[7] A. Robinson, *Non-standard analysis*, Amsterdam 1966.
[8] L. Schwartz, *Extension du théorème de Sazonov-Minlos à des cas non hilbertiens*, C. R. Paris, 265, seria A (1967), str. 832-834.
[9] J. P. Serre, *Endomorphismes complètement continues des espaces de Banach p-adiques*, Publ. Math. I.H.E.S. 12 (1962), str. 69-85.
[10] H. Steinhaus, *Additive und stetige Funktionaloperationen*, Math. Z. 5 (1919), str. 186-221.

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XII (1969)

ZDZISŁAW PAWLAK (Warszawa)

Maszyny matematyczne

1. Jednocześnie z 50-leciem PTM mija 25-lecie istnienia elektronicznych maszyn cyfrowych oraz 20-lecie rozpoczęcia badań w tej dziedzinie w Polsce.

W 1949 r. ówczesny Państwowy Instytut Matematyczny zainicjował prace, których celem było zbudowanie pierwszej w kraju elektronicznej maszyny cyfrowej, wzorowanej na jedynej wówczas tego rodzaju maszynie na świecie. Maszyny tej nie ukończono, jednakże prace nad jej konstrukcją odegrały pozytywną rolę w rozwoju tej dyscypliny w kraju. Umożliwiły one bowiem znacznej grupie ludzi gruntowne zapoznanie się z problematyką maszyn cyfrowych nie na podstawie literatury, lecz bezpośrednio przez zetknięcie się z trudnościami powstającymi w trakcie budowy maszyny.

W ciągu tych 25 lat w maszynach matematycznych dokonano ogromnego postępu. Dla ilustracji, szybkość liczenia w tym czasie wzrosła około 10^5 razy (pierwsza maszyna elektroniczna wykonywała 10^4 operacji arytmetycznych na sekundę, zaś szybkość współczesnych maszyn dochodzi do 10^9 operacji na sekundę). Jednocześnie znacznie zmalały koszty produkcji maszyn. Np. koszt jednostkowy pamięci zmalał w tym okresie około 10^4 razy.

2. W rozwoju maszyn matematycznych dużą rolę odegrali matematycy A. Turing i J. von Neumann. Ich udział w tworzeniu koncepcji współczesnych maszyn jest tak duży, że do dziś nie stracił on aktualności. Co ciekawsze, ich zainteresowania maszynami nie ograniczały się jedynie do strony matematycznej. Obu tych matematyków głęboko interesowała również strona techniczna tego zagadnienia. Są oni autorami wielu rozwiązań technicznych oraz patentów dotyczących maszyn matematycznych. Trudno wprost uwierzyć, że dziś wielu początkujących matematyków piszących rozprawy na tematy maszyn jest dumnych z tego, że nie ułożyli oni w życiu żadnego programu i nie rozumieją kompletnie, jak działa rzeczywista maszyna cyfrowa.

Matematyka odgrywa istotną rolę w projektowaniu i zastosowaniach współczesnych maszyn matematycznych. Dlatego też ich konstruktorzy i użytkownicy w coraz większym stopniu zainteresowani są we współpracy z matematykami.

Historycznie najwcześniej związanymi z maszynami działami matematyki są metody numeryczne oraz algebra Boole'a. Znaczenie metod numerycznych dla maszyn jest oczywiste i nie wymaga komentarza. Algebra Boole'a w pierwszych latach rozwoju maszyn odgrywała rolę w ich projektowaniu. Dziś, w związku z dużym rozwojem technologii, znaczenie algebry Boole'a dla maszyn znacznie zmalało, natomiast ważną rolę zaczęły odgrywać teoria grafów, kombinatoryka, topologia. W projektowaniu maszyn matematycznych również pewną rolę odgrywa teoria liczb.

Duże znaczenie mają dziś badania nad językami programowania. Chociaż języki te dalece odbiegają od formalnego języka matematyki, to jednakże wiele problemów związanych z językami formalnymi ma również znaczenie dla języków maszyn matematycznych. Podstawowe, do tej pory nie rozwiązane zagadnienie, to semantyka języków programowania. Ważne są również badania dotyczące równoważności programów i równoważności języków programowych, badanie złożoności programów, studia nad zupełnością języków programowych oraz studia nad niezależnością pojęć definiujących takie języki. W badaniach tych stosowany jest aparat pojęciowy teorii mnogości, funkcji rekurencyjnych, algebry abstrakcyjnej, teorii algorytmów i inne.

Czynione są próby zbudowania teorii obliczalności nawiązującej do doświadczenia dostarczonego przez maszyny matematyczne. Konieczne tu jest sprecyzowanie ogólnego pojęcia maszyny, obliczenia oraz algorytmu, mającego bliższy związek z praktyką obliczeniową niż znane do tej pory pojęcia algorytmu używane w matematyce. Wydaje się, że dużą rolę może odegrać tutaj analiza funkcjonalna.

