

Spis treści

1	Notacja	2
2	Przestrzenie unormowane	2
3	Monotoniczność p -norm względem p	5
4	Topologia na przestrzeniach liniowych	5
5	Ciągłość funkcji	7
6	Różniczkowalność funkcji	10
7	Reguła łańcuchowa	14
8	Proste równania różniczkowe	15
9	Twierdzenie o wartości średniej	16
10	Znajdowanie kresów funkcji	16
11	Stożek styczny	17
12	Ekstrema lokalne	20
13	Wielomiany i notacja wielowskaźnikowa	21
14	Wyższe pochodne i wzór Taylora	23
15	Twierdzenie o funkcji odwrotnej i uwikłanej	25
16	Dyfeomorfizmy	26
17	Rozmaitości	29
18	Ekstrema związane	32
19	Całka Lebesgue'ga	34
20	Przechodzenie do granicy pod znakiem całki	37
21	Funkcje mierzalne	39
22	Twierdzenie Fubiniego	42
23	Kolokwia	45

1 Notacja

$\mathbf{R}$ zbiór liczb rzeczywistych;

$\mathbf{N}$ zbiór liczb całkowitych dodatnich;

$\mathbf{N}_0$ zbiór liczb całkowitych nieujemnych;

$\langle u, v \rangle$ iloczyn skalarny dwóch wektorów u i v w przestrzeni Euklidesowej.

2 Przestrzenie unormowane

2.1 Definicja. Niech X będzie przestrzenią liniową. Funkcję $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy *normą* jeśli spełnia następujące warunki.

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dla $x, y \in X$.
2. $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$ dla $t \in \mathbf{R}$ oraz $x \in X$.
3. $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $x = 0$.

2.2 Definicja. Norma $\|\cdot\|$ *pochodzi od iloczynu skalarnego* $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ jeśli $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

2.3 Definicja. Niech $p \in (0, \infty)$. Definiujemy funkcję $\|\cdot\|_p : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}^n.$$

Ponadto, jeśli $p = \infty$, to kładziemy $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ dla $x \in \mathbf{R}^n$.

2.4 Definicja. Niech ϕ i ν będą normami na przestrzeni liniowej X . Mówimy, że ϕ i ν są *równoważne* jeśli istnieje liczba $1 < \Delta < \infty$ taka, że

$$\Delta^{-1}\nu(x) \leq \phi(x) \leq \Delta\nu(x) \quad \text{dla } x \in X.$$

2.5 Definicja. Niech X będzie przestrzenią liniową. Mówimy, że $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ jest *wypukła* jeśli $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ dla wszystkich $x, y \in X$ oraz $t \in (0, 1)$.

2.6 Definicja. Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Z, \|\cdot\|_Z)$ będą unormowanymi przestrzeniami liniowymi, $A \subseteq X$, zaś $x \in A$. Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow Z$ jest *ciągła w x* jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in A \quad \|x - y\|_X \leq \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_Z \leq \varepsilon.$$

2.7 Definicja. Jeśli (X, F) jest przestrzenią unormowaną, to normę operatorową na $\text{Hom}(X, \mathbf{R})$ nazywamy też *normą dualną* i oznaczamy F^* .

2.8 Definicja. Niech X, Y będą przestrzeniami liniowymi. Przez $\text{Hom}(X, Y)$ będziemy oznaczać przestrzeń liniową wszystkich przekształceń liniowych $X \rightarrow Y$.

2.9 Definicja. Niech X będzie przestrzenią unormowaną, a $c \in (0, \infty)$. Mówimy, że funkcja $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ jest *jednostajnie wypukła ze stałą c* jeśli funkcja $X \ni x \mapsto f(x) - c\|x\|$ jest wypukła.

2.10 Zadanie. Niech $\phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie ściśle wypukłą (tzn. $\phi(sx + (1-s)y) < s\phi(x) + (1-s)\phi(y)$ jeśli $x, y \in \mathbf{R}^n$ są liniowo niezależne oraz $s \in (0, 1)$), nieujemna i dodatnio jednorodna (tzn. $\phi(tx) = |t|\phi(x)$ dla $x \in \mathbf{R}^n$ oraz $t \in \mathbf{R}$). Pokaż, że ϕ jest normą.

Uwaga. Jeśli wiemy, że $\phi^{-1}[\{0\}] = \{0\}$ to zamiast ścisłej wypukłości można założyć po prostu wypukłość.

