotrych nie obowiazuje klasyczna logika a w szczególności klasyczna negacja.

Poniższy przykład obliczeniowy jest dokładniejsza ilustarcja powyższych rozważań.

Przyjmijmy system reprezentacji wiedzy jak podano w Tablicy 3.

U	a	b	c	d
0	1	0	2	0
1	1	0	2	0
2	2	0	0	1
3	0	1	1	1
4	2	1	0	0
5	0	1	1	1
6	2	0	0	1
7	0	0	2	1
8	2	1	0	0
9	2	0	0	1
10	0	0	2	1

Tablica 3

W systemie tym mamy nastepujce zbiory elementarane:

$$E_1 = \{x_0, x_1\}$$

$$E_2 = \{x_2, x_6, x_9\}$$

$$E_3 = \{x_3, x_6\}$$

$$E_4 = \{x_4, x_8\}$$

$$E = \{x_7, x_{10}\}.$$

Nastepujce zbiory

$$X_1 = \{x_0, x_1, x_4, x_8\}$$

$$Y_1 = \{x_3, x_4, x_5, x_8\}$$

$$Z_1 = \{x_2, x_3, x_5, x_6, x_9\}$$

sa zbiorami definiowalnymi w tym systemie reprezentacji wiedzy. Natomiast zbiory

$$X2 = \{x_0, x_3, x_4, x_5, x_8, x_{10}\}$$

$$Y2 = \{x_1, x_7, x_8, x_{10}\}$$

$$Z2 = \{x_2, x_3, x_4, x_8\}$$

sa zbiorami w przyblizeniu definiowalnymi w tym systemie. Poniezej podano przyblizenia i dokladnosci dla powyzszych zbiorow.

$$\underline{R}X_2 = E_3 \cup E_4 = \{x_3, x_4, x_5, x_8\}$$

$$\bar{R}X_2 = E_1 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 = \{x_0, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_{10}\}$$

$$BN_R(X_2) = E_1 \cup E_5 = \{x_0, x_1, x_7, x_{10}\}$$

$$\alpha_R(X_2) = 4/8 = 1/2$$

$$\underline{R}Y_2 = E_5 = \{x_7, x_{10}\}$$

$$\bar{R}Y_2 = E_1 \cup E_4 \cup E_5 = \{x_0, x_1, x_4, x_7, x_8, x_{10}\}$$

$$BN_R(Y_2) = E_1 \cup E_4 = \{x_4, x_7, x_8, x_{10}\}$$

$$\alpha_R(Y_2) = 2/6 = 1/3$$

$$\underline{R}Z_2 = E_4 = \{x_4, x_8\}$$

$$\bar{R}Z_2 = E_2 \cup E_3 \cup E_4 = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9\}$$

$$BN_R(Z_2) = E_2 \cup E_3 = \{x_2, x_3, x_5, x_6, x_9\}$$

$$\alpha_R(Z_2) = 2/7$$

Zbiory

$$X_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\}$$

$$Y_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8, x_9, x_{10}\}$$

$$Z_3 = \{x_0, x_2, x_3, x_4, x_8, x_{10}\}$$

sa przykladami wewnterznie niedefiniowalnych pojec w tym systemie a ich przyblizenia i dokladnosci sa nastepujace:

$$\underline{R}X_3 = E_1 = \{x_0, x_1\}$$

$$\overline{R}X_3 = U$$

$$BN_R(X_3) = E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$$

$$\alpha_R(X_3) = 2/11$$

$$\underline{R}Y_3 = E_2 = \{x_2, x_6, x_4\}$$

$$\overline{R}Y_3 = U$$

$$BN_R(Y_3) = E_1 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 = \{x_0, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_{10}\}$$

$$\alpha_R(Y_3) = 3/11$$

$$\underline{R}Z_3 = E_4 = \{x_4, x_8\}$$

$$\overline{R}Z_3 = U$$

$$BN_N(Z_3) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_5 = \{x_0, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}\}$$

$$\alpha_R(Z_3) = 2/11$$

Zbiory

$$X_4 = \{x_0, x_2, x_3\}$$

$$X_4 = \{x_1, x_2, x_4, x_7\}$$

$$Z_4 = \{x_2, x_3, x_4\}$$

sa przykladami pojec wewnetrznie niedefiniowalnych w tym systemie a wiec ich dolne przyblizenia sa puste, zas gorne przyblizenia podane sa nizej.

