Jon Barwise
Jerry Seligman

Information flow – The logic of distributed systems
Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 44
Cambridge University Press 1997.

Chu spaces http://stanford.edu/

Klasyfikacje

Klasyfikacja $\mathbb{A} = (A, \Sigma_A, \models_A)$

A – zbiór obiektów nazywanych tokenami

Σ_A – zbiór obiektów nazywanych typami

$\models_A \subseteq A \times \Sigma_A$

$a \models_A \alpha$ oznacza $(a, \alpha) \in \models_A$

$$\begin{array}{l} \Sigma_A \\ \big| \models_A \\ A \end{array}$$

Przykład 1

tokens : modele (struktury relacyjne) M

typy : zdania α logiki 1-go rzędu

$M \models \alpha$ oznacza, że α jest prawdziwe w strukturze M

Przykład 2

$\mathcal{A} = (U, A)$ - system informacyjny; $a \in A \rightarrow a : U \rightarrow V_a$

U - skończony zbiór $\qquad V_a$ - zbiór wartości a

zbiór tokenów : A

" typów : $a = v$

$u \models a = v$ oznacza, że $a(u) = v$

Teorie

Γ, Δ - zbiory typów w $\mathbb{A}$

Sekwent: (Γ, Δ)
$\mathbb{A}$

Definicja. Niech $\mathbb{A}$ - klasyfikacja i (Γ, Δ) - sekwent $\mathbb{A}$.
Token $a \in A$ spełnia (Γ, Δ), co oznaczamy $a \models (\Gamma, \Delta)$, wtedy i tylko wtedy gdy z faktu, że $\forall \alpha \in \Gamma \; (a \models \alpha)$ wynika, że $\exists \beta \in \Delta \; (a \models \beta)$.

Oznaczenie $\Gamma \models_{\mathbb{A}} \Delta$ oznacza, że $\forall a \in A \; (a \models (\Gamma, \Delta))$. Jeśli $\Gamma \models_{\mathbb{A}} \Delta$ to mówimy, że sekwent (Γ, Δ) jest prawdziwy w $\mathbb{A}$.

Teoria $\mathbb{A}$: $\quad Th(\mathbb{A}) = \{(\Gamma, \Delta) : \Gamma \models_{\mathbb{A}} \Delta\}$.
(pełna teoria)

Przykłady

Konieczność : $\models_{\mathbb{A}} \alpha$

Przypadki wyczerpujące : $\models_{\mathbb{A}} \alpha, \beta$

Niepowiązywalne typy : $\alpha, \beta \models_{\mathbb{A}}$

Niespójne typy : $\alpha \models_{\mathbb{A}}$

<u>Infomorfizmy</u> Niech

$\mathbb{A} = (A, \Sigma_{\mathbb{A}}, \models_{\mathbb{A}})$ [inny zapis $\mathbb{A} = (tok(\mathbb{A}), typ(\mathbb{A}), \models_{\mathbb{A}})$]

$\mathbb{B} = (B, \Sigma_B, \models_B)$ będą klasyfikacjami. Infomorfizmem z $\mathbb{A}$ w $\mathbb{B}$

nazywamy parę funkcji $f = (f^\wedge, f^\vee)$ takich, że

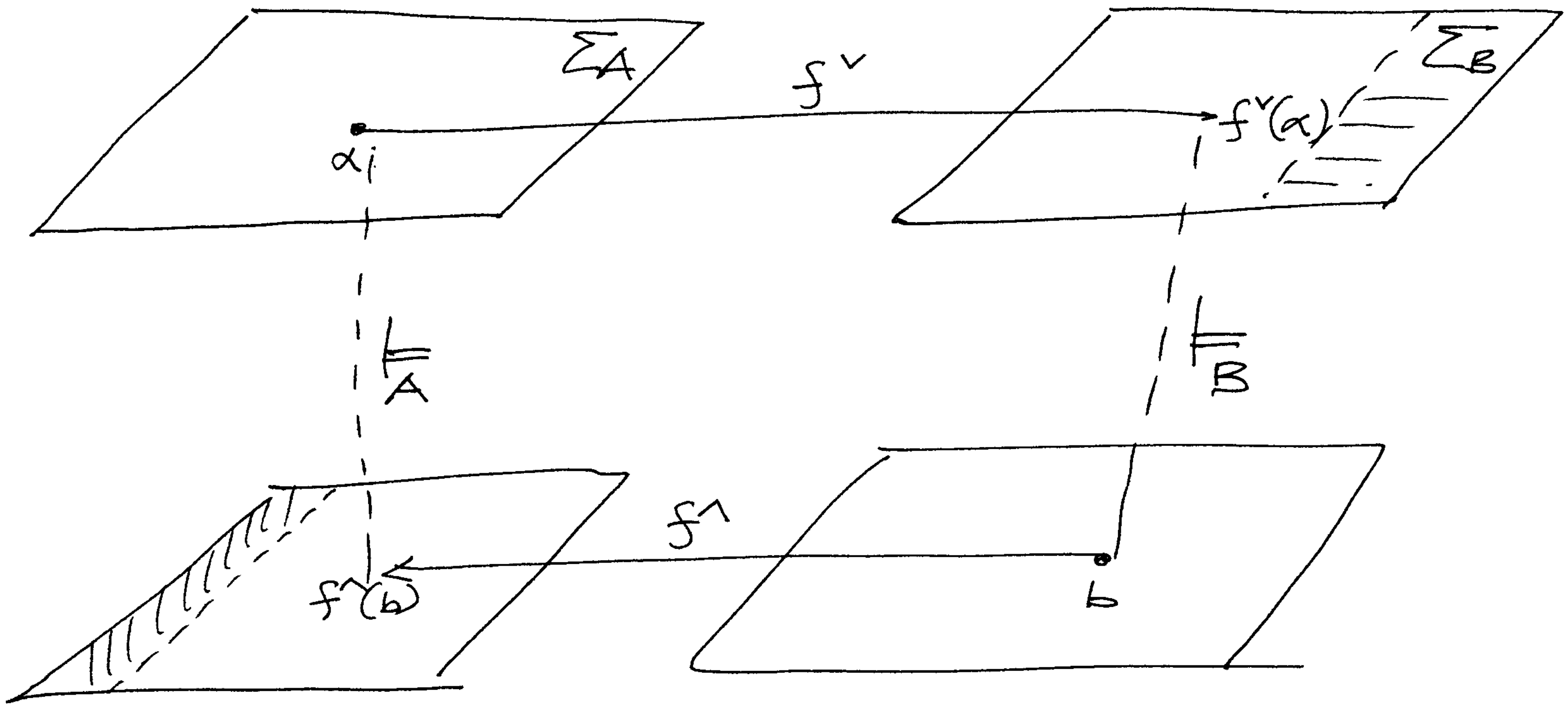
$$f^\wedge : \Sigma_A \longrightarrow \Sigma_B$$
$$f^\vee : B \longrightarrow A$$

spełniającą następujący warunek dla każdego $b \in B$ oraz $\alpha \in \Sigma_A$

$$f^\vee(b) \models_A \alpha \quad \text{wtt} \quad b \models_B f^\wedge(\alpha).$$

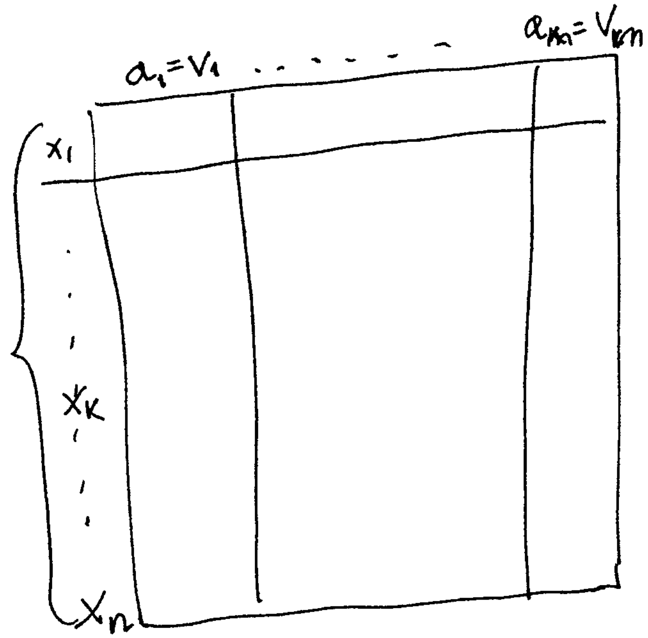
Jeśli f jest izomorfizmem z $\mathbb{A}$ w $\mathbb{B}$ to będzie tez zapisywany

$$f : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B}.$$

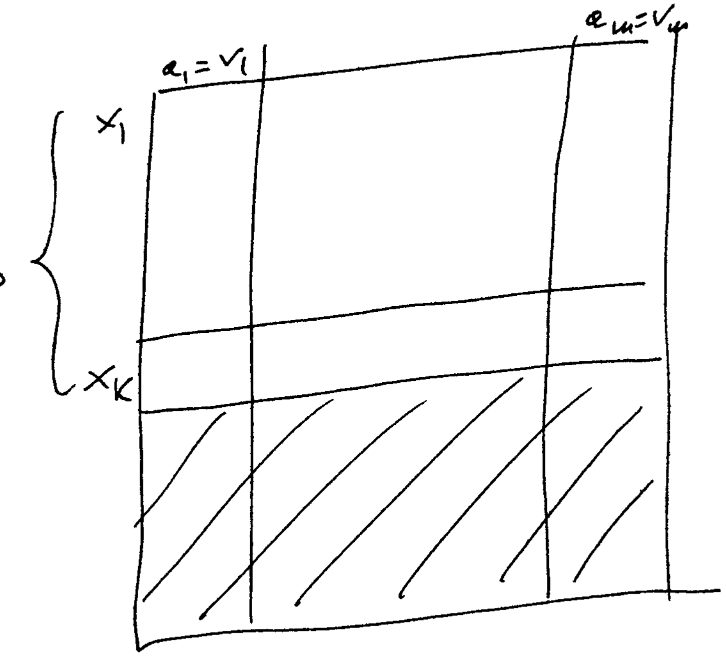


$f^\wedge(b) \models_A \alpha$ wtt $b \models_B f^\vee(\alpha)$

A



B



$$f^\wedge(a_i = v_i) = a_i = v_i$$

$$f^\vee(x_i) = x_i \qquad (i = 1, \dots, k)$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ x_i}}{f^\vee(x_i)} \models_A a_i = v_i \iff x_i \models_B \underbrace{f^\wedge(a_i = v_i)}_{a_i = v_i} \qquad (i = 1, \dots, k)$$

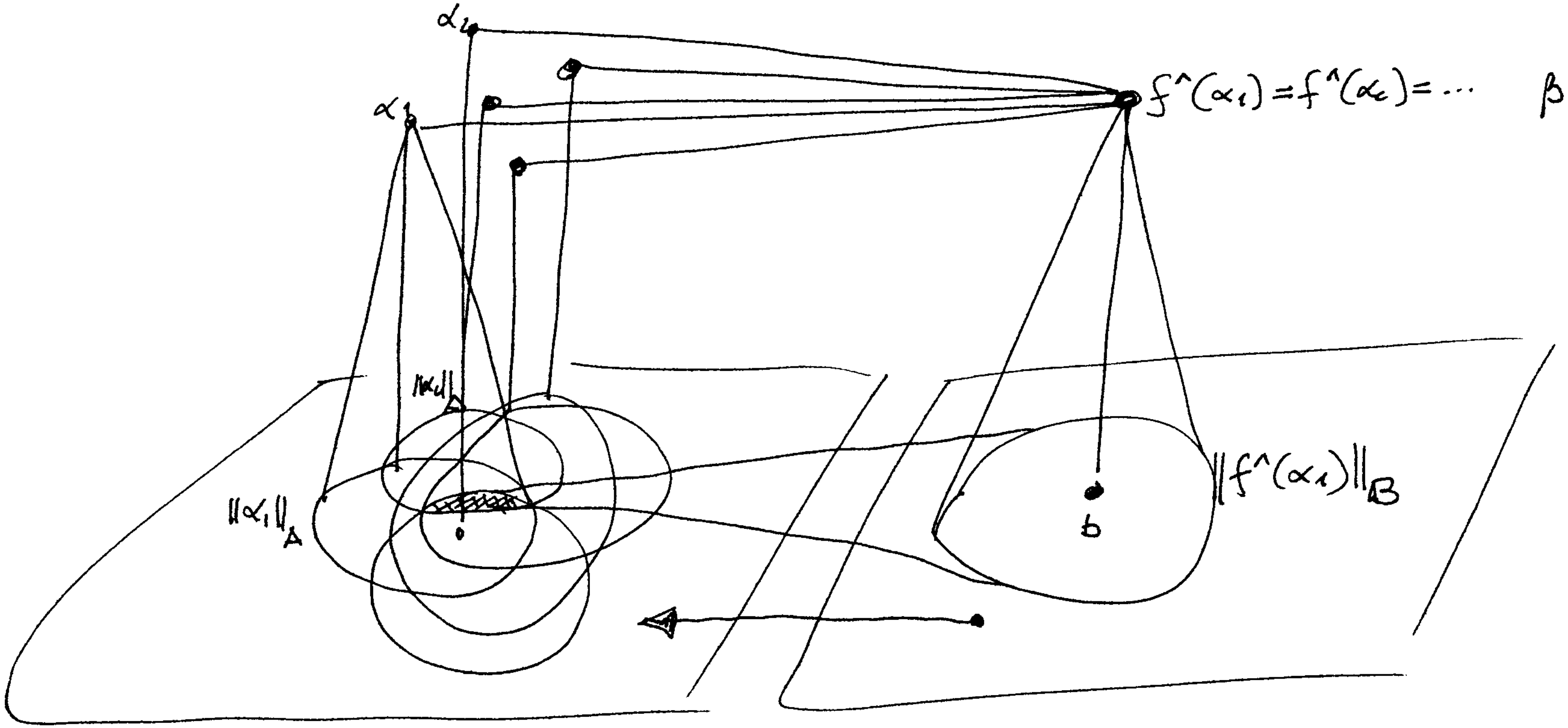
$$\mathbb{A} = (A, \Sigma_A, \models_A)$$

$$\mathbb{B} = (\overset{\cup\!\!|}{B}, \Sigma_A, \models_A)$$

$$f^\wedge(\alpha) = \alpha$$

$$f^\vee(b) = b \qquad b \in B \subseteq A$$

$$f = (f^\wedge, f^\vee) : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B}$$



$$f^\vee(b) \models_A \alpha_1 \longleftrightarrow b \models f^\wedge(\alpha_1)$$

$$\|$$

$$f^\vee(b) \models_A \alpha_2 \longleftrightarrow b \models f^\wedge(\alpha_2)$$