2.11 Zadanie. Pokaż, że $\|\cdot\|_p$ jest normą dla $p \in [1, \infty]$.

Wskazówka: $|a + b|^p = |a + b| \cdot |a + b|^{p-1}$.

2.12 Zadanie. Niech $p, q \in [1, \infty]$ spełniając $1/p + 1/q = 1$ (zakładamy, że $1/\infty = 0$). Pokaż, że

$$\|x\|_p = \sup\{\sum_{i=1}^n x_i y_i : y \in \mathbf{R}^n, \|y\|_q \leq 1\} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}^n.$$

2.13 Zadanie. Niech $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$ oraz $x \in \mathbf{R}^n$. Pokaż, bez użycia rachunku różniczkowego, że

$$\|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1}.$$

Wskazówka. Warto unormować.

2.14 Zadanie. Na przestrzeni liniowej X dana jest norma $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbf{R}$. Pokaż, że $\|\cdot\|$ pochodzi od iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ wtedy i tylko wtedy gdy spełniona jest *tożsamość równoległoboku*:

$$(1) \quad \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad \text{dla } v, w \in X.$$

Ponadto

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2) \quad \text{dla } v, w \in X$$

definiuje iloczyn skalarny na X taki, że $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ dla $x \in X$.

2.15 Zadanie. Opisz wszystkie normy na $\mathbf{R}$.

2.16 Zadanie. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Niech B będzie domkniętą kulą jednostkową w X , tj.

$$B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Pokaż, że B spełnia następujące warunki:

- (a) jeśli $x \in B$, to $-x \in B$ (symetria środkowa względem 0),
- (b) jeśli $x, y \in B$ oraz $t \in [0, 1]$, to $tx + (1-t)y \in B$ (wypukłość),
- (c) dla każdego $x \in X$, $x \neq 0$ istnieje $t \in (0, \infty)$ takie, że $tx \notin B$ (ograniczoność).
- (d) dla każdego $x \in X$ istnieje $t \in (0, \infty)$ takie, że $tx \in B$ (pochłanianie).

2.17 Zadanie. Niech X będzie przestrzenią liniową, a $B \subseteq X$ będzie zbiorem spełniającym warunki (a), (b), (c), (d) z zadania 2.16. Definiujemy funkcję $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem

$$\|x\| = \inf\{t \in (0, \infty) : x/t \in B\} \quad \text{dla } x \in X.$$

Pokaż, że $\|\cdot\|$ jest normą.

Uwaga. Powyższa funkcja to tzw. *funkcjonał Minkowskiego*.

Wskazówka. Bez straty ogólności (dlaczego?) można założyć, że $x/\|x\| \in B$ dla każdego $x \in X$, $x \neq 0$.

2.18 Zadanie. Naskicuj kule jednostkowe w $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_p)$ dla $p \in (0, \infty]$.

2.19 Zadanie. Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową. Pokaż, że dowolne dwie normy na X są równoważne.

2.20 Zadanie. Niech $-\infty < a < b < \infty$, $A = [a, b]$ oraz $C^1(A)$ oznacza przestrzeń liniową wszystkich funkcji ciągłych na A i różniczkowalnych w (a, b) w sposób ciągły. Definiujemy

$$\phi(f) = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

$$\text{oraz } \nu(f) = \sup\{|f(x)| + |f'(x)| : a < x < b\} \quad \text{dla } f \in C^1(A).$$

Pokaż, że ϕ i ν są normami na $C^1(A)$ ale nie są równoważne.

Uwaga. Na przestrzeniach nieskończenie wymiarowych nie wszystkie normy są równoważne.

2.21 Zadanie. Pokaż, że norma na $\mathbf{R}^2$ pochodzi od iloczynu skalarnego wtedy i tylko wtedy, gdy kula jednostkowa w tej normie jest elipsą.

2.22 Zadanie. Niech $p \in (0, 1)$. Pokaż, że istnieje liczba $K \in (0, \infty)$ taka, że dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}^n$ oraz $t \in \mathbf{R}$ funkcja $\|\cdot\|_p : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ spełnia

$$\|x\|_p = 0 \iff x = 0, \quad \|tx\|_p = |t| \cdot \|x\|_p, \quad \|x + y\|_p \leq K(\|x\|_p + \|y\|_p).$$

Uwaga: Funkcja spełniająca powyższe warunki nazywa się quasi-normą.