$$\bar{R}X_4 = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{x_0,x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_9\}$$

$$\bar{R}Y_4 = E_1 \cup E_2 \cup E_4 \cup E_7 = \{x_0,x_1,x_2,x_4,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\}$$

$$\bar{R}Z_4 = E_2 \cup E_3 \cup E_4 = \{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_8,x_9\}.$$

Powyzsze zbiory sa przykładami pojec całkowicie niedefiniowalnych w rozpatrywanym systemie reprezentacji wiedzy.

$$X_5 = \{x_0,x_2,x_3,x_4,x_7\}$$

$$Y_5 = \{x_1,x_5,x_6,x_8,x_{10}\}$$

$$Z_5 = \{x_0,x_2,x_4,x_5,x_7\}$$

Z podanych przykładow widac wyraznie, jak istotny wpływ na to co chcemy wyrazic ma dobor atrybutow (wiedzy). Jest to sprawa intuicyjnie oczywista, jednakze w zaproponowanym formalizmie mozna ja wyrazic scisle, a co waznieniejsze mozna na tej podstawie podac algortymy, ktore taka ocene moga robic automatycznie.

5. Redukcja Wiedzy

Zgodnie z przyjeta definicja wiedza jest zbiorem pojec. Kazda baza wiedzy jest natomiast jednoznacznie okreslona przez jej zbior pojec elementarnych, ktore sa zdefiniowane na podstawie pojec podstawowych wystepujacych w danej bazie wiedzy. Moze sie wiec okazac, ze nie wszystkie pojecia podstawowe sa potrzebne do zdefiniowania wszystkich pojec elementarnych, okreslajacych dana baze wiedzy. Prowadzi to do pytania jak usunac z bazy wiedzy te pojecia, ktore sa zbedne z punktu widzenia ich przydatnosci do definiowania pojec elementarnych. Poniewaz pojecia elementarne wyznaczaja co mozna w danej bazie wiedzy wyrazic, wiec usuniecie wszystkich pojec zbednych nie uszczupla "mocy ekspresji" bazy wiedzy. Problem ten w naszym ujeciu sprowadza sie do eliminacji zbednych atrybutow w systemie reprezentacji wiedzy. W dalszym ciagu problem ten zdefinjujemy precyzyjniej.

Niech $S = (U, A)$ bedzie systemem reprezentacji wiedzy i niech $P \subseteq A$.

Powiemy, ze atrybut $a \in P$ jest *zbędny* w P, gdy $IND\ (P) = IND\ (P - \{a\})$; w przeciwnym wypadku atrybut a jest *niezbędny* w P.

Zbior atrybutow P jest *niezalezny* (w S), gdy kazdy atrybut nalezacy do P jest niezbedny w P.

Podzbior atrybutow $Q \subseteq P$ jest *reduktem zbioru atrybutow* P gdy

a) Zbior atrybutow Q jest niezalezny

oraz

b) $IND\ (P) = IND\ (Q)$.

Z definicji wynika, ze reduktem danego zbioru atrybutow jest taki jego mimalny podzbior, ktory zapewnia taki sam zbior pojec elementarnych, a wiec taka sama mozliwosc wyrazania własnosci uniwersum, jak oryginalny zbior atrybutow. Inaczej mowiac redukt daje dokładnie taka sama mozliwosc klasyfikacji obiektow uniwersum jak oryginalny zbior atrybutow.

Wprowadzimy jeszcze jedno wazne pojecie, w proponowanym podejsciu, a mianowicie pojecie *jadra* zbiory atrybutow P(wiedzy), ktore bedziemy oznaczali przez $CORE$ (P) i zdefinjujemy jako zbior wszystkich niezbednych atrybutow w zbiorze P. Istnieje wazny zwiazek miedzy pojeciem jadra a reduktu, ktory wyraza nastepujace twierdzenie:

$$CORE\ (P) = \cap \{RED\ (P)\},$$

gdzie RED (P) oznacza zbior wszystkich reduktow zbioru atrybutow P. Jadro zawiera wiec wiedze, ktora nie moze byc usunieta w zadnym procesie redukcji wiedzy, jest to wiec w jakims sensie najbardziej istotna czesc wiedzy. Oczywiscie jadro moze byc zbiorem pustym i wtedy takiej istotnej czesci wiedzy brak. Nastepujacy przykład słuzy do zilustrowania powyzszych pojec.