Podana lista nie wyczerpuje dziedzin matematyki, które są związane ze współczesną techniką obliczeniową. Tym niemniej widać z niej, że rozwój maszyn matematycznych jest silnie związany z matematyką.

Można również postawić pytanie odwrotne: co dały maszyny matematyczne matematyce?

Istnieje dość powszechna opinia, że przede wszystkim dały one dużą liczbę niebanalnych problemów. O tym, że problematyka matematyczna związana z maszynami jest niebanalna i ciekawa, świadczy między innymi długa lista wybitnych matematyków, którzy się tymi sprawami zajmowali, z różnym zresztą powodzeniem. Przykładem tutaj może być analiza języka programowego. Badania językowe mogą mieć duże znaczenie dla matematyki. Świadczy o tym powstanie rachunku kwantyfikatorów. Podobnie jak badanie roli słów „dla każdego" oraz „istnieje" w wypowiedziach matematycznych doprowadziło do sprecyzowania języka matematyki i kodyfikacji reguł wnioskowania, tak badania nad językami programowania wymagają zbadania znaczenia słowa „niech" w wypowie-

dziach matematycznych. Konsekwencje tych badań mogą być równie owocne, jak w przypadku rachunku kwantyfikatorów.

Duże nadzieje wiążą niektórzy z zastosowaniem maszyn matematycznych w bezpośredniej pracy twórczej matematyków. Od kilku lat czynione są próby zastosowania maszyn matematycznych do dowodzenia twierdzeń. Nad tym zagadnieniem pracuje wielu matematyków na całym świecie.

Wreszcie trzecia niebagatelna sprawa. Maszyny matematyczne szeroko rozpowszechniły wśród niematematyków umiejętności ścisłego formułowania problemów i konsekwentnego myślenia. Rozwiązanie bowiem jakiegokolwiek problemu za pomocą maszyny matematycznej wymaga uprzednio jasnego sformułowania zadania i wyciągnięcia właściwych wniosków z uzyskanych rezultatów. Maszyny matematyczne odgrywają bardzo dużą rolę w propagowaniu kultury matematycznej.

3. Związek maszyn matematycznych i matematyki jest faktem nie wymagającym głębszego uzasadnienia. Mimo to jest on czasem niedoceniany, a nawet wywołuje czasem różne nieporozumienia.

Konstruktorzy maszyn i ich użytkownicy uważają często, że na drodze matematycznej nie da się rozwiązać problemów istotnych dla maszyn. Kiedyś sądzono na przykład, że w rozwoju maszyn matematycznych istotną rolę odegrają metody numeryczne. Jednakże postęp w technologii oraz duży wzrost zastosowań nienumerycznych spowodował spadek znaczenia metod numerycznych, co więcej, istniejące obecnie tendencje w budowie maszyn, języków programowania oraz zastosowań jeszcze bardziej zmniejszają rolę metod numerycznych z tego punktu widzenia. Podobnie przedstawia się sprawa z algebrą Boole'a. Dawniej uważano, że stanie się ona głównym narzędziem projektanta maszyn. Tymczasem okazało się, że za pomocą algebry Boole'a nie udało się rozwiązać nawet problemów tak, zdawałoby się, prostych, jak minimalizacja sieci logicznych. Zanim problem ten udało się dobrze sformułować matematycznie stracił on swą aktualność, gdyż powstały nowe technologie wymagające zupełnie innych metod projektowania maszyn, w których problem minimalizacji stracił jakiekolwiek znaczenie. Przykładów takich można podać znacznie więcej. Schemat ich wszystkich jest jednakowy: nim problem dotarł do świadomości matematyków i został przez nich ściśle sformułowany, stracił on, na skutek postępu techniki, swą aktualność.

Inni przeciwnicy matematyki uważają, że obecna matematyka nie dysponuje odpowiednim zakresem pojęć przydatnych do stawiania i rozwiązywania problemów maszynowych. Wolą oni posługiwać się w rozwiązywaniu zagadnień językiem potocznym uważając, że matematyczne sformułowanie problemu, nawet gdy jest możliwe, prowadzi z reguły do przysłowiowego wylania dziecka z kąpielą. Uważają oni, że jednocześnie z wprowadzeniem ścisłości matematycznej znika sens uzyskanych wyników. Niestety, zwolennicy takiego poglądu mają sporo przykładów na jego poparcie.

Jeszcze inni uważają, że nieodpowiednia matematyzacja nie tylko nie prowadzi do rozwiązania jakiegokolwiek problemu, ale powoduje zalew prac nie mających w istocie żadnego związku z maszynami, a wykazującymi jedynie mniejszą czy też większą umiejętność ich autorów w manipulowaniu formalnym aparatem matematyki. Wystarczy przejrzeć kilka odpowiednich czasopism, aby przyznać, że opinia ta nie jest pozbawiona podstaw.