2.23 Zadanie. Niech $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dla $f, g \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$ kładziemy

$$\langle f, g \rangle = \text{trace}(f^* \circ g),$$

gdzie trace oznacza ślad przekształcenia liniowego. Pokazać, że $\langle \cdot, \cdot \rangle : \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k) \times \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k) \rightarrow \mathbf{R}$ jest iloczynem skalarnym.

2.24 Zadanie. Niech $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami unormowanymi. Pokazać, że funkcja $\|\cdot\| : \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$$

jest normą na $\text{Hom}(X, Y)$. Jest to tzw. *norma operatorowa*.

2.25 Zadanie. Dana jest skończenie wymiarowa przestrzeń liniowa X wyposażona w iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wówczas przekształcenie $X \ni v \mapsto \omega_v \in \text{Hom}(X, \mathbf{R})$, gdzie $\omega_v(w) = \langle v, w \rangle$ dla $w \in X$, jest izomorfizmem liniowym (*naturalnym* w kategorii przestrzeni z iloczynem skalarnym). Niech F będzie normą na X (niezwiązaną z iloczynem skalarnym) oraz F^* będzie normą dualną na $\text{Hom}(X, \mathbf{R})$. Znajdź wyrażenie opisujące normę na X odpowiadającą normie F^* przy izomorfizmie $X \simeq \text{Hom}(X, \mathbf{R})$.

2.26 Zadanie. Niech F będzie normą na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej X (bez iloczynu skalarnego). Przekształcenie $\Phi : X \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(X, \mathbf{R}), \mathbf{R})$ takie, że $\Phi(x)(\omega) = \omega(x)$ jest *naturalnym* izomorfizmem. Pokaż, że przy takim utożsamieniu mamy $F^{**} = F$.

2.27 Zadanie. Niech $k \leq n$. Zbadać, czy zbiór

$$\{f \in \text{Hom}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n) : \text{rzęd}(f) = k\}$$

jest otwarty lub domknięty w $\text{Hom}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$.

3 Monotoniczność p -norm względem p

3.1 Definicja. Niech $p \in (0, \infty)$. Definiujemy funkcję $\|\cdot\|_p : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}^n.$$

Ponadto, jeśli $p = \infty$, to kładziemy

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}^n.$$

3.2 Stwierdzenie. Jeśli $p, q \in (0, \infty]$ oraz $p \leq q$, to dla każdego $x \in \mathbf{R}^n$ zachodzi

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

Dowód. Niech $x \in \mathbf{R}^n$. Przeprowadzimy dowód tylko dla $p < q < \infty$. Korzystając z jednorodności normy możemy założyć, że

$$\|x\|_p = 1.$$

Zauważmy, że przy powyższym założeniu mamy $|x_i| \leq 1$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, czyli

$$\|x\|_\infty \leq 1.$$

Dobieramy $\alpha \in (0, 1)$ tak, by $q\alpha = p$. Piszemy

$$\begin{aligned} \|x\|_q^q &= \sum_{i=1}^n |x_i|^q = \sum_{i=1}^n |x_i|^{q\alpha + (1-\alpha)q} = \sum_{i=1}^n |x_i|^p |x_i|^{(1-\alpha)q} \\ &\leq \|x\|_\infty^{(1-\alpha)q} \sum_{i=1}^n |x_i|^p = \|x\|_\infty^{(1-\alpha)q} \|x\|_p^p \leq \|x\|_p^p = 1 = \|x\|_p^q. \end{aligned}$$

Podnosząc obie strony powyższej nierówności do potęgi $1/q$ otrzymujemy tezę. $\square$

4 Topologia na przestrzeniach liniowych

4.1 Definicja. Niech X będzie zbiorem. *Topologią na X* nazywamy rodzinę τ podzbiorów X spełniającą następujące aksjomaty

1. jeśli $A \subseteq \tau$, to $\bigcup A \in \tau$;
2. jeśli $A \subseteq \tau$ i A jest skończony, to $\bigcap A \in \tau$;
3. $\emptyset \in \tau$ oraz $X \in \tau$.

Przestrzeń z topologią nazywamy *przestrzenią topologiczną*. Elementy rodziny τ nazywamy *zbiorami otwartymi w X* . Dopełnienia elementów τ nazywamy *zbiorami domkniętymi w X* .