Przyjmijmy nastepujacy system reprezentacji wiedzy.

U	a	b	c	d	e
1	0	1	1	1	1
2	1	1	0	1	0
3	1	0	0	1	1
4	1	0	0	1	0
5	1	0	0	0	0
6	1	1	0	1	1

Tablica 4

Łatwo sparwdzic na podstawie wyzej podnych definicje, ze jadrem zbioru atrybutow $\{a, b, c, d, e\}$ jest zbior $\{b, d, e\}$ oraz, ze zbior ten ma dwa redukty $\{a, b, d, e\}$ oraz $\{b, c, d, e\}$. Znaczy to, ze zamiast Tablicy 3 mozemy rownowaznie uzywac jedna z ponizszych tablic

U	a	b	d	e
1	0	1	1	1
2	1	1	1	0
3	1	0	1	1
4	1	0	1	0
5	1	0	0	0
6	1	1	1	1

Tablica 5

U	b	c	d	e
1	1	1	1	1
2	1	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	0	1	0
5	0	0	0	0
6	1	0	1	1

Tablica 6

Zwrocmy uwage na roznice miedzy rownowaznymi bazami danych a rownowaznymi systemami reprezentacji wiedzy. Tablice 10 oraz 11 reprezentuja identyczne bazy wiedzy, tj. bazy wiedzy odpowiadajace obu tablicom maja identyczne zbiory pojec elementarnych. Inaczej mowiac kazda z powyzszych tablic wyznacza taki sam podzial uniwersum. Natomiast w obu tablicach wystepuja rozne nazwy zbiorow elementarnych, gdyz w obu tablicach wystepuja rozne zbiory atrybutow, a wiec w konsekwencji zbiory elementarne sa nazywane roznie. Roznica polega na wystepowaniu zamiennie w obu tablicach atrybutow a i c. Mamy wiec do wyboru jeden z powyzszch atrybutow do reprezentowania wiedzy. Ma to duze znaczenie praktyczne, gdyz pozwala uzywac jednych danych zamiast innych maja gwarancje, iz nie zmienia sie przez to wiedzy o uniwersum. Przykladowo, jezeli naszym uniwersum sa pacjenci w szpitalu i mozna ich opisac kilkoma rownowaznymi systemami reprezentacji wiedzy, pozwala to na dobor takich symptomow, ktore sa latwiej, lub taniej mierzalne czy osiagalne. Mozna wiec w takim przypadku mowic o optymalizacji systemu reprezenatcji wiedzy z uwagi na rozne kryteria.

6. Zaleznosci w Bazach Wiedzy

Glownym celem autonomicznego inteligentnego systemu jest szukanie zwiazkow (zaleznosci) miedzy obserwowanymi danymi. Chodzi tu oczywiscie o wykrywanie zwiazkow przyczynowo-skutkowych. Problem ten mozna sformulowac w zaproponowanym formalizmie w rozny sposob. W terminach pojec bazy wiedzy mozemy mowic np. o zaleznosci jednej wiedzy od innej. Intuicyjnie wiedza **Q** *zależy* od wiedzy **P**, gdy kazde pojecie wiedzy **Q** da sie wyrazic w terminach wiedzy **P**, lub rownowaznie - kazde pojecie elementarne wiedzy **Q** da sie wyrazic przy pomocy pojec elementarnych wiedzy **P**. "Da sie wyrazic" oznacza tu, ze jest ono poprostu suma teorio-mnogosciowa odpowiednich pojec. Intuicja ta prowadzi do bardzo prostej definicji formalnej zaleznosci.

Niech $K = (U, \mathbf{R})$, oraz $\mathbf{P},\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$.

Powiemy, ze wiedza **Q** zalezy od wiedzy **P**, symoblicznie $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ gdy $\cap \mathbf{P} \subseteq \cap \mathbf{Q}$, to znaczy kazda klasa abstrakcji relacji $\cap \mathbf{P}$ jest zawarta w jakiejs klasie abstrakcji relacji $\cap \mathbf{Q}$.