Z kolei niektórzy matematycy, często nie znający bliżej maszyn, twierdzą, że problematyka ta jest z matematycznego punktu nieinteresująca; z drugiej strony, istnieje liczna grupa matematyków wygłaszająca sądy przeciwne.

Wielokrotnie słyszy się, że maszyny matematyczne nie odegrają istotnej roli w twórczej pracy matematycznej. Niewątpliwie dotychczasowe wyniki w tej dziedzinie nie napawają optymizmem. Nie zapominajmy jednak, że badania w tym kierunku trwają zaledwie kilka lat i przypominają one początki lotnictwa, kiedy to latające maszyny próbowano budować naśladując lot ptaka. Dzisiejszy stan dowodzenia twierdzeń znajduje się właśnie w takim stadium rozwoju. Wydaje się oczywiste, że idei maszynowego dowodzenia twierdzeń nie da się zrealizować na drodze bardziej czy mniej sprawnego manipulowania regułami rachunku kwantyfikatorów. Możliwość zastosowania tu maszyn zależy od znacznego pogłębienia wiedzy o strukturze teorii matematycznych, pojęciu twierdzenia i dowodu. Bez postępu w tej dziedzinie maszynowe dowodzenie twierdzeń jest utopią.

4. Warunki rozwoju teorii maszyn matematycznych w Polsce uważam za dobre. Życzliwość starszych matematyków oraz duże zainteresowanie tą problematyką matematyków młodego pokolenia stanowią rekojmię, że dyscyplina ta będzie się rozwijała w Polsce właściwie.

Zadośćuczynienie kilku podanym niżej dezyderatom może przyczynić się jedynie do szybszego rozwoju tego kierunku badań w naszym kraju.

Uważam, że główny nacisk należy położyć na rozwijanie tych kierunków, które mają znaczenie dla dalszego rozwoju i zastosowań maszyn matematycznych. Do problemów tych należy przede wszystkim sprecyzowanie podstawowych pojęć związanych z techniką obliczeniową, takich jak maszyna, program etc. Wtedy dopiero można sensownie mówić o teorii maszyn matematycznych u jej praktycznych zastosowaniach. Należy natomiast unikać tematów prac wybieranych jedynie na zasadzie „mody", często zresztą przestarzałej. Prac takie prowadzą z reguły do jałowego żonglowania pojęciami i do wyników wprawdzie poprawnych, ale nikogo nie interesujących.

W celu wymiany wyników i problemów należałoby co dwa lata organizować ogólnopolskie seminarium z teorii maszyn matematycznych. Seminarium takie mogłoby przyczynić się do nadania właściwego kierunku i przyśpieszenia badań w tej dziedzinie.

Sądzę, że również należałoby utworzyć specjalne czasopismo o zasięgu krajowym, które zamieszczałoby prace z teorii maszyn matematycznych. Prawdopodobnie początkowo byłyby trudności z dopływem prac, jednakże brak możliwości publikowania wyników z dziedziny maszyn matematycznych działa hamująco na rozwój tej dyscypliny. Z czasem na pewno znalazłaby się odpowiednia liczba prac nadających się do publikacji. Potwierdzają to doświadczenia krajów o znacznie mniejszym od nas potencjale naukowym. Polska jest jednym z nielicznych krajów, nie mających czasopisma z dziedziny maszyn matematycznych. Ma to również ujemne skutki propagandowe. Ważniejsze wyniki muszą być publikowane w czasopismach zagranicznych, gdzie giną one w masie innych prac tego rodzaju.

Wreszcie najważniejszy chyba dezyderat. Po dwudziestoletniej działalności w zakresie maszyn matematycznych mamy w Polsce zaledwie kilku samodzielnych pracowników naukowych, reprezentujących w dodatku różne specjalności. Utrudnia to niezmiernie rozwój prac badawczych. Uważam, że należy stworzyć jak najkorzystniejsze warunki dla habilitacji osób mających odpowiedni dorobek naukowy i dostateczną znajomość problematyki maszyny. Osób takich jest na pewno wiele. Uzyskanie przez nich habilitacji, stopnia docenta, umożliwi prowadzenie badań na odpowiednią skalę, zgodną z potrzebami kraju.

Pewnej reformie powinno ulec także szkolenie matematyków w zakresie maszyn matematycznych. Obecne programy studiów są niejednorodne i dość przypadkowe. Wydaje mi się, że mamy obecnie w Polsce doświadczenie i że możemy pokusić się o stworzenie jednolitych wymagań minimalnych programu studiów, tak aby wszyscy specjalizujący się w maszynach matematycznych na wydziałach matematycznych mieli niezbędne wiadomości matematyczne, związane z problematyką maszynową oraz minimum wiedzy o maszynach.