$\forall b$

$$\longrightarrow f^\vee(b) \models_A \alpha_1 \longleftrightarrow f^\vee(b) \models_A \alpha_2$$

$$f^\wedge\left(\overset{\cdot}{\overline{\|f^\wedge(\alpha_i)\|_B}}\right) \subseteq \|\alpha_i\|_A$$

$$f^\wedge(\|\beta\|_B) \subseteq \bigcap \|\alpha_i\|_A$$

$\mathbb{A} = (A, \Sigma_A, \models_A)$

$a \sim b \leftrightarrow \forall \alpha \subset \Sigma_A (a \models_A \alpha \leftrightarrow b \models_A \alpha)$

$\mathbb{A}/\sim = (A/\sim, \Sigma_A, \models_{A/\sim})$

$(f^\wedge, f^\vee) : \mathbb{A} \rightleftarrows A/\sim$ gdzie $f^\wedge(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in \Sigma_A$; $[a]_\sim \models_{A/\sim} \alpha$ wtt $a \models_A \alpha$

$f^\vee([a]_\sim) \in [a]_\sim$ dla $a \in A$

Mamy : $\underset{[a]_\sim}{\underset{\parallel}{f^\vee([a]_\sim)}} \models_A \alpha \longleftrightarrow a \models_A \alpha$

$(g^\wedge, g^\vee) : A/\sim \rightleftarrows A$ gdzie

$g^\wedge(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in \Sigma_A$

$g^\vee(a) = [a]_\sim$ dla $a \in A$

Mamy : $\underset{[a]_\sim}{\underset{\parallel}{g^\vee(a)}} \models_A \alpha \longleftrightarrow a \models_A \alpha$

$\mathbb{A} = (A, \Sigma_A, \models_A)$

$\alpha \, IND_A \, \beta$ wtt $\forall a \in A \, (a \models_A \alpha \leftrightarrow a \models_A \beta)$

tzn. $\|\alpha\|_A = \|\beta\|_A$

$A/IND_A = (A, \Sigma_A/IND_A, \models_{A/IND_A})$

$f^\wedge(\alpha) = [\alpha]_{IND_A}$

$a \models_A [\alpha]_{IND_A}$ wtt $a \models_A \alpha$

$f^\vee(b) = b \quad b \in A$

$f = (f^\wedge, f^\vee) : \mathbb{A} \rightleftarrows A/IND_A$

$\forall a \in A \, (a \models_A \alpha$ wtt $a \models_{A/IND_A} [\alpha]_{IND_A})$

$g : (g^\wedge, g^\vee) : A/IND_A \rightleftarrows A$

$g^\vee(a) = a$ dla $a \in A$

$g^\wedge$ spełnia warunek $g^\wedge([\alpha]_{IND_A}) \in [\alpha]_{IND_A}$

$$\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B} \\ g : \mathbb{B} \rightleftarrows \mathbb{C} \end{array}\right\} \longrightarrow \text{wtedy } h : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{C}$$

$$h^\wedge(\alpha) = g^\wedge(f^\wedge(\alpha)) \qquad \alpha \in \Sigma_A$$
$$h^\vee(c) = f^\vee(g^\vee(c)) \qquad c \in C$$

$\mathbb{A} = (A, \Sigma_A, \models_{A})$

Niech Σ będzie zbiorem typów rozłącznych z Σ_A takim, że dla każdego $\underset{\alpha \in \Sigma}{a \in A}$ określone jest $a \models_{A} \alpha$.

$\mathbb{A}_\Sigma = (A, \Sigma_A \wedge \Sigma, \models_{A})$ gdzie $\Sigma_A \wedge \Sigma = \{\alpha \wedge \beta : \alpha \in \Sigma_A \;\&\; \beta \in \Sigma\}$

$a \models_{A_\Sigma} \alpha \wedge \beta$ wtw $a \models_{A} \alpha$ oraz $a \models_{A} \beta$

$(f^\wedge, f^\vee) : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{A}_\Sigma$

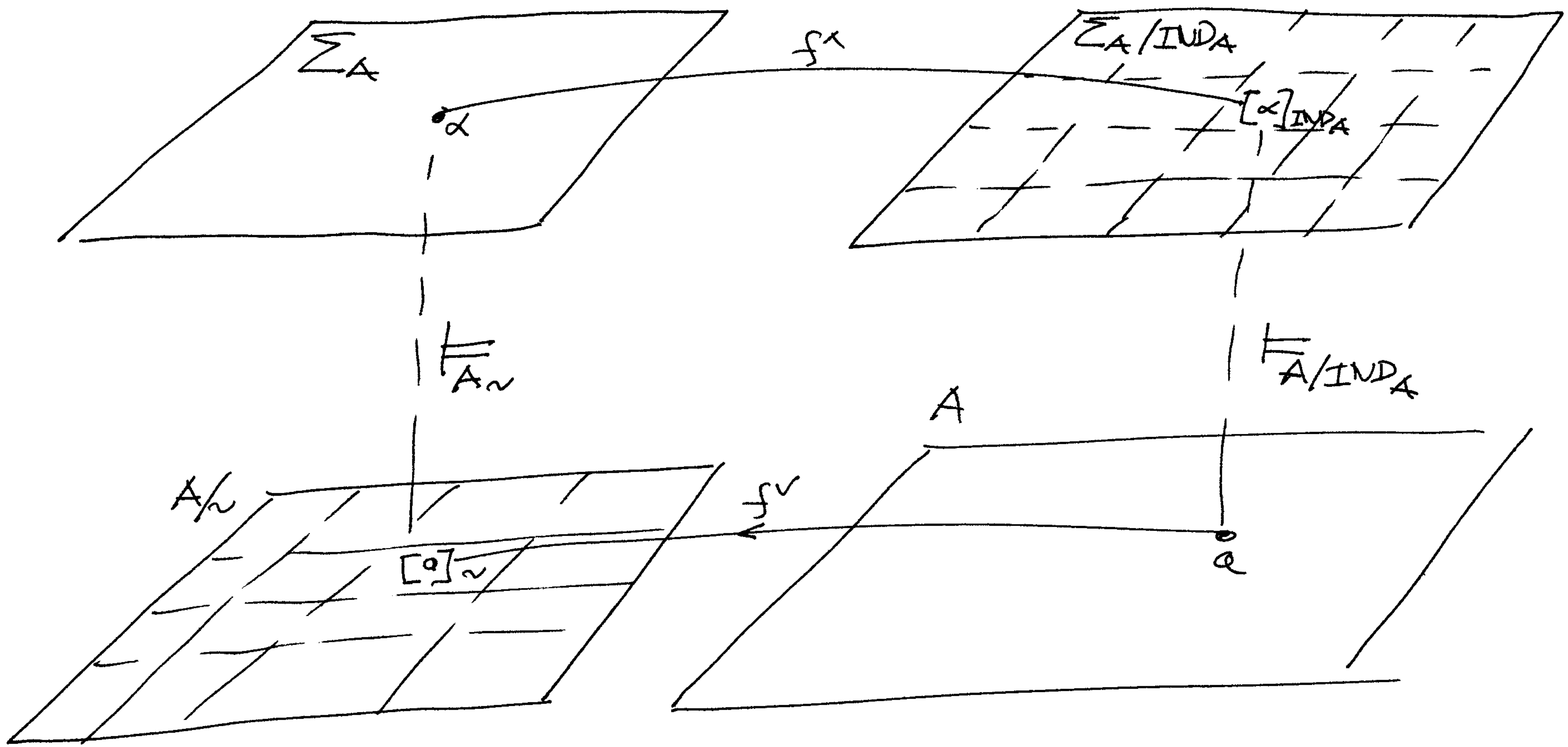
$f^\wedge(\alpha) = \alpha \wedge \beta_\alpha$ dla pewnego $\beta_\alpha \in \Sigma$, t.że $\|\beta_\alpha\|_A \supseteq \|\alpha\|_A$

$\cancel{f^\vee(\alpha \wedge \beta)}$ $f^\vee(a) = a$ dla $a \in A$

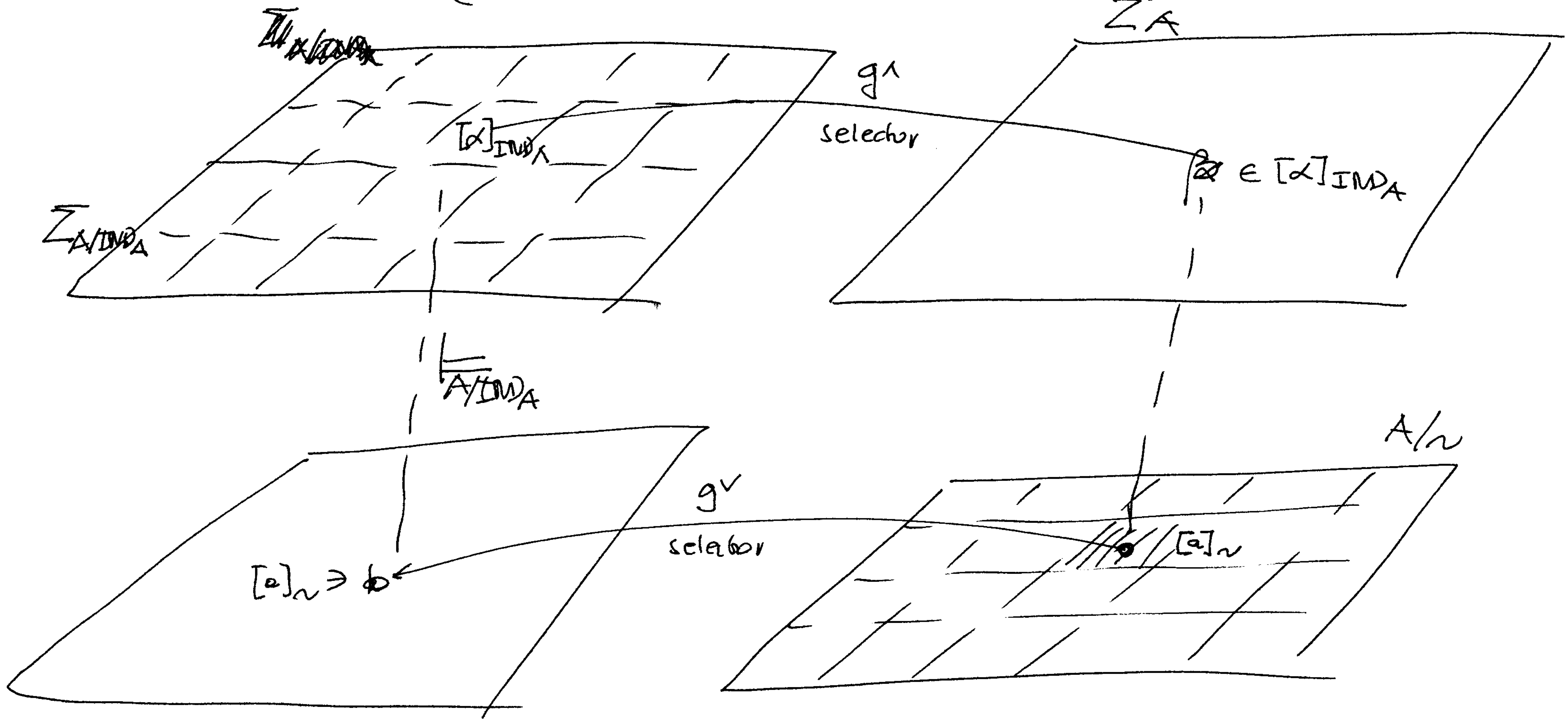
<u>Mamy</u>

$$\underset{\underset{a}{\|}}{f^\vee(a)} \models_{A} \alpha \longleftrightarrow a \models \underset{\alpha \wedge \beta_\alpha}{f^\wedge(\alpha)}$$