4.2 Definicja. Niech (X, τ) , (Y, σ) będą przestrzeniami topologicznymi oraz $f : X \rightarrow Y$. Mówimy, że f jest (τ, σ) -ciągła jeśli $f^{-1}[U] \in \tau$ dla każdego $U \in \sigma$ (tzn. przeciwobraz każdego zbioru otwartego jest otwarty).

Uwaga. Niech (X, τ) , (Y, σ) to przestrzenie topologiczne. Jeśli $\tau = 2^X$, to wszystkie funkcje typu $X \rightarrow Y$ są ciągłe. Jeśli $\tau = \{\emptyset, X\}$, to funkcja typu $X \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła tylko jeśli jest stała.

4.3 Definicja. Niech (X, τ) , (Y, σ) będą przestrzeniami topologicznymi. *Topologia produktowa* na $X \times Y$ to najmniejsza topologia $\eta \subseteq 2^{X \times Y}$ zawierająca wszystkie zbiory postaci $U \times Y$ oraz $X \times V$ dla wszystkich możliwych $U \in \tau$ oraz $V \in \sigma$.

4.4 Definicja. Przestrzeń liniową X wraz z topologią τ nazywamy *przestrzenią liniowo-topologiczną* jeśli zbiory jednopunktowe są domknięte oraz operacje liniowe, tj. dodawanie wektorów $+: X \times X \rightarrow X$ oraz mnożenie przez skalar $\cdot: \mathbf{R} \times X \rightarrow X$, są ciągłe.

4.5 Definicja. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Najmniejszą topologię zawierającą wszystkie kule otwarte w X nazywać będziemy *silną topologią na X* .

4.6 Definicja. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. *Słaba topologia na X* to najmniejsza topologia zawierająca wszystkie zbiory postaci $\omega^{-1}[I]$, gdzie $\omega \in \text{Hom}(X, \mathbf{R})$, a $I \subseteq \mathbf{R}$ jest przedziałem otwartym. Inaczej mówiąc, to najmniejsza topologia, w której wszystkie funkcjonały liniowe są ciągłe.

4.7 Zadanie. Zbadaj czy poniższe zbiory są otwarte, domknięte, zwarte, wypukłe.

1. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$,
2. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1, |y| < 2\}$,
3. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1\}$,
4. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |x + y + z| \leq 4\}$,
5. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z < 2, x - y \geq -1\}$,
6. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$,
7. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$,
8. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$,
9. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x + y - 3z \leq 7\}$,
10. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > |y|\}$,
11. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$.

4.8 Zadanie. Znajdź przykład zbioru domkniętego $F \subseteq \mathbf{R}^n$ oraz funkcji ciągłej $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ takich, że $f[F] \subseteq \mathbf{R}^m$ nie jest domknięty.

4.9 Zadanie. Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Z, \|\cdot\|_Z)$ będą unormowanymi przestrzeniami liniowymi oraz τ i σ oznaczają silne topologie na X i Z odpowiednio. Załóżmy, że $A \subseteq X$ oraz $f: A \rightarrow Z$. Pokaż, że f jest (τ, σ) -ciągła wtedy i tylko wtedy gdy f jest ciągła w sensie definicji 2.6.

4.10 Zadanie. Niech $X = \mathbf{R}$. Pokaż, że topologia τ generowana przez przedziały otwarte zadaje strukturę liniowo-topologiczną na X .

4.11 Zadanie. Pokaż, że przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ wraz z silną topologią jest przestrzenią liniowo-topologiczną.

4.12 Zadanie. Niech (X, τ) będzie przestrzenią liniowo-topologiczną *skończonego wymiaru*. Pokaż, że wszystkie funkcjonały liniowe na X , tzn. elementy $\text{Hom}(X, \mathbf{R})$, są ciągłe. Niech Y będzie przestrzenią liniowo-topologiczną. Wywnioskuj, że każde przekształcenie liniowe typu $X \rightarrow Y$ (tzn. element $\text{Hom}(X, Y)$) jest ciągłe.

4.13 Zadanie. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie *skończeniem wymiarową* przestrzenią unormowaną. Pokaż, że topologia silna i słaba się pokrywają. Innymi słowy, jeśli τ to słaba topologia na X , a σ to silna topologia na X , to

1. τ zawiera wszystkie zbiory postaci $\{x \in X : \|x - a\| < r\}$ dla $a \in X$ oraz $r \in (0, \infty)$;
2. σ zawiera wszystkie zbiory postaci $\omega^{-1}[I]$, gdzie $\omega \in \text{Hom}(X, \mathbf{R})$ oraz $I \subseteq \mathbf{R}$ jest otwarty.