W terminach systemow reprezentacji wiedzy mozemy mowic zamiast o zaleznosci jednej wiedzy od innej, o zaleznosci atrybutow. Powyzsza definicja zaleznosci wiedzy przejmie wtedy posatc nastepujaca.

Niech $S = (U, A)$, oraz $P, Q \subseteq A$.

Powiemy, ze zbior atrybutow Q zalezy od zbioru atrybutow P, symolicznie $P \Rightarrow Q$, gdy $IND\ (P) \subseteq IND\ (Q)$.

Ta ostania definicja jest wygodniejsza od pierwszej ze wzgledow algorytmicznych, gdyz pozwala na operowanie atrybutami zamiast relacjami rownowaznosci. Nie bedziemy tu podawac szczegolowych algorytmow liczenia zaleznosci, a przytoczymy tylko jedno proste twierdzenie pozwalajace na latwe szukanie wszystkich zaleznosci w danym systemie reprezentacji wiedzy.

Jezeli P jest reduktem Q, to $P \Rightarrow Q - P$.

Jest to bardzo wazna wlasnosc, gdyz mowi ona jak znalezc wszystkie zaleznosci w systemie reprezentacji wiedzy. Nalezy poprostu najpierw policzyc wszystkie redukty a nastepnie na ich podstawie mozna juz otrzymac w prosty sposob wszystkie zalznosci w systemie. Ponizszy przyklad zilustruje ta idee dokladniej.

Rozpatrzmy system reprezentacji wiedzy jak podano w Tablicy 9. Poniewaz w tym systemie mamy dwa redukty $\{a, b, d, e\}$ oraz $\{b, c, d, e\}$ a wiec otrzymamy nastepujace zaleznosci: $\{a, b, d, e\} \Rightarrow \{c\}$ oraz $\{b, c, d, e\} \Rightarrow \{a\}$.

Problematyka zaleznosci jest znacznie bardziej zlozona, nie bedziemy jej jednakze tutaj blizej analizowac. Chcielismy jedynie pokazac, jak wprowadony formalizm pozwla na badanie tego problemu.

Literatura

Aikins, J. S. (1983). Prototypic a Knowledge for Expert Systems. *Artificial Intelligence*, **20**, pp. 163-210.

Airenti, G. and Colombetti, M. (1991). Artificial Inelligence and the Representation Problem. *Proceedings of the WOCFAI 91, First World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence, 1-5 July 1991, Paris, France, (Ed. Michel De Glas and Dov Gabbay).* pp. 17-28.

Bachimot, B. (1991). Artificial Intelligence as the Science of the Intentional: A Proposal. *Proceedings of the WOCFAI 91, First World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence, 1-5 July 1991, Paris, France, (Ed. Michel De Glas and Dov Gabbay).* pp. 57-71.

Ballmer, T. and Pinkal, M. (eds.) (1983). Approaching Vagueness. *North-Holland Linguistic Series.* Amsterdam, New York, Oxford.

Bersini, H. (1991). A Plea for a Subjective Animat. *Proceedings of the WOCFAI 91, First World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence, 1-5 July 1991, Paris, France, (Ed. Michel De Glas and Dov Gabbay).* pp. 93-105.

Black, M. (1937). Vagueness. *The Philosophy of Sciences.* pp. 427-455.

Black, M. (1963). Reasoning with Loose Concepts. *Dialog.* **2**, pp. 1-12.

Bobrow, D. G. (1977). A Panel on Knowledge Representation. *Proc. Fifth International Joint Conference on Artificial Intelligence, Carnegie-Melon University.* Pittsburgh, PA.

Bobrow, D. G, and Winograd, T. (1977). An Overview of KRL: A Knowledge Representation Language. *Journal of Cognitive Sciences*, **1**, pp. 3-46.

Brachman, R. J. and Smith, B. C. (1980). Special Issue of Knowledge Representation. *SIGART Newsletter*, **70**, pp. 1-138.

Brachman, R.J. and Levesque, H. J. (Ed.) (1986). Readings in Knowledge Representation, *Morgan Kaufmann Publishers, Inc.*

Buchanan, B. and Shortliffe, E. (19884). Rule Based Expert Systems. *Reading, Massachusetts:* Addison-Wesley.

Brachman, R. (1990). The Future of Knowledge Representation Systems. *Proceedings Eight National Conference on Artificial Intelligence,* Vol **2** pp. 1082-1092.