$(f^\wedge, f^\vee) : A/_\sim \rightleftarrows A/\mathrm{IND}_A$



$$(g^{\wedge}, g^{\vee}) : A/IND_A \rightleftarrows A/\sim$$



$b \models_{A/IND_A} [\alpha]_{IND_A}$ wtt $[a]_\sim \models_{A/\sim} \beta$ gdzie $b \in [a]_\sim$, $\beta \in [\alpha]_{IND_A}$

$\Updownarrow$

$b \models_A \beta \longleftrightarrow [a]_\sim \models_{A/\sim} \beta$

Suma klasyfikacji

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}$$

- $tok(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \{(a,b) : a \in tok(\mathbb{A}) \ \& \ b \in tok(\mathbb{B})\}$
- $typ(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \{(0,\alpha) : \alpha \in typ(\mathbb{A})\} \cup \{(1,\beta) : \beta \in typ(\mathbb{B})\}$ (suma rozłączna)
- $(a,b) \models_{\mathbb{A}+\mathbb{B}} (0,\alpha)$ wtw $a \models_{\mathbb{A}} \alpha$

  $(a,b) \models_{\mathbb{A}+\mathbb{B}} (1,\beta)$ wtw $b \models_{\mathbb{B}} \beta$

Istnieją naturalne infomorfizmy $\sigma_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{A}+\mathbb{B}$

$\sigma_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \rightleftarrows \mathbb{A}+\mathbb{B}$

1. $\sigma_{\mathbb{A}}(\alpha) = (0,\alpha)$ dla $\alpha \in typ(\mathbb{A})$; $\sigma_{\mathbb{B}}(\beta) = (1,\beta)$ dla $\beta \in typ(\mathbb{B})$
2. $\sigma_{\mathbb{A}}((a,b)) = a$, $\sigma_{\mathbb{B}}((a,b)) = b$ dla $(a,b) \in tok(\mathbb{A}+\mathbb{B})$

Sprawdzenie, że $\sigma_{\mathbb{A}}, \sigma_{\mathbb{B}}$ są infomorfizmami

$$\underbrace{\sigma_{\mathbb{A}}((a,b)))}_{a} \models_{\mathbb{A}} \alpha \quad \underset{?}{\text{wtw}} \quad (a,b) \models_{\mathbb{A}+\mathbb{B}} \underbrace{\sigma_{\mathbb{A}}(\alpha)}_{(0,\alpha)}$$

Czyli wystarczy sprawdzić $a \models_{\mathbb{A}} \alpha$ wtw $(a,b) \models_{\mathbb{A}+\mathbb{B}} (0,\alpha)$ ale tak zdefiniowane zostało $\models_{\mathbb{A}+\mathbb{B}}$.

Fakt. Niech $f : A \rightleftarrows C$ oraz $g : B \rightleftarrows C$. Wtedy istnieje jednoznacznie wyznaczony infomorfizm $f+g$ taki, że następujący diagram jest przemienny

$$
\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, shift left, "f"] \arrow[r, shift left, "\sigma_A"] & A+B \arrow[u, "f+g"] \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & B \arrow[ul, shift right, "g"'] \arrow[l, shift left, "\sigma_B"]
\end{tikzcd}
$$

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje taki infomorfizm $f+g$. Wtedy $f+g$ spełnia warunki

$$(f+g)^\wedge((0,\alpha)) = f^\wedge(\alpha)$$
$$(f+g)^\wedge((1,\beta)) = g^\wedge(\beta)$$
$$(f+g)^\vee(c) = (f^\vee(c), g^\vee(c))$$

ale te warunki można uważać za definicję $f+g$. Wystarczy pokazać, że $f+g$ jest infomorfizmem

tzn.
$$(f+g)(c) \models_{A+B} (i,\alpha) \quad \text{wtt} \quad c \models_{C} (f+g)((i,\alpha))$$

Należy rozważyć dwa przypadki $i=0,1$. Rozważmy np. $i=0$ ($i=1$, analogicznie)

$$
\begin{array}{ccc}
(f+g)(c) \models_{A+B} (0,\alpha) & \underset{?}{\text{wtt}} & c \models_{C} (f+g)((0,\alpha)) \\
\updownarrow \text{ z def } (f+g)(c) & & \updownarrow \\
(f(c), g(c)) \models_{A+B} (0,\alpha) & & \\
\updownarrow \text{ z def } \models_{A+B} & & \\
f(c) \models_{A} \alpha & \xleftrightarrow[f : A \rightleftarrows C]{} & c \models_{C} f(\alpha)
\end{array}
$$

Kanał informacyjny

$$C = \{ f_i : \mathbb{A}_i \rightleftarrows \mathbb{C} \}_{i \in I}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} & \\
\mathbb{A}_1 \arrow[ur, "f_1"] & \cdots & \mathbb{A}_k \arrow[ul, "f_k"']
\end{tikzcd}$$

Suma rodziny klasyfikacji $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$: $\sum_{i \in I} \mathbb{A}_i$

$tok\left(\sum_{i \in I} \mathbb{A}_i\right) = \bigtimes_{i \in I} tok(\mathbb{A}_i)$

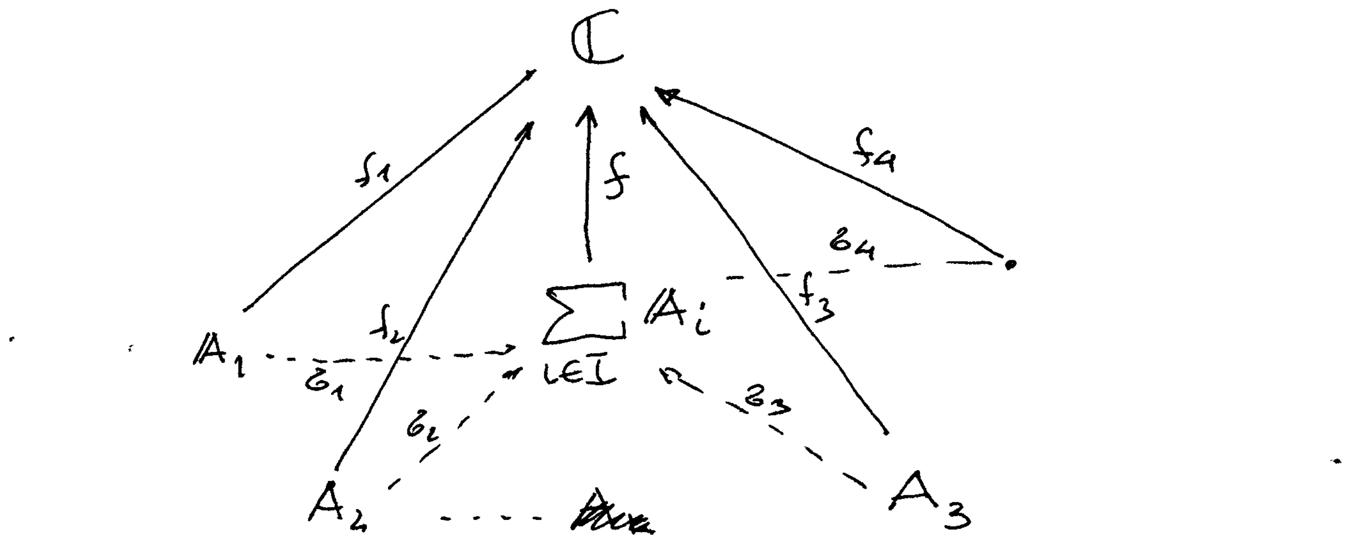
$typ\left(\sum_{i \in I} \mathbb{A}_i\right)$ – suma rozłączna zbiorów $typ(\mathbb{A}_i)$ dla $i \in I$

dla $\bar{a} \in tok\left(\sum_{i \in I} \mathbb{A}_i\right)$ oraz $\alpha \in typ(\mathbb{A}_i)$: $\bar{a} \models (i, \alpha)$ (w $\sum_{i \in I} \mathbb{A}_i$) wtt $a_i \models_{\mathbb{A}_i} \alpha$

Naturalny infomorfizm $\sigma_i : \mathbb{A}_i \rightleftarrows \sum_{i \in I} \mathbb{A}_i$

- dla $\alpha \in typ(\mathbb{A}_i)$ $\sigma_i(\alpha)$ jest kopią α w $typ\left(\sum_{i \in I} \mathbb{A}_i\right)$
- dla $\bar{a} \in tok\left(\sum_{i \in I} \mathbb{A}_i\right)$ $\sigma_i(\bar{a}) = a_i$ gdzie a_i jest i-tą współrzędną $\bar{a}$

Prethodni fakt možemo lako uopćiti. $I = \{1, 2, 3, 4\}$



$\mathbb{A}$ – klasyfikacja

$\mathbb{A} = (\, tok(\mathbb{A}),\ typ(\mathbb{A}),\ \models_{\mathbb{A}})$

$\mathbb{A}^{\perp} = (\, typ(\mathbb{A}),\ tok(\mathbb{A}),\ \models_{\mathbb{A}^{\perp}})$ gdzie $\alpha \models_{\mathbb{A}^{\perp}} a$ wtt $a \models_{\mathbb{A}} \alpha$

Jeśli $f = (f^{\wedge}, f^{\vee})$ jest parą funkcji $f^{\wedge} : typ(\mathbb{A}) \to typ(\mathbb{B})$
$f^{\vee} : tok(\mathbb{B}) \to tok(\mathbb{A})$

to $f^{\perp} = (f^{\perp\wedge}, f^{\perp\vee})$ jest parą funkcji takich, że $f^{\perp\wedge} = f^{\vee}$ i $f^{\perp\vee} = f^{\wedge}$.

Fakt. $f : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B}$ (jest izomorfizmem) wtt $f^{\vee} : \mathbb{B}^{\perp} \rightleftarrows \mathbb{A}^{\perp}$ (jest izomorfizmem)

$$
\begin{tikzcd}
typ(\mathbb{A}) \arrow[r, "f^{\wedge}"] \arrow[d, dash, "\models_{\mathbb{A}}"] & typ(\mathbb{B}) \arrow[d, dash, "\models_{\mathbb{B}}"] \\
tok(\mathbb{A}) & tok(\mathbb{B}) \arrow[l, "f^{\vee}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
tok(\mathbb{B}) \arrow[r, "f^{\vee}"] \arrow[d, dash, "\models_{\mathbb{B}^{\perp}}"] & tok(\mathbb{A}) \arrow[d, dash, "\models_{\mathbb{A}^{\perp}}"] \\
typ(\mathbb{B}) & typ(\mathbb{A}) \arrow[l, "f^{\wedge}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\left(f^{\vee}(b) \models_{\mathbb{A}} \alpha \ \text{ wtt } \ b \models_{\mathbb{B}} f^{\wedge}(\alpha) \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} f^{\wedge}(\alpha) \models_{\mathbb{B}^{\perp}} b & \text{wtt} & \alpha \models_{\mathbb{A}^{\perp}} f^{\vee}(b) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ b \models_{\mathbb{B}} f^{\wedge}(\alpha) & & f^{\vee}(b) \models_{\mathbb{A}} \alpha \end{array} \right)
$$

Niezmienniki

$\mathbb{A}$ - klasyfikacja

$I = (\Sigma', R)$ jest niezmiennikiem (dla $\mathbb{A}$) jeśli $\Sigma \subseteq \Sigma_{\mathbb{A}} = typ(\mathbb{A})$

oraz $R \subseteq tok(\mathbb{A}) \times tok(\mathbb{A})$ spełnia dla $a, b \in tok(\mathbb{A})$ ~~oraz $\alpha \in \Sigma$~~ warunek:

$$aRb \longrightarrow \forall \alpha \in \Sigma \left(a \models_{\mathbb{A}} \alpha \text{ wtt } b \models_{\mathbb{A}} \alpha \right)$$

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że R jest relacją równoważności.

Jeśli I jest niezmiennikiem dla $\mathbb{A}$ to definiujemy

$\mathbb{A}/I = \left(tok(\mathbb{A})/R, \Sigma, \models_{\mathbb{A}/I} \right)$ gdzie $[a]_R \models_{\mathbb{A}/I} \alpha$ wtt $a \models_{\mathbb{A}} \alpha$.