W chwili obecnej studentom tej specjalności brak zdecydowanie gruntownych wiadomości z podstaw matematyki, logiki i teorii algorytmów. Większy nacisk należy też położyć na wykład teorii mnogości i algebry. Te ostatnie dwa działy mają duże znaczenie zarówno dla teorii maszyn matematycznych, jak i ich zastosowań. Fakt ten nie jest dostatecznie uwzględniony w obecnym programie studiów. Bardzo przydatny byłby też wykład z teorii grafów. Chociaż wyniki tej teorii nie mają bezpośredniego znaczenia dla maszyn matematycznych, to jednak sposób formułowania zagadnień w teorii grafów oraz metody dowodzenia twierdzeń są bardzo bliskie zagadnieniom maszynowym. Dlatego syntetyczny wykład z tej dziedziny wydaje się bardzo potrzebny.

Zaskakuje również brak w programie sekcji maszyn matematycznych rachunku prawdopodobieństwa i statystyki oraz teorii gier. O konieczności zaliczenia tych przedmiotów do niezbędnego minimum wiedzy dla osób specjalizujących się w maszynach czy ich zastosowaniach nie należy chyba nikogo przekonywać.

Myślę, że konieczny jest również wykład encyklopedyczny z maszyn matematycznych dla studentów innych kierunków na matematyce. Wykład taki powinien być prowadzony na jednym z pierwszych dwu lat. W wykładzie tym należałoby, moim zdaniem, pokazać w umiejętny sposób rolę matematyki (czy matematyka) w maszynach matematycznych, i odwrotnie. Myślę, że dziś już można wybrać dostatecznie ważne dla maszyn i atrakcyjne dla matematyka problemy, na przykładzie których można wyjaśnić czym są w istocie maszyny matematyczne i czym być one mogą dla matematyki. Chodzi o to, aby matematyk kończący studia nie uważał, że maszyny to jedynie bardzo szybki arytmometr, a więc przedmiot dla niego nieciekawy, bo taki pogląd jest już dziś nie do utrzymania. Może on być jedynie usprawiedliwiony brakiem znajomości maszyn matematycznych.

W podobny sposób należałoby ustalić minimalne wymagania z matematyki na studiach doktoranckich w zakresie maszyn matematycznych. Występujące tu braki są bowiem takie same, jak na studiach magisterskich.

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XII (1969)

A. TUROWICZ i H. GÓRECKI (Kraków)

Sterowanie optymalne

1. Wstęp

1.1. Zagadnienia sterowania optymalnego zostały postawione w latach pięćdziesiątych obecnego stulecia przez Feldbauma [10], La Salle'a [26], Bellmana [1], Pontriagina [4] i Bushawa [6]. Najdonioślejsze wyniki uzyskali Pontriagin, Bellman i Krasowski. Od Pontriagina [30] pochodzi głośna zasada maksimum, Bellman stosował do problemów sterowania optymalnego swoją metodę programowania dynamicznego [2], a Krasowski [16] zapoczątkował stosowanie metod analizy funkcjonalnej. Te metody rozwinął w Polsce Kulikowski w pracach ogłoszonych w latach 1959 i 1960 [20], [21], [22], [23] i [24]. Uogólnienie zasady maksimum na układy opisywane równaniami różniczkowymi cząstkowymi uzyskał Butkowskij [7]. Tego rodzaju równania opisują układy, które w technice noszą nazwę *układów o parametrach rozłożonych* (w przestrzeni), w przeciwieństwie do układów opisywanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, które noszą nazwę *układów o parametrach skupionych*.

Problematyka sterowania optymalnego wywodzi się z techniki. Podamy kilka przykładów.

1.2. Przeprowadzenie obiektu z jednego stanu w drugi w najkrótszym czasie. Niech x oznacza kąt obrotu wału silnika, t czas, u napięcie przyłożone do zacisków silnika. Należy przeprowadzić wał silnika z położenia x_0 do położenia x_1 w najkrótszym czasie, przy czym napięcie nie może przekroczyć z góry ustalonej wartości $|u| \leqslant a$. Załóżmy, że w przybliżeniu proces można opisać równaniami:

$$x'' = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(T) = x_1, \quad x'(T) = 0. \tag{1.2}$$

Zagadnienie polega na wyznaczeniu takiej funkcji $u(t)$, spełniającej warunek $|u(t)| \leqslant a$, aby T było najmniejsze. Jak to udowodnił Feldbaum, funkcja $u(t)$ ma dwa przedziały stałości: $u(t) = a$ dla $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}T$ i $u(t) = -a$ dla $\frac{1}{2}T < t \leqslant T$. Odpowiada to metodzie sterowania dwuwartościowego „cała naprzód, cała wstecz" (w literaturze angielskiej "bang-bang").