5 Ciągłość funkcji

5.1 Definicja. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór $A \subseteq X$ jest *niespójny* jeśli istnieją dwa zbiory otwarte $U, V \in \tau$ takie, że

$$A \subseteq U \cup V, \quad A \cap U \neq \emptyset, \quad A \cap V \neq \emptyset, \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Zbiór A jest *spójny* jeśli nie jest niespójny.

Każdy maksymalny spójny podzbiór X nazywa się *spójną składową* X .

5.2 Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną, $\{x_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq X$ oraz $g \in X$. Mówimy, że $\{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ zbiega do g jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, g) = 0$. Piszemy wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g$.

5.3 Definicja. Niech $(X, \rho), (Y, \sigma)$ będą przestrzeniami metrycznymi, $x \in X$ oraz $f : X \rightarrow Y$. Mówimy, że f jest *ciągła w x* jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in X \quad \rho(y, x) \leq \delta \Rightarrow \sigma(f(y), f(x)) \leq \varepsilon.$$

Uwaga. Zbiór $A \subseteq \mathbf{R}^n$ będziemy najczęściej traktować jako przestrzeń metryczną z metryką $\rho(x, y) = \|x - y\|_2$ dla $x, y \in A$.

5.4 Zadanie. Wyznacz granice funkcji lub wykaż, że nie istnieją.

$$\begin{array}{lll} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}, & \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0), \\ x \neq y}} \frac{x^5 - y^5}{x - y}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^3}, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\exp(-x^2 - y^2) - 1}{\sin(x^2 + y^2)}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\exp(-1/(x^2 + y^2))}{x^4 + y^4}, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2), & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sin(x^2 + y^2)}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2}. \end{array}$$

5.5 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ będzie dana wzorem $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$. Wykaż, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ nie istnieje.}$$

5.6 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ będzie dana wzorem $f(x, y) = (x+y) \sin(1/x) \sin(1/y)$. Wykaż, że

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ istnieje} \quad \text{ale} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0 \text{ nie istnieje.}$$

5.7 Zadanie. Znajdź zbiór punktów ciągłości funkcji $f, g, k : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ oraz $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ danych wzorami

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0, \\ g(x, y) &= \frac{2xy^3 + x^2 y^3}{x^4 + 2y^4} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \quad g(0, 0) = 0, \\ h(x, y) &= \left(\frac{xy}{x+y}, \frac{x+y}{x^3 + y^3} \right) \quad \text{dla } x+y \neq 0, \quad h(x, y) = (0, 3) \quad \text{dla } x+y = 0, \\ k(x, y) &= \frac{x-y}{x^3 - y} \quad \text{dla } y \neq x^3, \quad k(x, y) = 1 \quad \text{dla } y = x^3. \end{aligned}$$

5.8 Zadanie. Wyznaczyć granice lub wykazać, że nie istnieją.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0^+, 0^+)} \sqrt{\frac{1}{x^4 + y^4} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^4 + y^4} + \frac{1}{y}}, \quad \lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{z^2 \sin(x^2 + y^2)}{x^2 y + z^2}.$$

5.9 Zadanie. Funkcje $f, g, h : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ dane są wzorami:

$$f(x, y) = \frac{y^2}{y^2 + (x - y^2)^2}, \quad g(x, y) = f(x, y)(x + y), \quad h(x, y) = |x|^{\ln |y|}.$$

Dla $k \in \{f, g, h\}$:

1. obliczyć granice iterowane $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} k(x, y)$ oraz $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} k(x, y)$;
2. obliczyć granicę funkcji k w punkcie $(0, 0)$ wzdłuż prostej opisanej równaniem $Ax + By = 0$, gdzie $A, B \in \mathbf{R}$;
3. stwierdzić i uzasadnić czy istnieje granica $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} k(x, y)$;
4. zbadać istnienie granicy $\lim_{|x| \rightarrow \infty} k(x)$.

5.10 Zadanie. Niech $n \geq 2$ oraz $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie ciągła. Ponadto wiadomo, że istnieją $a, b \in \mathbf{R}^n$ takie, że $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Pokaż, że f ma nieskończenie wiele punktów zerowych.

5.11 Zadanie. Niech $A = [1, 2] \times [0, 2\pi)$, przekształcenie $f : A \rightarrow \mathbf{R}^2$ będzie dane wzorem

$$f(x, y) = (x \cos y, x \sin y) \quad \text{oraz} \quad B = f[A].$$

Udowodnij, że f jest ciągłe i różnowartościowe ale $f^{-1} : B \rightarrow A$ nie jest ciągłe.