Przykład $\quad tok(\mathbb{A}) = \{a_1, \ldots, a_6\}$, $typ(\mathbb{A}) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_5\}$, $\Sigma = \{\alpha_3, \alpha_4\}$

$\mathbb{A}$	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
a_1	1	1	0	1	0
a_2	1	0	1	0	1
a_3	0	1	0	1	0
a_4	1	0	1	0	0
a_5	0	1	0	0	0
a_6	1	0	0	0	1

$a_i R a_j \leftrightarrow$ $a_i \models \alpha_3 \leftrightarrow a_j \models \alpha_3$

oraz $a_i \models \alpha_4 \leftrightarrow a_j \models \alpha_4$

$[a_1]_R = \{a_1, a_3\}$

$[a_2]_R = \{a_2, a_4\}$

$[a_5]_R = \{a_5, a_6\}$

(Σ, I) jest niezmiennikiem dla $\mathbb{A}$.

$\mathbb{A}/I = \left(\{[a_1], [a_2], [a_5]\}, \Sigma, \models_{\mathbb{A}/I} \right)$

<u>Przykład</u> $f : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B}$, $g : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B}$

$I = (\Sigma_{fg}, R)$ gdzie $\Sigma_{fg} = \{\alpha \in typ(\mathbb{A}) : f(\alpha) = g(\alpha)\}$

$a_1 R a_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, b \in tok(\mathbb{B})$ (~~[illegible]~~) dla $a_1, a_2 \in tok(\mathbb{A})$, $b \in tok(\mathbb{B})$

$f(b) = a_1$ & $g(b) = a_2$

$f : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B}$ oznacza, że dla każdego $b \in B$, $\alpha \in \Sigma_A$ $\quad f(b) \models_{\mathbb{A}} \alpha$ wtt $b \models_{\mathbb{B}} f(\alpha)$ $\quad (*)$

$g : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B}$ oznacza, że dla każdego $b \in B$, $\alpha \in \Sigma_A$ $\quad g(b) \models_{\mathbb{A}} \alpha$ wtt $b \models_{\mathbb{B}} g(\alpha)$ $\quad (**)$

I jest niezmiennikiem dla $\mathbb{A}$

Należy pokazać, że $a_1 \models_{\mathbb{A}} \alpha \Longleftrightarrow a_2 \models_{\mathbb{A}} \alpha$ dla $\alpha \in$ ~~$typ(\mathbb{A})$~~ Σ_{fg}

Niech $a_1 R a_2$.

$\Downarrow$

$a_1 = f(b_0)$, $a_2 = g(b_0)$ dla pewnego $b_0 \in \mathbb{B}$

Wobec tego $a_1 \models_{\mathbb{A}} \alpha \Longleftrightarrow f(b_0) \models_{\mathbb{A}} \alpha \overset{*}{\Longleftrightarrow} b_0 \models_{\mathbb{B}} f(\alpha)$ $\quad f(\alpha) = g(\alpha)$ bo $\alpha \in \Sigma_{fg}$

$a_2 \models_{\mathbb{A}} \alpha \Longleftrightarrow g(b_0) \models_{\mathbb{A}} \alpha \overset{**}{\Longleftrightarrow} b_0 \models_{\mathbb{B}} g(\alpha)$

$\mathbb{A}$ - klasyfikacja

$I=(\Sigma, R)$ - niezmiennik dla $\mathbb{A}$

$\tau : \mathbb{A}/I \rightleftarrows \mathbb{A}$ kanoniczny infomorfizm

$\tau^{\wedge} : \Sigma \to \Sigma_{\mathbb{A}}$; $\tau^{\wedge}(\alpha)=\alpha$

$\tau^{\vee} : A \to A/I$; $\tau^{\vee}(a)=[a]_R$

Mamy: $[a]_R \models_{\mathbb{A}/I} \alpha$ wtt $a \models_{\mathbb{A}} \alpha$

$\mathbb{A}$ - klasyfikacja

$I=(\Sigma, R)$ - niezmiennik dla $\mathbb{A}$

$f : \mathbb{B} \rightleftarrows \mathbb{A}$

f zachowuje I jeśli: (1) $\forall \beta \in typ(\mathbb{B})\ f(\beta) \in \Sigma$

(2) $a_1 R a_2 \longrightarrow f(a_1)=f(a_2)$

<u>Przykład</u> $f : \mathbb{B} \rightleftarrows \mathbb{A}$

$\Sigma = f^{\wedge}(typ(\mathbb{B}))$

$a_1 R a_2 \leftrightarrow f(a_1)=f(a_2)$

$I=(\Sigma, I)$ jest niezmiennikiem $\mathbb{A}$ ~~zatem~~

i f zachowuje I.

$a_1 R a_2$ i

Niech $a_1 \models_{\mathbb{A}} \alpha$ dla pewnego $\alpha \in \Sigma$.

wtedy dla pewnego $\beta \in typ(\mathbb{B})$

$f(\beta)=\alpha$

$a_1 \models_{\mathbb{A}} \alpha \leftrightarrow$

$a_1 \models_{\mathbb{A}} f(\beta) \overset{f}{\longleftrightarrow} f(a_1) \models_{\mathbb{B}} \beta \underset{f(a_1)=f(a_2)}{\longleftrightarrow} f(a_2) \models_{\mathbb{B}} \beta$

$\updownarrow f$

$a_2 \models_{\mathbb{B}} f(\beta)$

$a_2 \models_{\mathbb{B}} \alpha$

<u>Fakt</u> $\left.\begin{array}{l} \mathcal{I} \text{ - niezmiennik dla } \mathbb{A} \\ f: \mathbb{B} \rightleftarrows \mathbb{A} \text{ zachowuje } \mathcal{I} \end{array}\right\} \longrightarrow$ istnieje jednoznacznie wyznaczony infomorfizm $f': \mathbb{B} \rightleftarrows \mathbb{A}/\mathcal{I}$ taki, że następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}/\mathcal{I} \arrow[r, "\tau_{\mathcal{I}}"] & \mathbb{A} \\
\mathbb{B} \arrow[u, dashed, "f'"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>Dowód</u>

Niech $\mathcal{I} = (\Sigma, R)$. Jeśli f' jest infomorfizmem takim, że ten diagram jest przemienny to

1. $f'(\beta) = f(\beta)$ dla $\beta \in typ(\mathbb{B})$
2. $f'([a]_R) = f(a)$ dla $a \in tok(\mathbb{A})$.

Wobec tego definiujemy f'. To, że jest to infomorfizm wynika z tego, że f zachowuje $\mathcal{I} = (\Sigma, R)$

$f'(typ(\mathbb{B})) = f(typ(\mathbb{B})) = \Sigma$.

$a_1 R a_2 \rightarrow a_1 \models_{\mathbb{A}} \alpha$ wtt $a_2 \models_{\mathbb{A}} \alpha$

$$\underbrace{f'([a]_R)}_{f(a)} \models_{\mathbb{B}} \alpha \overset{?}{\Longleftrightarrow} [a]_R \models_{\mathbb{A}/\mathcal{I}} \alpha \overset{\text{podobne z def.}}{\Longleftrightarrow} a \models_{\mathbb{A}} \alpha$$

bo f jest infomorfizmem

$\mathbb{A}$ – klasyfikacja

$\mathcal{J} = (A, R)$ – dualny niezmiennik

$A \subseteq tok(\mathbb{A})$

$R \subseteq typ(\mathbb{A}) \times typ(\mathbb{A})$ – rel. równoważności

$\alpha R \beta \longrightarrow \forall a \in A \left(a \models_{\mathbb{A}} \alpha \leftrightarrow a \models_{\mathbb{A}} \beta\right)$

Dualny iloraz $\mathbb{A}/\mathcal{J} = \left(A, \{[\alpha]_R : \alpha \in typ(\mathbb{A})\}, \models_{\mathbb{A}/\mathcal{J}}\right)$

$a \models_{\mathbb{A}/\mathcal{J}} [\alpha]_R$ wtt $a \models_{\mathbb{A}} \alpha$.

Kanoniczny dualny infomorfizm $\tau_{\mathcal{J}} : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{A}/\mathcal{J}$

$\tau_{\mathcal{J}}(a) = a$ dla $a \in A$

$\tau_{\mathcal{J}}(\alpha) = [\alpha]_R$

Infomorfizm $f : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B}$ zachowuje $\mathcal{J}$ jeśli

(1) $\forall b \in tok(\mathbb{B})\ f(b) \in A$

(2) $\alpha_1 R \alpha_2 \longrightarrow f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$

Fakt: Jeśli $\mathcal{J}$ jest dualnym niezmiennikiem dla $\mathbb{A}$ oraz infomorfizm $f : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B}$ zachowuje $\mathcal{J}$ to istnieje dokładnie jeden infomorfizm $f' : \mathbb{A}/\mathcal{J} \rightleftarrows \mathbb{B}$ taki, że następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, "\tau_{\mathcal{J}}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{A}/\mathcal{J} \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

System rozproszony

$\mathfrak{A}$

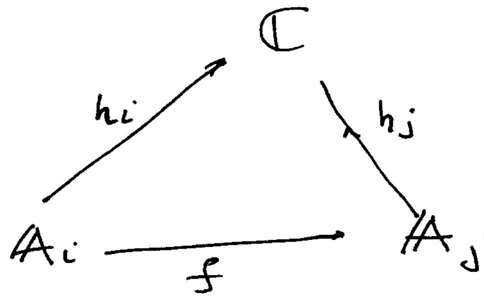
$cla(\mathfrak{A}) = \{A_i\}_{i \in I}$

rodzina klasyfikacji

$inf(\mathfrak{A})$

zbiór infomorfizmów,
(każdy z jakiegoś A_i
w pewien A_j)

Kanał $\mathbb{C} = \{h_i : \mathbb{A}_i \rightleftarrows \mathbb{C}\}$ pokrywa system rozproszony $\mathcal{A}$ jeśli $cla(\mathcal{A}) = \{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$ oraz dla każdych $i, j \in I$ i każdego infomorfizmu $f : \mathbb{A}_i \rightleftarrows \mathbb{A}_j$ z $inf(\mathcal{A})$ następujący diagram jest przemienny



$\mathbb{C}$ jest minimalnym pokryciem $\mathcal{A}$ jeśli $\mathbb{C}$ pokrywa $\mathcal{A}$ oraz dla każdego kanału $\mathbb{D}$ pokrywającego $\mathbb{C}$ istnieje jednoznacznie wyznaczony infomorfizm z $\mathbb{C}$ ~~do~~ $\mathbb{D}$ ~~z dokładnością do izomorfizmu~~.

Tw. Każdy system rozproszony ma minimalne pokrycie. Jest ono wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

Granica systemu rozproszonego $\mathcal{A} = (\underset{\{A_i\}_{i\in I}}{\text{cla}}(\mathcal{A}), \text{inf}(\mathcal{A}))$ – $\lim \mathcal{A}$ to kanał $\mathcal{C}$

taki, że $\mathcal{C} = \{g_i : A_i \rightleftarrows \mathbb{C}\}_{i\in I}$ gdzie

1. $\mathbb{C} = \sum_{i\in I} A_i / \mathcal{J}$ i $\mathcal{J}$ jest dualnym niezmiennikiem $\mathcal{J} = (C, R)$ takim, że

$C = \{c \in \text{tok}(\sum_{i\in I} A_i) : \forall f \in \text{inf}(\mathcal{A}) \, \forall_{i,j\in I} [(f : A_i \rightleftarrows A_j) \longrightarrow f(c_j) = c_i]\}$

j-ta składowa c

$\alpha R \alpha'$ wtt $\exists f \in \text{inf}(\mathcal{A}) \, \exists_{i,j\in I} \, \exists \alpha_0 \in \text{tok}(A_i)$
$[f : A_i \rightleftarrows A_j \;\&\; \mathcal{E}_i(\alpha_0) = \alpha \;\&\; \mathcal{E}_j(f(\alpha_0)) = \alpha']$