De Glas, M. (1991). Intuitionism and Knowledge Representation. *Proceedings of the WOCFAI 91, First World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence, 1-5 July 1991, Paris, France, (Ed. Michel De Glas and Dov Gabbay).* pp. 147-156.

Davis, R. and Lenat, D. (1982). Knowledge-Based Systems in Artificial Intelligence. *McGraw-Hill.*

Dubois, D. and Prade, H. (1988). Rough Fuzzy Sets and Fuzzy Rough Sets. *Internal Conference on Fuzzy Sets in Informatics, Moscow, September 20-23 and International Journal of General Systems.* (W druku)

Fine, K. (1975). Vagueness, Truth and Logic. *Synthese.* 30, pp. 265-300.

Frege, G., (1903). Grundgesetze der Arithmentik, **2**, *in Geach and Black (Ed.) Selections from the Philosophical Writings of Gotlob Frege, Blackweil (Oxford) 1970.*

Frixione, M. (1991). On the Relation between Philosophical Theories of Meaning and Artificial Intelligence. *Proceedings of the WOCFAI 91, First World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence, 1-5 July 1991, Paris, France, (Ed. Michel De Glas and Dov Gabbay).* pp. 187-198.

Grzymała-Busse, J. (1988). Knowledge Acquisition under Uncertainty - a Rough Set Approach. *Journal of Intelligent and Robotics Systems*, **1**, pp. 3-16.

Gabbay, D.M. (1984). Theoretical Foundation for Non-monotonic Reasoning in Expert Systems. *Logic and Models of Concuren Systems.* Springer Verlag, Berlin, pp. 439-459.

Halpern, J. (ed.) (1986). Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge. *Proceedings of the 1986 Conference.* Morgan Kaufman, Los Altos, California.

Hayes-Roth, B. and McDermott, J. (1978). An Inference Matching for Inducing Abstraction. *Communication of the ACM*, **21**, pp. 401-410.

Hempel, C. G. (1952). Fundamental of Concept Formation in Empirical Sciences. *University of Chicago Press.* Chicago.

Hintika, J. (1962). Knowledge and Belief. *Cornell University Press.* Chicago.

Holland, J. H., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E. and Thagard, P. R. (1986). Induction: Processes of Inference, Learning, and Discovery. *MIT Press.*

Hunt, E. B. (1974). Concept Formation. *John Wiley and Sons.* New York.

Hunt, E. D., Marin, J. and Stone, P. J. (1966). Experiments in Inductions. *Academic Press.* New York.

Israeli, D. (1983). The Role of Logic in Knowledge Representation. *IEEE Computer, October* pp. 37-41.

Kerber, M. (1991). On the Representation of Mathematical Knowledge in Frames and its Consistency. *Proceedings of the WOCFAI 91, First World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence, 1-5 July 1991, Paris, France, (Ed. Michel De Glas and Dov Gabbay).* pp. 293-301.

Kohl, M. (1969). Bertrand Russell on Vagueness. *Australian Journal of Philosophy.* **147**, pp. 31-41.

Kripke, S. (1971). Semantical Considerations on Modal Logic. *Reference and Modality,* (Ed. L.Linsky). Oxford Univ. Press, London, pp. 63-72.

Krish, D. (1991). (Editor), Special Volume on "Foundations of Artificial Intelligence". *Artificial Intelligence* **47**, pp. 1-3.

McCarthy, J. (1981). Epistomological Problems of Artificial Intelligence. *Readings in Artificial Intelligence.* (Ed. Bonnie Lynn Weber, Nils J. Nilsson), Morgan Kaufman Publishers, Inc, pp. 459-465.

McCarthy, J. (1986). Applications of Circumscription to Formalizing Common-sence Knowledge. *Artificial Intelligence,* **28**, pp. 89-116.

McDermott, D. (1978). The Last Survey of Representation of Knowledge. *Proc. of the AISB/GI Conference on AI.* Hamburg, pp. 286-221.

Minski, M. (1975). A Framework for Representation Knowledge. *In: Winston, P.(ed.) The Psychology of Computer Vision. McGraw-Hill.* New York, pp. 211-277.

Newell, A. (1982). The Knowledge Level. *Artificial Intelligence,* **18**, pp. 87-127.