5.12 Zadanie. Czy poniższe odwzorowania $f, g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ są ciągłe, różnowartościowe i „na”?

$$f(x, y) = (2x + 3y + 1, 7x - y - 3), \quad g(x, y) = (2x + 3y, x^2 - y^2).$$

5.13 Zadanie. Znajdź przekształcenie ciągłe, różnowartościowe i „na” $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_2 < 1\}$.

5.14 Zadanie. Znajdź przekształcenie ciągłe i „na” $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$. Udowodnij, że jeśli f jest różnowartościowe to odwzorowanie odwrotne do f nie może być ciągłe.

Wskazówka. Obraz zbioru zwartego przez funkcję ciągłą jest zwarty.

5.15 Zadanie. Niech $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbf{R}$. Opisz wszystkie składowe spójności A .

5.16 Zadanie. Naskicuj poziomice funkcji

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = x^2 - y^2, \quad f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy \geq 0\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{xy},$$

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2, \quad f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = x^y,$$

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = (x + y)^2, \quad f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = \frac{y}{x},$$

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = |x| + y.$$

5.17 Zadanie. Niech $(X, \rho), (Y, \sigma)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Pokaż, że $f : X \rightarrow Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq Y$ przeciwobraz $f^{-1}[U]$ jest otwarty w X .

5.18 Zadanie. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Pokaż, że każda spójna składowa X jest zbiorem domkniętym w X . Czy każda spójna składowa X musi być otwarta w X ? Pokaż, że jeśli zbiór $B \subseteq X$ jest spójny oraz zarówno otwarty jak i domknięty, to musi być spójną składową X .

5.19 Zadanie. Niech

$$\text{Aut}(\mathbf{R}^n) = \{A \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) : \text{rzęd}(A) = n\}.$$

Pokaż, że $\text{Aut}(\mathbf{R}^n)$ jest niespójny.

Wskazówka. Obraz zbioru spójnego przez funkcję ciągłą jest spójny.

5.20 Zadanie. Rozważmy funkcję $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, która jest ciągła ze względu na każdą współrzędną, tzn. dla każdego $y \in \mathbf{R}$ funkcja $f_y(\cdot) := f(\cdot, y)$ jest ciągła i dla każdego $x \in \mathbf{R}$ funkcja $f_x(\cdot) := f(x, \cdot)$ jest ciągła. Czy jeśli dodatkowo założymy, że

1. dla każdego $y \in \mathbf{R}$ $(f_y)_{y \in \mathbf{R}}$ jest jednostajnie ciągła,

2. rodzina funkcji $(f_y)_{y \in \mathbf{R}}$ jest równociągła,

to zagwarantujemy ciągłość funkcji f jako funkcji dwu zmiennych? Odpowiedzi proszę uzasadnić podając dowód lub odpowiedni przykład. (Uwaga: zadanie składa się z dwóch podpunktów (a) i (b), w każdym z nich należy rozpatrzyć odpowiedni warunek.)

5.21 Zadanie. Proszę zbadać istnienie granicy

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{z^2 \sin(x^2 + y^2)}{x^2 y + z^2}.$$

5.22 Zadanie. Proszę wyznaczyć wszystkie punkty ciągłości funkcji

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{1 - \cos(xy)}{y^2} & \text{dla } y \neq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } y = 0 \end{cases}$$

6 Różniczkowalność funkcji

Niech $U \subseteq \mathbf{R}^k$ będzie otwarty, $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$, $e_1, \dots, e_k$ będzie bazą standardową $\mathbf{R}^k$.

Pochodna kierunkowa f w kierunku $v \in \mathbf{R}^k$ w punkcie $p \in U$ to wektor

$$\partial_v f(p) = D_v f(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{\mathbf{R} \ni t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \in \mathbf{R}^m.$$

Niech $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ wówczas i -ta pochodna cząstkowa f w punkcie $p \in U$ to wektor

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = D_i f(p) = D_{e_i} f(p) = \lim_{\mathbf{R} \ni t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t} \in \mathbf{R}^m.$$

Pochodna f w punkcie $p \in U$ to przekształcenie liniowe $L \in \text{Hom}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^m)$ wyznaczone jednoznacznie warunkiem

$$(2) \quad \lim_{\mathbf{R}^k \ni h \rightarrow 0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - Lh\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{lub inaczej} \quad f(p+h) = f(p) + Lh + o(\|h\|).$$

Stosuje się oznaczenia $Df(p) = L$ lub $df(p) = L$.