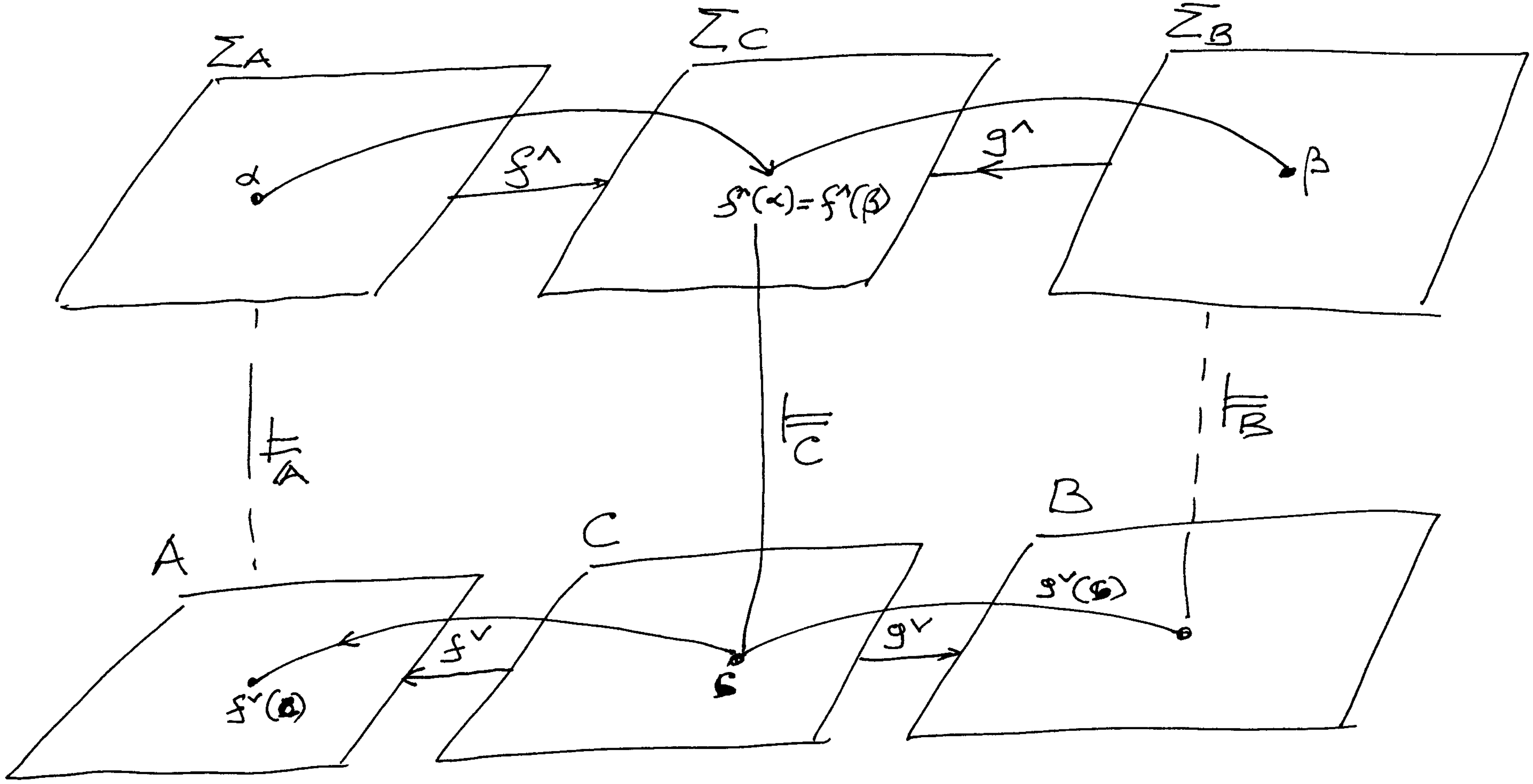
dla $\alpha, \alpha' \in \text{typ}(\sum_{i\in I} A_i)$, gdzie $\mathcal{E}_i : A_i \rightleftarrows \sum_{i\in I} A_i$ jest naturalnym infomorfizmem.

2. $g_i : A_i \rightleftarrows \mathbb{C}$ dla $i \in I$ są określone następująco

$g_i(\alpha)$ jest klasą R-równoważności $\mathcal{E}_i(\alpha)$ dla $\alpha \in \text{typ}(A_i)$

$g_i(c) = \mathcal{E}_i(c)$ dla $c \in \text{tok}(\mathbb{C})$.

<u>Twierdzenie</u> $\lim \mathcal{A}$ jest minimalnym pokryciem $\mathcal{A}$, gdzie $\mathcal{A}$ – system rozproszony.



$$f^\vee(c) \models_A \alpha \longleftrightarrow c \models_C f^\wedge(\alpha) \underset{\substack{\text{bo}\\ f^\wedge(\alpha)=g^\wedge(\alpha)}}{\longleftrightarrow} c \models_C g^\wedge(\alpha) \longleftrightarrow g^\vee(c) \models_B \beta$$

czyli $f^\vee(c) \models_A \alpha$ wtt $g^\vee(c) \models_B \beta$ dla $c \in C$ oraz $\alpha \in \Sigma_A$, $\beta \in \Sigma_B$ takich, że $g^\wedge(\beta) = f^\wedge(\alpha)$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} & \\ \mathbb{A} \arrow[ur, "f"] & & \mathbb{B} \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

Czy $\mathbb{A}$ może "wiedzieć" o tym czy $b \models_{\mathbb{B}} \beta$ dla pewnych $b \in B$, $\beta \in \Sigma_B$?

1. $g^\wedge(\beta) \in f^\wedge(\Sigma_A) \longrightarrow$ istnieje $\alpha \in \Sigma_A$ takie, że $g^\wedge(\beta) = f^\wedge(\alpha) = \gamma$

2. jeśli $c \models_{\mathbb{C}} \gamma$ tzn. $c \models_{\mathbb{C}} g^\wedge(\beta) \longleftrightarrow g^\vee(c) \models_{\mathbb{B}} \beta$

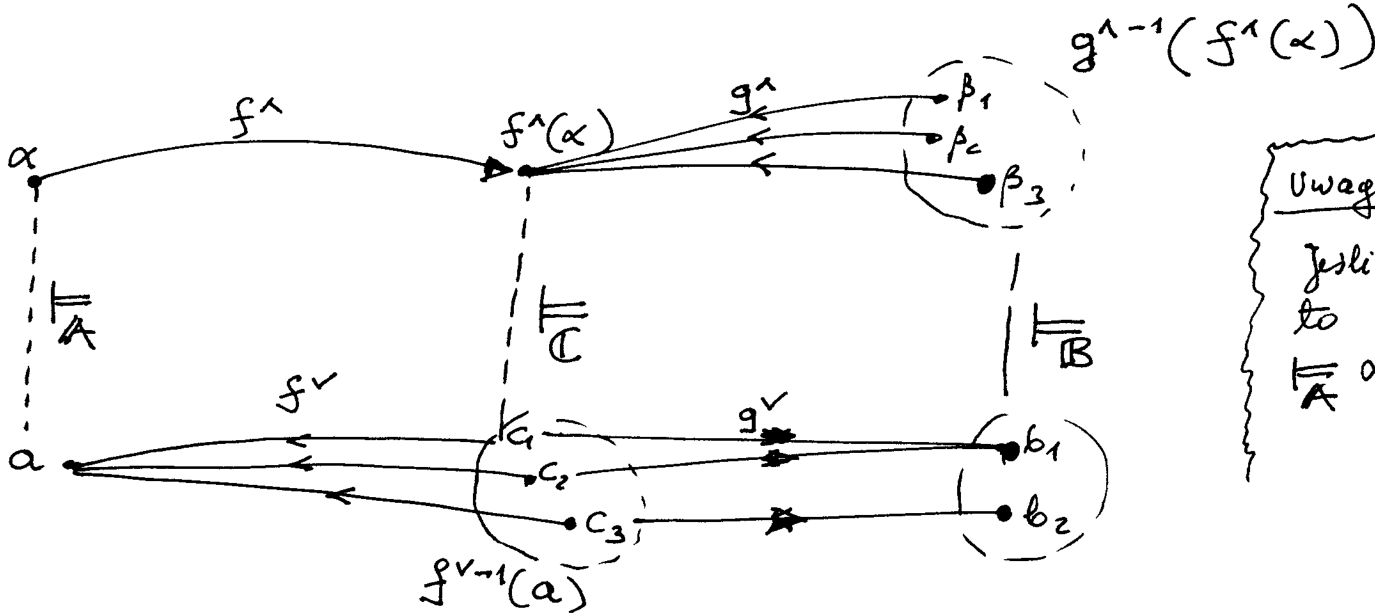
$$\begin{array}{l} c \models_{\mathbb{C}} g^\wedge(\beta) \longleftrightarrow g^\vee(c) \models_{\mathbb{B}} \beta \\ \quad\ \ \| \\ c \models_{\mathbb{C}} f^\wedge(\alpha) \longleftrightarrow f^\vee(c) \models_{\mathbb{A}} \alpha \end{array}$$

czyli $g^\vee(c) \models_{\mathbb{B}} \beta \longleftrightarrow f^\vee(c) \models_{\mathbb{A}} \alpha$

Jeśli "percepcja" przez $\mathbb{C}$ formuły $\alpha \in \Sigma_A$ i $\beta \in \Sigma_B$ jest taka sama (lub równoważna) to dla każdego tokenu $a \in g^\vee(C)$ $a \models_{\mathbb{A}} \alpha$ wtt $b \models_{\mathbb{B}} \beta$ dla $b \in g^\vee(f^{\vee -1}(a))$.

Dla formuły (typu) $\alpha \in \Sigma_A$ takiego, że $f^\wedge(\alpha) \in g^\wedge(\Sigma_B)$ oraz dla każdej formuły $\beta \in g^{\wedge -1}(f^\wedge(\alpha))$ oraz $a \in f^\vee(C)$

$$a \models_{\mathbb{A}} \alpha \quad \text{wtt} \quad b \models_{\mathbb{B}} \beta \quad \text{dla } b \in g^\vee(f^{\vee -1}(a)).$$



Uwaga $f^\wedge(\alpha) \in g^\wedge(\Sigma_B)$.
Jeśli $f^\vee(C) = A$, $g^\vee(C) = B$
to
$\models_{\mathbb{A}} \alpha$ wtt $\models_{\mathbb{B}} \beta$
dla $\beta \in g^{\wedge -1}(f^\wedge(\alpha))$

$a = f^\wedge(c_i) \models_{\mathbb{A}} \alpha$ wtt $c_i \models_{\mathbb{C}} f^\wedge(\alpha)$ dla $i = 1,2,3$

Stąd albo $c_i \models f^\wedge(\alpha)$ dla $i = 1,2,3$ są wszystkie prawdziwe albo wszystkie fałszywe.

$c_i \models_{\mathbb{C}} f^\wedge(\alpha) \longleftrightarrow g^\vee(c_i) \models_{\mathbb{B}} \beta_j \quad (j = 1,2,3)$

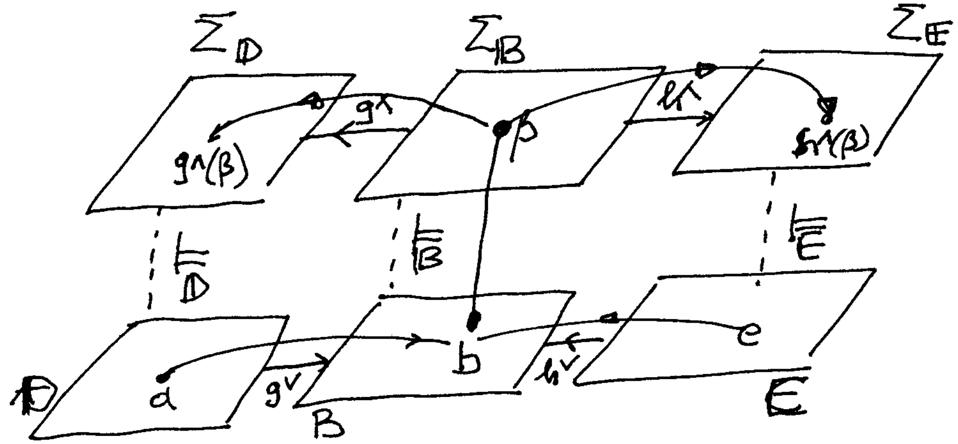
$c_1 \models_{\mathbb{C}} f^\wedge(\alpha) \longleftrightarrow b_1 \models_{\mathbb{B}} \beta_j \quad (j = 1,2,3)$

$c_2 \models_{\mathbb{C}} f^\wedge(\alpha) \Longleftrightarrow b_1 \models_{\mathbb{B}} \beta_j \quad (j = 1,2,3)$

$c_3 \models_{\mathbb{C}} f^\wedge(\alpha) \longleftrightarrow b_2 \models_{\mathbb{B}} \beta_j \quad (j = 1,2,3)$

Stąd $a \models_{\mathbb{A}} \alpha$ wtt $(b_1 \models_{\mathbb{B}} \beta_1) \& (b_1 \models_{\mathbb{B}} \beta_2) \& (b_1 \models_{\mathbb{B}} \beta_3) \&$
$(b_2 \models_{\mathbb{B}} \beta_1) \& (b_2 \models_{\mathbb{B}} \beta_2) \& (b_2 \models \beta_3)$

$$\begin{tikzcd}
& D & & E & \\
A \arrow[ur, "f"] & & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[ur, "h"] & & C \arrow[ul, "k"']
\end{tikzcd}$$



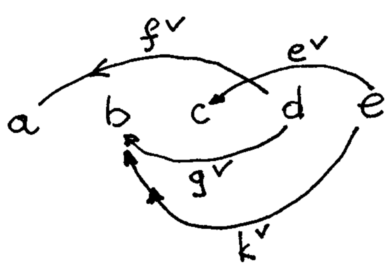
$g^\vee(d) \models_B \beta$ wtt $d \models_D g^\wedge(\beta)$

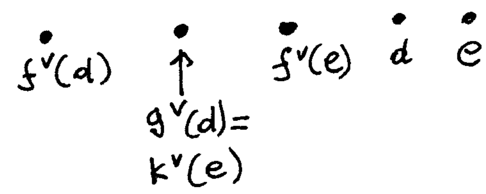
$h^\vee(e) \models_B \beta$ wtt $e \models_E h^\wedge(\beta)$

Jeśli $g^\vee(d) = h^\vee(e)$ to $d \models_D g^\wedge(\beta)$ wtt $e \models_E h^\wedge(\beta)$

$b \models_B \beta$ wtt $d \models_D g^\wedge(\beta)$ $\quad d \in (g^\vee)^{-1}(b)$

wtt $e \models_E h^\wedge(\beta)$ $\quad e \in (h^\vee)^{-1}(b)$





8

Minimalne pokrycia są znane jako co-limits w teorii kategorii.