Orlowska, E. (1989). Logic for Reasoning about Knowledge. *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.,* **35**, pp. 559-572.

Orlowska, E. and Pawlak, Z. (1984a). Expressive Power of Knowledge Representation Systems. *International Journal of Man-Machine Studies,* **20**, pp. 485-500.

Orlowska, E. and Pawlak, Z. (1984b). Logical Foundations of Knowledge Representation. *Institure of Computer Science, Polish Academy of Science, Reports,* **537**, pp. 1-106.

Pawlak, Z. (1982). Rough Sets. *International Journal of Computer and Information Sciences,* **11**, pp. 341-356.

Pawlak, Z. (1991). Rough Sets - Theoretical Aspects of Reasoning about Data. *Kluwer Academic Publishers.*

Popper, K. (1959). The Logic of Scientific Discovery. London: Hutchinson.

Russel, B. (1923). Vagueness. *Australian Journal of Philosophy,* **1**, pp. 84-92.

Russell, B. (1950). An Inquiry into Meaning and Truth. *George Allen and Unwin,* London.

Slowinski, R., Ed. (1992). Intelligent Decision Support - *Habdbook of Applications and Advances of the Rough sets Theory. Kluwer Academic Publishers.*

Vakarelov, D.(1987). Abstract Characterization of Some Modal Knowledge Representation Systems and the Logic NIL of Nondeterministic Information.In: *Jorraud, Ph. and Squrev, V. (ed.) Artificial Intelligence II, Methodology, Systems, Applications.* North Holland.

Vakarelov, D. (1989). Modal Logic of Knowledge Representation Systems. *Lecture Notes on Computer Science,* Springer Veralg, **363**, pp. 257-277.

Vakarelov, D. (1991). Logical Analysis of Positive and Negative Similarity Relations in Property Systems. *Proceedings of the WOCFAI 91, First World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence, 1-5 July 1991, Paris, France, (Ed. Michel De Glas and Dov Gabbay).* pp. 491-500.

Wasilewska, A. (1987). Definable Sets in Knowledge Representation Systems. *Bull.*

Polish Acad. Sci. Math., **35**, pp. 629-635.

Wasilewska, A. (1988). Knowledge Representation Systems - Syntactic Methods. *Proc.IPMU-88 Conference, Springer Verlag, Lecture Notes on Computer Science*, **313**, pp. 239-254.

Wille, R. (1982). Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts. *In: I.Rival (Ed.), Ordered Sets, Reidel,* Dordrecht - Boston, pp. 445-470.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control.* **8**, pp. 338-353.

Ziarko, W. (1987). On Reduction of Knowledge Representation. *Proc. 2-nd International Symp.on Methodologies of for Intelligent Systems.* Charlotte, NC. North Holland, pp. 99-113.

Recently published Research Reports
of the Institute of Computer Science, W.U.T.

11/92	Zdzisław Pawlak, Anatomy of Conflicts, May 1992.
12/92	Cecylia M. Rauszer, Knowledge Representation Systems for Groups of Agents, May 1992.
13/92	Zdzisław Pawlak, Rough Sets - Basic Concepts, June 1992.
14/92	Konstanty J. Kurman, Wiktor B. Daszczuk, Jerzy Mieścicki, Projektowanie jednowymiarowych układów automatycznej regulacji przy użyciu systemu KURMAN, lipiec 1992.
15/92	Zdzisław Pawlak, Concurrent Versus Sequential the Rough Sets Perspective, July 1992.
16/92	Falk Tannhäuser, Generowanie Reduktów, lipiec 1992.
17/92	Andrzej Skowron, Jarosław Stepaniuk, Intelligent Systems Based on Rough Set Approach, May 1992.
18/92	Zdzisław Pawlak, Rough Sets and Their Applications, September 1992.
19/92	Jerzy Mieścicki, Boolean expressions and the families of sets, September 1992.
20/92	Jerzy Mieścicki, On the behavior of a system of concurrent automata, September 1992.
21/92	Piotr K. Sapiecha, An Approximation Algorithm for a Certain Class of NP-Hard Problems, May 1992.
22/92	Cecylia M. Rauszer, Distributive Knowledge Representation Systems, September 1992.
23/92	Zdzisław Pawlak, Wiedza z Perspektywy Zbiorów Przybliżonych, October 1992.