Uwaga. Jeśli f jest różniczkowalne w $p \in U$ (tzn. istnieje pochodna $Df(p)$), to

$$(3) \quad \partial_v f(p) = Df(p)v \quad \text{dla } v \in \mathbf{R}^k.$$

Ponadto, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe f istnieją w pewnym otoczeniu punktu p i są ciągłe w p , to f ma pochodną w p i zachodzi (3).

Wniosek praktyczny. Niech $A \subseteq U$ będzie zbiorem punktów różniczkowalności f , $B \subseteq U$ zbiorem punktów, w których wszystkie pochodne cząstkowe są ciągłe, zaś $C \subseteq U$ zbiorem punktów, w których wszystkie pochodne cząstkowe istnieją. Wówczas $\text{Int } B \subseteq A \subseteq C$. Ponadto, f jest różniczkowalna w punkcie $p \in C$ wtedy i tylko wtedy gdy przekształcenie liniowe $L \in \text{Hom}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^m)$ zadane na bazie standardowej przez $Le_i = D_i f(p)$ dla $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ spełnia (2).

6.1 Definicja. Niech $\text{Aut}(\mathbf{R}^n)$ będzie zbiorem wszystkich automorfizmów $\mathbf{R}^n$, $I \in \text{Aut}(\mathbf{R}^n)$ będzie dane przez $Ix = x$ dla $x \in \mathbf{R}^n$. Normę na $\text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ definiujemy przez $\|A\| = \sup\{\|Av\| : v \in \mathbf{R}^n, \|v\| \leq 1\}$. Standardowy iloczyn skalarny wektorów $u, v \in \mathbf{R}^n$ oznaczamy przez $\langle u, v \rangle$. Przez $\text{tr } A$ oznaczamy ślad przekształcenia liniowego $A \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$.

6.2 Zadanie. Wyznacz bezpośrednio z definicji pochodne poniższych funkcji

1. $f(x) = Ax$, gdzie $A \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$,
2. $f(x) = Ax + g(x)$, gdzie $A \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$ oraz wiadomo, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$,
3. $f(x) = \|x\|_2^4$,
4. $f(x) = B(x, x)$, gdzie $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ jest przekształceniem dwuliniowym.

6.3 Zadanie. Niech $x \in \mathbf{R}^n$. Czy istnieje taka funkcja $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, że pochodna kierunkowa $D_v f(x)$ istnieje i jest dodatnia dla wszystkich $v \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$?

6.4 Zadanie. Niech $v \in \mathbf{R}^n$, $v \neq 0$. Czy istnieje taka funkcja $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, że pochodna kierunkowa $D_v f(x)$ istnieje i *jest dodatnia* dla wszystkich $x \in \mathbf{R}^n$?

6.5 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $v, x \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $v \neq 0$. Pokaż, że jeśli $D_v f(x)$ istnieje, to

$$D_{\alpha v} f(x) = \alpha D_v f(x).$$

6.6 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $u, v, x \in \mathbf{R}^n$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. Czy z istnienia $D_v f(x)$ i $D_u f(x)$ wynika istnienie $D_{u+v} f(x)$?

6.7 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Zbadaj ciągłość f w punkcie $(0, 0)$ i wyznacz pochodną kierunkową $D_v f(0, 0)$ dla dowolnego $v \in \mathbf{R}^2$.

2. Niech $g = f^2$. Zbadaj ciągłość g w punkcie $(0, 0)$ i wyznacz pochodną kierunkową $D_v g(0, 0)$ dla dowolnego $v \in \mathbf{R}^2$.

6.8 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie taka, że $D_v f(0)$ istnieje dla każdego $v \in \mathbf{R}^2$. Czy musi zachodzić

$$D_{u+v} f(0) = D_u f(0) + D_v f(0) \quad \text{dla } u, v \in \mathbf{R}^2?$$

6.9 Zadanie. Znajdź zbiór punktów różniczkowalności podanych niżej funkcji. Dla każdej z funkcji wyznacz macierz różniczki (w bazie standardowej) tam gdzie istnieje.