<u>Tw.</u> Każdy system rozproszony ma minimalne pokrycie wyznaczone jednoznacznie, z dokładnością do infomorfizmu.

<u>Df.</u> $\mathcal{A}$ - sys. rozproszony z klasyfikacjami $\{A_i\}_{i\in I}$. Granica $\lim \mathcal{A}$ systemu $\mathcal{A}$ jest kanałem informacyjnym zdefiniowanym n-co:

1. $\mathbb{C} = \sum_{i\in I} A_i / \mathcal{I}$ ($\mathbb{C}$ jest <u>"dual"</u> quotient")

Niech $\mathbb{A} = \sum_{i\in I} A_i$; c_i – i-ta współrzędna ~~dla~~ tokena c w $\mathbb{A}$.
Zbiór tokenów C zawiera te tokeny c dla których $f(c_j) = c_i$ dla każdego infomorfizmu $f: A_i \rightleftarrows A_j$ w $inf(\mathcal{A})$.
[zachowanie węzłów dla "part whole relation"].

Definiujemy relację R na typach sumy:
$\alpha R \alpha'$ iff istnieje infomorfizm $f: A_i \rightleftarrows A_j$ oraz typ $\alpha_0 \in typ(A_i)$ taki, że $\alpha = \sigma(\alpha_0)$ oraz $\alpha' = \sigma_j(f(\alpha_0))$

<u>Dodatkowe wyjaśnienie</u>

Df. $\mathbb{A}$ - klasyfikacja. Niezmiennikiem dla A jest para $I = (\Sigma, R)$ taka, że $\Sigma \subseteq typ(\mathbb{A})$ oraz R jest relacją binarną na tokenach A taką, że jeśli aRb to $\forall \alpha \in \Sigma \, (a \models_A \alpha \text{ iff } b \models_B \alpha)$.

Df. $I = (\Sigma, R)$ – niezmiennik dla $\mathbb{A}$. Wtedy A/I jest klasyfikacją z typami Σ oraz tokenami będącymi klasami R-równoważności (wyznaczonymi przez najmniejszą rel. równ. $\equiv_R$ zawierającą R) oraz $[a]_R \models_{\mathbb{A}/I} \alpha$ iff $a \models_{\mathbb{A}} \alpha$.

2. Aby zdefiniować infomorfizmy w $\lim \mathcal{A}$: niech $g_j : A_j \rightleftarrows \mathbb{C}$ (dla $j \in I$) będzie parą funkcji określoną n-co:

a) $g_j(\alpha)$ jest ~~R~~ klasą równoważności rel. R wyznaczoną przez $\sigma_j(\alpha)$ dla każdego $\alpha \in typ(A_j)$

b) $g_j(c) = \sigma_j(c)$ dla każdego $c \in tok(\mathbb{C})$

<u>Uwaga</u> Aby zauważyć, że $\models$ jest dualnym nieznacznikiem. Załóżmy, że $c \in C$ i że $\alpha R \alpha'$. Należy sprawdzić czy

$$c \models_{\mathbb{A}} \alpha \text{ iff } c \models_{\mathbb{A}} \alpha'$$

istnieje infomorfizm $f : A_i \rightleftarrows A_j$ oraz typ $\alpha_0 \in typ(A_i)$ taki że

$$\alpha = \sigma_i(\alpha_0)$$
$$\alpha' = \sigma_j(f(\alpha_0))$$

Wobec tego mamy n-ce równoważności

$$c \models_{\mathbb{A}} \alpha \text{ iff } c \models_{\mathbb{A}} \sigma(\alpha_0) \text{ iff } c_i \models_{A_i} \alpha_0$$
$$\text{iff } f(c_j) \models_{A_i} \alpha_0$$
$$\text{iff } c_j \models_{A_j} f(\alpha_0)$$
$$\text{iff } c \models_{\mathbb{A}} \sigma_j(f(\alpha_0))$$
$$\text{iff } c \models_{\mathbb{A}} \alpha'$$

Tw. Dla każdego zadanego ~~regul~~ napr. $\mathcal{A}$ $\lim \mathcal{A}$ jest minimalnym pokryciem $\mathcal{A}$.

Twierdzenie. $\mathcal{A}$ – system rozproszony. Wtedy $\lim \mathcal{A}$ jest minimalnym pokryciem $\mathcal{A}$.

Dowód.

- $\lim \mathcal{A}$ jest pokryciem $\mathcal{A}$

Zauważmy, że z def $\lim \mathcal{A}$ wynika, że dla każdego $f : A_i \rightleftarrows A_j$ poniższy diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A_i \arrow[ur, "g_i"] \arrow[rr, "f"'] & & A_j \arrow[ul, "g_j"'] \end{tikzcd}$$

- Niech $\mathcal{D} = \{h_i : A_i \rightleftarrows D\}_{i \in I}$ również pokrycie $\mathcal{A}$. Wtedy dla każdego $i \in I$ następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} & D & \\ & C \arrow[u, dashed, "r"] & \\ A_j \arrow[uur, "h_j"] \arrow[ur, "g_j"] \arrow[rr, "\sigma_j"'] & & A \arrow[ul, "\tau_j"'] \arrow[uul, "h"'] \end{tikzcd}$$

gdzie $A = \sum_{i \in I} A_i$ oraz $h = \sum_{j \in I} h_j$. Ponieważ h zachowuje J to (z udowodnionego poprzednio faktu) istnieje jednoznacznie wyznaczony epimorfizm $r : C \rightleftarrows D$ taki, że diagram

$$\begin{tikzcd} D & \\ C \arrow[u, "r"] & \\ & A \arrow[ul, "\tau_j"] \arrow[uul, "h"'] \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Dowód poprawności def.

R jest idealnym niezmiennikiem:

Niech $c \in \mathbb{C}$ oraz $\alpha R \alpha'$. Należy pokazać, że $c \models_{\mathbb{A}} \alpha$ wtt $c \models \alpha'$!

Ponieważ $\alpha R \alpha'$ to istnieje ~~ta~~ izomorfizm $f : \mathbb{A}_i \rightleftarrows \mathbb{A}_j$ oraz $\alpha_0 \in typ(\mathbb{A}_i)$

takie, że $\alpha = \sigma_i(\alpha_0)$ i $\alpha' = \sigma_j(f(\alpha_0))$. Ponieważ $c \in \mathbb{C}$ $f(c_j) = c_i$.

Wobec tego $c \models_{\mathbb{A}} \alpha$ wtt $c \models_{\mathbb{A}} \sigma(\alpha_0)$

wtt $c_i \models_{\mathbb{A}_i} \alpha_0$

wtt $f(c_j) \models_{\mathbb{A}_i} \alpha_0$

wtt $c_j \models_{\mathbb{A}_i} f(\alpha_0)$

wtt $c \models_{\mathbb{A}} \alpha'$.

<u>Uwaga</u>. h zachowuje $J = (C, R)$ tzn.

- $\forall d \in D \quad h(d) \in C$
- •• $\alpha_1 R \alpha_2 \longrightarrow h(\alpha_1) = h(\alpha_2)$ dla $\alpha_1, \alpha_2 \in typ(A)$, $A = \sum_{i \in I} A_i$

- Z definicji $h = \sum_{i\in I} h_i$. Stąd $h(d) = (\underbrace{h_1(d)}_{d_1}, \dots, \underbrace{h_i(d)}_{d_i}, \dots)$ dla $d \in D$.

Jeśli dla pewnych $i, j \in I$ istnieje $f : A_i \rightleftarrows A_j$ to ponieważ $\mathcal{D} = \{h_i : A_i \to D\}_{i\in I}$ jest pokryciem to następujący diagram jest przemienny. Stąd ~~...~~ $\underbrace{h_i(d)}_{d_i} = f(\underbrace{h_j(d)}_{d_j})$

$= f(d_j)$

$$\begin{tikzcd}
 & D & \\
 & A_j \arrow[u, "h_j"] \arrow[dr, "\varepsilon_j"] & \\
A_i \arrow[uur, "h_i"] \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "\varepsilon_i"'] & & \sum_{i\in I} A_i \arrow[uul, "h"']
\end{tikzcd}$$

•• Jeśli $\alpha_1 R \alpha_2$ to dla pewnych $i, j \in I$ istnieje $f : A_i \rightleftarrows A_j$ (w inf$\mathcal{A}$) oraz $\alpha_0 \in typ(A_i)$ takie, że

$$\alpha_1 = \varepsilon_i(\alpha_0)$$
$$\alpha_2 = \varepsilon_j(f(\alpha_0)).$$

Mamy $h(\alpha_1) = h(\varepsilon_i(\alpha_0)) \overset{def}{=} h_i(\alpha_0) = h_j(f(\alpha_0)) \overset{def}{=} h(\varepsilon_j(f(\alpha_0))) = h(\alpha_2)$.

$\Sigma \subseteq typ(A)$, $R \subseteq tok(A) \times tok(A)$
$aRb \longrightarrow \forall \alpha \in \Sigma \, (a \models_A \alpha$ wtt $b \models_A \alpha)$

Jeśli $I = (\Sigma, R)$ jest niezmiennikiem klasyfikacji A.

<u>Kanał ilorazowy dla A względem</u> I to granica lim następującego systemu rozproszonego

$$A \xleftarrow{\tau_I} A/I \xrightarrow{\tau_I} A$$

$A/I = (\{[a]_{\equiv R} : a \in A\}, \Sigma, \models_{A/I})$
$[a]_R \models_{A/I} \alpha$ wtt $a \models_A \alpha$

Kanał ilorazowy $\mathcal{C} = \{ g_1 : A \to \mathbb{C},\ h : A/I \to \mathbb{C},\ g_2 : A \to \mathbb{C} \}$

czyli następujący diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} & \\ A \arrow[ur, "g_1"] & A/I \arrow[l, "\tau_I"'] \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\tau_I"] & A \arrow[ul, "g_2"'] \end{tikzcd}$$

$\tau_I(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in \Sigma$
$\tau_I(a) = [a]_R$

Kanał ilorazowy jest izomorficzny z następującym:
Dla każdego $\alpha \in typ(A) - \Sigma$ są dwie kopie α_1, α_2. Niech $typ(\mathbb{C})$ zawiera wszystkie takie kopie oraz typy z Σ. $C = \{(a_1, b, a_2) : [a_1]_R = b = [a_2]_R : a_1, a_2 \in A\}$

Dla $c = (a_1, b, a_2)$:
$c \models_{\mathbb{C}} \alpha$ wtt $b \models_{A/I} \alpha$ dla $\alpha \in \Sigma$
$c \models_{\mathbb{C}} \alpha_1$ wtt $a_1 \models_A \alpha$ dla $\alpha \in typ(A) - \Sigma$
$c \models_{\mathbb{C}} \alpha_2$ wtt $a_2 \models_A \alpha$ dla $\alpha \in typ(A) - \Sigma$.

Infomorfizmy $g_1 : A_i \rightleftarrows \mathbb{C}$ i $h : A/I \rightleftarrows C$ są zdefiniowane n-co:
$h(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in \Sigma$
$g_i(\alpha) = \alpha$ " $\alpha \in typ(A)$.
dla $c = (a_1, b, a_2)$: $g_i(c) = a_i$ $h(c) = b$

Przypuśćmy, że c łączy a_1, b, a_2 tzn. $[a_1]_R = b = [a_2]_R$. Wtedy dla $\alpha \in \Sigma$
$a_1 \models_{\mathcal{A}} \alpha$ wtw $b \models_{\mathcal{A}/I} \alpha$ wtw $a_2 \models_{\mathcal{A}} \alpha$. Jeśli $\alpha \in typ(\mathcal{A}) - \Sigma$ to
$a_1 \models_{\mathcal{A}} \alpha$ nie niesie żadnej informacji o b i a_2.

Przestrzeń stanów to klasyfikacja $\mathcal{S}$ w której dla każdego tokena przypisany jest dokładnie jeden typ nazywany stanem. α jest stanem dla a jeśli $a \models_{\mathcal{S}} \alpha$.
$\mathcal{S}$ jest ~~zu~~pełna jeśli każdy stan jest stanem dla pewnego tokena.

$$\begin{tikzcd} typ(\mathcal{S}) \\ tok(\mathcal{S}) \arrow[u, "state_{\mathcal{S}}"'] \end{tikzcd}$$

Rzutem przestrzeni stanów $\mathcal{S}_1$ na $\mathcal{S}_2$ (ozn. $f: \mathcal{S}_1 \rightrightarrows \mathcal{S}_2$) jest para funkcji f takich, że dla każdego $a \in tok(\mathcal{S}_1)$ $f(state_{\mathcal{S}_1}(a)) = state_{\mathcal{S}_2}(f(a))$ tzn. następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd} typ(\mathcal{S}_1) \arrow[r, "f"] & typ(\mathcal{S}_2) \\ tok(\mathcal{S}_1) \arrow[u, "state_{\mathcal{S}_1}"'] \arrow[r, "f"] & tok(\mathcal{S}_2) \arrow[u, "state_{\mathcal{S}_2}"'] \end{tikzcd}$$

Jeśli $f : S \rightrightarrows S'$ jest rozkowaniem to wprowadzamy następujące oznaczenia

1. S_0 jest podprzestrzenią S $(S_0 \subseteq S)$ jeśli para funkcji $i = (i^{\wedge}, i^{\vee})$, która jest identycznością na stanach i tokenach jest rozkowaniem $i : S_0 \rightrightarrows S$.

   Jeśli S_0 jest podprzestrzenią S to przez $f[S_0]$ (obraz S_0 przy f)

2. Jeśli S_0 jest podprzestrzenią S to przez $f[S_0]$ (obraz S_0 przy f) jest podprzestrzenią S', której tokeny należą do $f^{\vee}(tok(S_0))$ a stany należą do $f^{\wedge}(typ(S_0))$.

3. Podobnie, jeśli jeśli $S_1 \subseteq S'$ to przez $f^{-1}[S_1]$ oznaczamy podprzestrzeń S ze zbiorem tokenów $f^{\vee -1}[tok(S_1)]$ i zbiorem stanów $f^{\wedge -1}[typ(S_1)]$.

Uzasadnienie: $f^{-1}[S_1]$ jest podprzestrzenią S

Niech $a \in tok(f^{-1}[S_1])$. Wtedy $f(a) \in tok(S_1)$.

Stąd $state_S(f(a))$ jest stanem S_1, bo $S_1 \subseteq S$.

Ale $state_S(f(a)) = f(state_S(a))$ a stąd $state(a)$

jest stanem w $f^{-1}[S_1]$

Zdarzenia

Klasyfikacja zdarzeń $Evt(S)$, gdzie S jest przestrzenią stanów ma jako tokeny tokeny S, a typami są zbiory tokenów: $a \models_{Evt(S)} \alpha$ wtw $state_S(a) \in \alpha$.

Niech S_1, S_2 będą przestrzeniami stanów oraz ~~f:~~ $f = (f^\wedge, f^\vee)$, gdzie $f^\wedge : typ(S_1) \to typ(S_2)$, $f^\vee : tok(S_2) \to tok(S_1)$

Definiujemy $Evt(f) : Evt(S_2) \rightleftarrows Evt(S_1)$ następująco:

$$Evt(f)^\vee(a) = f^\vee(a) \quad \text{dla } a \in tok(S_1)$$

$$Evt(f)^\wedge(\alpha) = f^{-1}[\alpha] \quad \text{dla } \alpha \in typ(Evt(S_2)).$$

Fakt Dla zadanych przestrzeni stanów S_1, S_2 następujące warunki są równoważne

1. $f : S_1 \rightrightarrows S_2$ (jest rzutowaniem)
2. $Evt(f) : Evt(S_2) \rightleftarrows Evt(S_1)$ (jest infomorfizmem).

$1 \to 2$ $f : S_1 \rightrightarrows S_2$; $a \in tok(Evt(S_1))$, $\alpha \in typ(Evt(S_2))$

$$\begin{aligned} Evt(f)(a) \models_{Evt_{S_2}} \alpha \quad & \text{wtw} \quad state_{S_2}(f(a)) \in \alpha \\ & \text{wtw} \quad f(state_{S_1}(a)) \in \alpha \\ & \text{wtw} \quad state_{S_1}(a) \in f^{-1}[\alpha] \\ & \text{wtw} \quad a \models_{Evt(S_1)} Evt(f)(\alpha). \end{aligned}$$

$\mathbb{A}$ – klasyfikacja

$$typ(a) = \{ \alpha \in typ(\mathbb{A}) : a \models_{\mathbb{A}} \alpha \}$$

$$state_{\mathbb{A}}(a) = (typ(a), \; typ(\mathbb{A}) - typ(a)).$$

Boole$(\mathbb{A})$ – klasyfikacja, w której

- tokeny są tokenami z $\mathbb{A}$
- typy są dowolnymi ~~parami~~ zbiorami (Γ, Δ) zbiorów typów $\mathbb{A}$ tworzącymi podział $(\Gamma \cup \Delta = typ(\mathbb{A}), \; \Gamma \cap \Delta = \emptyset)$
- $a \models_{Boole(\mathbb{A})} \alpha$ wtt $state_{\mathbb{A}}(a) \in \alpha$

$$\eta_{\mathbb{A}} = (\eta^{\wedge}_{\mathbb{A}}, \eta^{\vee}_{\mathbb{A}}) \qquad \eta^{\wedge}_{\mathbb{A}} : typ(\mathbb{A}) \longrightarrow typ(Boole(\mathbb{A})), \quad \eta^{\vee}_{\mathbb{A}} : tok(\mathbb{A}) \longrightarrow tok(\cancel{Boole}(\mathbb{A})) = tok(Boole(\mathbb{A}))$$

$$\eta^{\wedge}_{\mathbb{A}}(\alpha) = \{ \underbrace{(\Gamma, \Delta)}_{\text{podział } typ(\mathbb{A})} : \alpha \in \Gamma \}$$

$$\eta^{\vee}_{\mathbb{A}}(a) = a$$

Mamy wtedy $\eta_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightleftarrows Boole(\mathbb{A})$ bo $\underbrace{\eta^{\vee}_{\mathbb{A}}(a) \models_{\mathbb{A}} \alpha}_{\eta^{\vee}_{\mathbb{A}}(a) = a}$ wtt $a \models_{Boole(\mathbb{A})} \eta^{\wedge}_{\mathbb{A}}(\alpha)$

$\updownarrow$ ~~$state_{\mathbb{A}}$~~ $\qquad\qquad\qquad\qquad \updownarrow$ def

$\alpha \in typ(a) \quad \xleftrightarrow{\text{z def.}} \quad state_{\mathbb{A}}(a) \in \eta_{\mathbb{A}}(\alpha)$

Teorie regularne

Teoria jest parą $T = (\Sigma', \vdash)$ gdzie $\vdash$ jest relacją konsekwencji na Σ

tzn. $\vdash$ jest relacją między podzbiorami Σ.

Teoria $T = (\Sigma, \vdash)$ jest regularna jeśli spełnia warunki (1-3).

Teoria klasyfikacji $Th(\mathcal{A}) = \{(\Gamma, \Delta) : \Gamma, \Delta \subseteq typ(\mathcal{A})\ \&\ \Gamma \models_{\mathcal{A}} \Delta\}$.

Fakt. $Th(\mathcal{A}) = (typ\,\mathcal{A}, \models_{\mathcal{A}})$ generowana przez $\mathcal{A}$ spełnia n-ce warunki (za $\vdash, \Sigma$ należy podstawić $\models_{\mathcal{A}}$, $typ(\mathcal{A})$)

dla dowolnych podzbiorów $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta', \Sigma', \Sigma_0, \Sigma_1$ zbioru Σ

1. $\alpha \vdash \alpha$ (identyczność) $\alpha \in \Sigma$
2. jeśli $\Gamma \vdash \Delta$ to $\Gamma, \Gamma' \models \Delta, \Delta'$ (osłabienie)
3. (cięcie globalne) jeśli $\Gamma, \Sigma_0 \vdash \Delta, \Sigma_1$ dla każdego podziału (Σ_0, Σ_1) zbioru Σ' to $\Gamma \vdash \Delta$

(1,2) są oczywiste. Aby wykazać (3) przypuśćmy, że a jest kontrprzykładem dla (Γ, Δ) tzn. non $(a \models_{\mathcal{A}} (\Gamma, \Delta))$. Niech $\Sigma' \subseteq typ(\mathcal{A})$. Definiujemy

$$\Sigma_0 = \{\alpha \in \Sigma' : a \models_{\mathcal{A}} \alpha\}$$

$$\Sigma_1 = \{\alpha \in \Sigma' : a \not\models_{\mathcal{A}} \alpha\}$$

(Σ_0, Σ_1) jest podziałem Σ'. Oczywiście a jest również kontrprzykładem dle $(\Gamma \cup \Sigma_0, \Delta \cup \Sigma_1)$.

$f : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B}$

$\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{typ}(\mathbb{A})$ lub $\mathrm{typ}(\mathbb{B})$

$\Gamma^{f} = \{ f(\gamma) : \gamma \in \Gamma \} = f[\Gamma] \subseteq \mathrm{typ}(\mathbb{B})$ gdy $\Gamma \subseteq \mathrm{typ}(\mathbb{A})$

$\Gamma^{-f} = \{ \alpha \in \mathrm{typ}(\mathbb{A}) : f(\alpha) \in \Gamma \} \subseteq \mathrm{typ}(\mathbb{A})$ gdy $\Gamma \subseteq \mathrm{typ}(\mathbb{B})$

$= f^{-1}[\Gamma]$

reguły

f-Intro : $$\frac{\Gamma^{-f} \models_{\mathbb{A}} \Delta^{-f}}{\Gamma \models_{\mathbb{B}} \Delta}$$

f-Elim : $$\frac{\Gamma^{f} \models_{\mathbb{B}} \Delta^{f}}{\Gamma \models_{\mathbb{A}} \Delta}$$

Czy reguły te zachowują prawdziwość ?

$$\boxed{f\text{-Intro}: \quad \frac{\Gamma^{-f} \models_{\mathbb{A}} \Delta^{-f}}{\Gamma \models_{\mathbb{B}} \Delta}}$$

$\Gamma^{-f} = \{\alpha \in Type(\mathbb{A}) : f(\alpha) \in \Gamma\}$

$\boxed{\Gamma, \Delta \subseteq f^{\wedge}(type(\mathbb{A}))}$!

Można założyć

Fakt. Zachowuje prawdziwość

$$\left(\forall c \in A \quad c \models_{\mathbb{A}} (\Gamma^{-f}, \Delta^{-f})\right) \longrightarrow \forall b \in B \left(b \models_{\mathbb{B}} (\Gamma, \Delta)\right)$$

Przyp. że nie tzn. $\forall c \in A \left(c \models_{\mathbb{A}} (\Gamma^{-f}, \Delta^{-f})\right)$ oraz $b_0 \not\models_{\mathbb{B}} (\Gamma, \Delta)$ dla pewnego $b_0 \in B$

tzn. $b_0 \models_{\mathbb{B}} \Gamma$ ale dla każdego $\delta \in \Delta$ $b_0 \not\models_{\mathbb{B}} \delta$

Pokażę, że $f^{\vee}(b_0)$ byłby kontrprzykładem dla $(\Gamma^{-f}, \Delta^{-f})$ w $\mathbb{A}$.

Mamy

$b_0 \models_{\mathbb{B}} \Gamma$ tzn. $b_0 \models_{\mathbb{B}} \gamma$ dla $\gamma \in \Gamma$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{f^{\vee}(b_0) \models_{\mathbb{A}} (f^{\wedge})^{-1}(\gamma) \quad \text{dla } \gamma \in \Gamma}_{f^{\vee}(b_0) \models_{\mathbb{A}} \Gamma^{-f}}$$

$b_0 \not\models_{\mathbb{B}} \delta$ dla $\delta \in \Delta$

$$\Updownarrow$$

$f^{\vee}(b_0) \not\models_{\mathbb{A}} (f^{\wedge})^{-1}(\delta)$ dla $\delta \in \Gamma$ $\longrightarrow$ $\boxed{f^{\vee}(b_0) \not\models_{\mathbb{A}} (\Gamma^{-f}, \Delta^{-f})}$

$$f : \text{Elim} \qquad \frac{\Gamma^f \models_{\mathbb{B}} \Delta^f}{\Gamma \models_{\mathbb{A}} \Delta}$$

① Czy taka reguła zachowuje prawdziwość? NIE

② Ale zachowuje nieprawdziwość tzn.

jeśli $\sim(\Gamma^f \models_{\mathbb{B}} \Delta^f)$ to $\sim(\Gamma \models_{\mathbb{A}} \Delta)$

jeśli mamy $b \in \mathbb{B}$

takie, że b jest kontrprzykładem dla (Γ^f, Δ^f) w $\mathbb{B}$

$\forall \gamma \in \Gamma^f \quad b \models_{\mathbb{B}} \gamma$

oraz $b \not\models_{\mathbb{B}} \delta$ dla $\delta \in \Delta^f$

$f(b)$ jest kontrprzykładem (Γ, Δ) w $\mathbb{A}$

Ponieważ $\mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B}$ więc

$$f^\vee(b) \models_{\mathbb{A}} \overset{\in \Gamma}{\alpha} \longleftrightarrow b \models_{\mathbb{B}} \overbrace{f^\wedge(\alpha)}^{\in \Gamma^f}$$

czyli $f^\vee(b) \models_{\mathbb{A}} \alpha$ dla $\underline{\alpha \in \Gamma}$

$$f^\vee(b) \not\models_{\mathbb{A}} \alpha \longrightarrow b \not\models_{\mathbb{B}} \overbrace{f^\wedge(\alpha)}^{\in \Delta^f}$$

—"— dla $\alpha \in \Delta$

$$f\text{-Elim: } \frac{\Gamma^f \models_{B} \Delta^f}{\Gamma \models_{A} \Delta}$$

Zachowanie niepustości

tw. Jeśli dla pewnego $b \in B$ $\quad b \not\models_{B} (\Gamma^f, \Delta^f)$

to — " — $a \in A$ $\quad a \not\models_{A} (\Gamma, \Delta)$

$f^{\vee}(b)$

$b \models_{\mathbb{B}} \Gamma^f \ \wedge \ b \not\models_{\mathbb{B}} \delta \ $ dla $\delta \in \Delta^f$

$\Updownarrow$

$f^{\vee}(b) \models_{A} (f^{\wedge})^{-1}(\gamma)$ dla $\gamma \in \Gamma^f$

$\Downarrow$

$f^{\vee}(b) \models_{A} \Gamma$

$f^{\vee}(b) \not\models_{\mathbb{A}} (f^{\wedge})^{-1}(\delta)$

dla $\delta \in \Delta^f$

$\Downarrow$

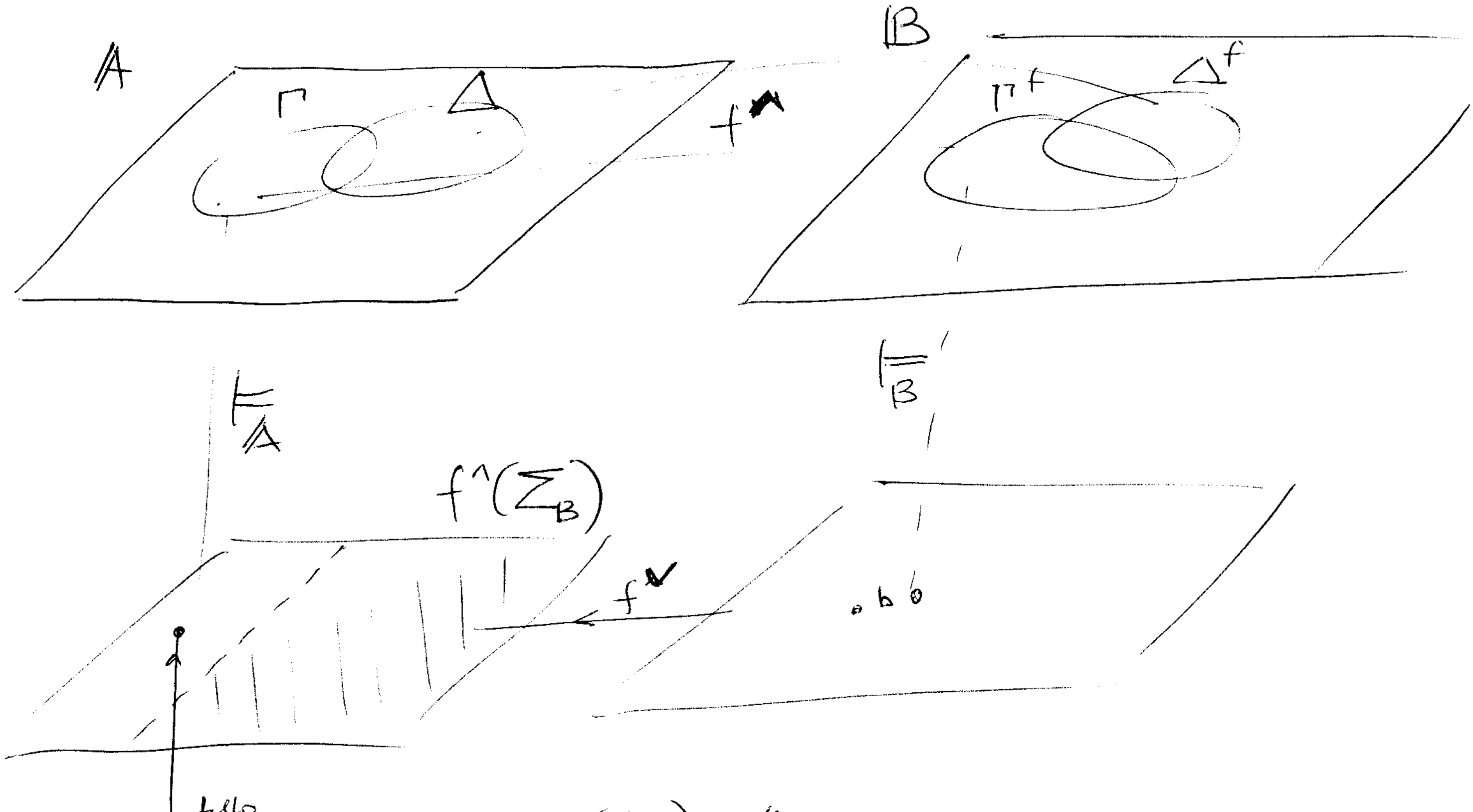
$f^{\vee}(b) \not\models_{A} \Delta$

$\S$-Elim

Dlaczego reguła nie zachowuje prawdziwości?

Czy $(\Gamma^f \models_{\mathbb{B}} \Delta^f)$ pociąga za sobą $\Gamma \models_{\mathbb{A}} \Delta$?

tzn. czy non$(\Gamma \models_{\mathbb{A}} \Delta)$ —〃— non$(\Gamma^f \models_{\mathbb{B}} \Delta^f)$?



jeśli tylko tu jest kontrprzykład dla (Γ, Δ) w $\mathbb{A}$

to nie znajdę kontrprzykładu dla (Γ^f, Δ^f) w $\mathbb{B}$

bo jeśli b byłby kontrprzykładem dla (Γ^f, Δ^f) w $\mathbb{B}$

to $f^\vee(b)$ 〃 〃 dla (Γ, Δ) w $\mathbb{A}$

ale $f^\vee(b) \in f^\wedge(\Sigma_B)$

Logiki lokalne

$\mathcal{L} = (\underbrace{tok(\mathcal{L}),\ typ(\mathcal{L}),\ \models_{\mathcal{L}}}_{cla(\mathcal{L})\text{ - klasyfikacja } \mathcal{L}},\ \vdash_{\mathcal{L}},\ N_{\mathcal{L}})$

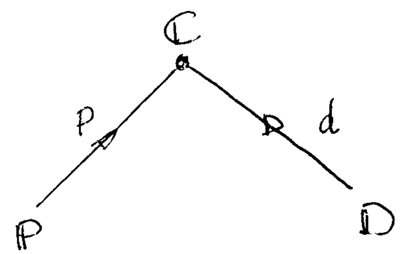
$th(\mathcal{L}) = (tok, \vdash_{\mathcal{L}})$ - teoria regularna

$N_{\mathcal{L}} \subseteq tok(\mathcal{L})$
tokeny normalne, o których zakłada się, że spełniają każdy sekwent z $th(\mathcal{L})$

$\mathcal{L}$ jest "sound" jeśli każdy token z $tok(\mathcal{L})$ jest normalny

$\mathcal{L}$ jest "complete" jeśli każdy sekwent spełniony przez każdy normalny token jest sekwentem z $th(\mathcal{L})$.

A - klasyfikacja $\quad Log(A) = (\cancel{cla}\ A,\ Th(A),\ tok(A))$.



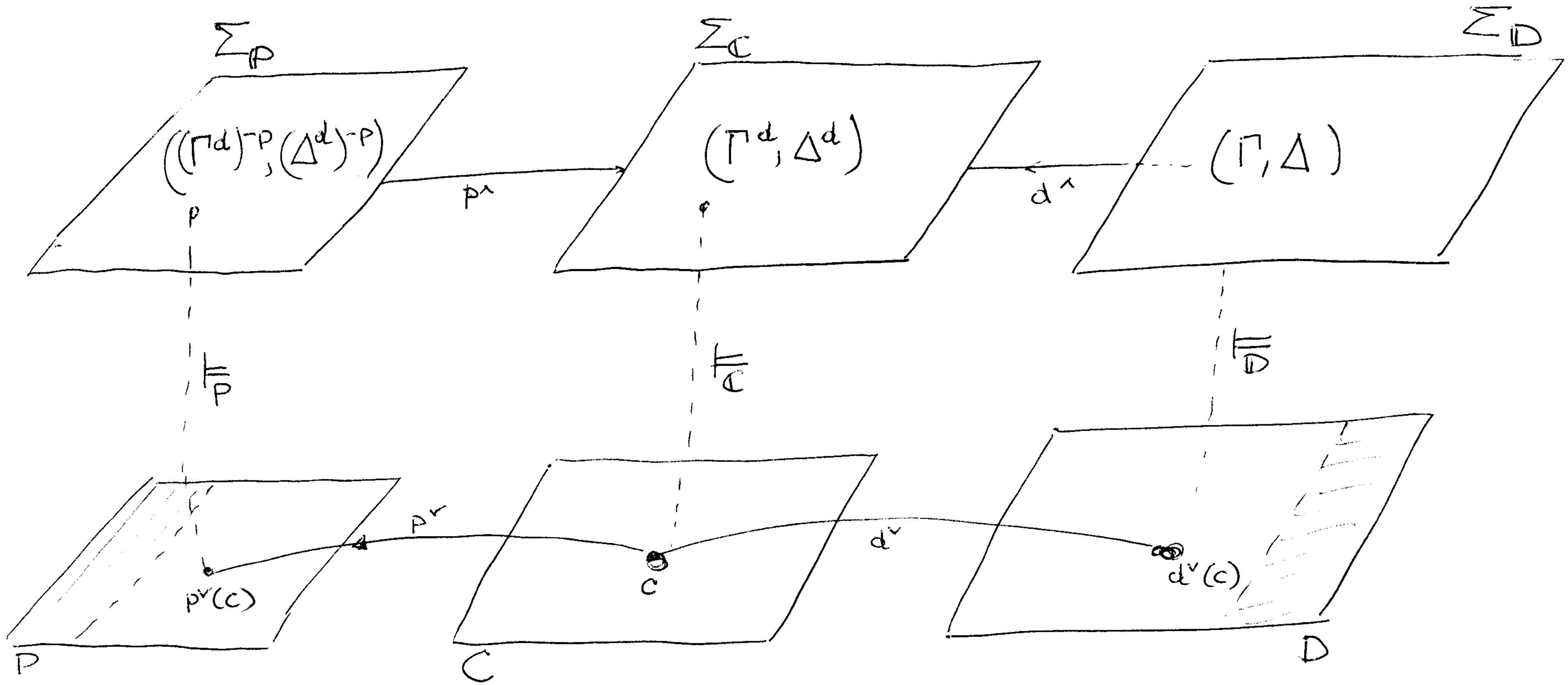
$p[\mathrm{Log}(\mathbb{P})]$ – logika $\mathbb{P}$ przeniesiona (na $\mathbb{C}$) przez p-Intro

jest "sound" ale nie musi być "complete"

$d^{-1}[p[\log(\mathbb{P})]]$

logike na $\mathbb{D}$ otrzymana z logiki $p[\log \mathbb{P}]$ ze pomocą d-Elim tracimy nie tylko "soundness" ale również completeness

Jednak sekwent w $\mathbb{D}$ ~~otrzymana~~ otrzymany z sekwentu z $\mathbb{P}$ jest stosowalny do tokenów, które są połączone w kanale informacyjnym. O innych tokenach nie możemy nic powiedzieć. Wyjaśnienie tych zdań na rys.



$p : \mathbb{P} \rightleftarrows \mathbb{C}$

$d : \mathbb{D} \rightleftarrows \mathbb{C}$

p-Intro : $\dfrac{\Gamma^{-p} \models_{\mathbb{P}} \Delta^{-p}}{\Gamma \models_{\mathbb{C}} \Delta}$

d-Elim : $\dfrac{\Gamma^{d} \models_{\mathbb{C}} \Delta^{d}}{\Gamma \models_{\mathbb{D}} \Delta}$