1. $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$,
2. $f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$,
3. $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = xy + yz + zx$,
4. $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = \exp(xy)$,
5. $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) : x^4 + y^3 = 0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = \frac{x^5 + y^4 + x^2 y^4}{x^4 + y^3}$,
6. $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) : 1 - xy = 0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$,
7. $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

6.10 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad \text{jeśli } xy \neq 0 \quad \text{oraz} \quad f(x, y) = 0 \quad \text{jeśli } xy = 0.$$

Wykaż, że f jest ciągła i ma wszystkie pochodne kierunkowe w punkcie $(0, 0)$. Dla jakich punktów $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ funkcja f jest różniczkowalna?

6.11 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = |x|^{1/|y|} |y|^{1/|x|} \quad \text{jeśli } xy \neq 0 \quad \text{oraz} \quad f(x, y) = 0 \quad \text{jeśli } xy = 0.$$

Wyznacz zbiór punktów ciągłości oraz zbiór punktów różniczkowalności funkcji f .

6.12 Zadanie. Wykaż, że istnieje funkcja ciągła $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ taka, że funkcja $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ określona wzorem

$$F(x, y) = \frac{\exp(xy^2) - 1}{x} \quad \text{dla } x \neq 0 \text{ oraz } F(0, y) = g(y)$$

jest ciągła. Znajdź zbiór różniczkowalności tak zdefiniowanej funkcji F .

6.13 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ będzie różniczkowalna. Funkcje $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ i $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ dane są wzorami

$$g(x, y) = (5x^2 \sin y, e^{5x \cos y}), \quad h(x, y) = (4x - 3e^4 y, 6x + 4e^4 y, -x + e^4 y).$$

Zbiór $U \subseteq \mathbf{R}^2$ jest otwarty i zawiera punkt $(1, \arcsin(3/5))$. Wiadomo, że

$$f \circ g(z) = h(z) \quad \text{dla } z \in U.$$

Wyznacz macierz różniczki f w punkcie $(3, e^4)$ w bazach standardowych lub wzór określający $Df(3, e^4)$ jako funkcję.

Wskazówka. Zachodzi $g(1, \arcsin(3/5)) = (3, e^4)$.

6.14 Zadanie. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |xy| < 1\}$ oraz $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + xy)}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wykaż różniczkowalność f w punktach $(0, 0)$ oraz $(0, 2)$.

6.15 Zadanie. Wykaż, że funkcja dana przez $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin(1/\sqrt{x^2 + y^2})$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$ oraz $f(0, 0) = 0$ jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru $U = \mathbf{B}(0, 1) \subseteq \mathbf{R}^2$ ale nie jest klasy C^1 .

6.16 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Załóżmy, że $D_v f(0)$ istnieje oraz $D_{u+v} f(0) = D_u f(0) + D_v f(0)$ dla wszystkich $u, v \in \mathbf{R}^n$. Czy f jest różniczkowalna w 0?

6.17 Zadanie. Niech $s : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją gładką taką, że $s'(-1) = 0 = s'(1)$, a $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ będzie rzutowaniem na kulę jednostkową w normie $\|\cdot\|_\infty$ (czyli kwadrat), tzn.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{\|z\|_\infty} & \text{jeśli } \|z\|_\infty > 1 \\ z & \text{jeśli } \|z\|_\infty \leq 1. \end{cases}$$

Definiujemy $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ wzorem $h(x, y) = (s(x), s(y))$. Pokaż, że funkcja $h \circ f$ jest różniczkowalna na $\mathbf{R}^2$ oraz $D(h \circ f) = Dh \circ f$.

6.18 Zadanie. Niech $f : \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ będzie dane przez $f(A) = \det A$ dla $A \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Udowodnij, że

$$Df(I)A = \text{trace } A \quad \text{dla } A \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n).$$

6.19 Zadanie. Niech $A \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ oraz $t \in \mathbf{R}$. Udowodnij, że jeśli $\|tA\| < 1$, to

$$(I + tA)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j t^j A^j.$$

6.20 Zadanie. Funkcja $f : \text{Aut}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{R}^n)$ jest dana wzorem $f(A) = A^{-1}$ dla $A \in \text{Aut}(\mathbf{R}^n)$. Wyznacz $Df(I)$, a następnie $Df(X)$ dla dowolnego $X \in \text{Aut}(\mathbf{R}^n)$.

6.21 Zadanie. Niech X, Y, Z będą unormowanymi przestrzeniami liniowymi $\Omega \subseteq X$ będzie otwarty, $v \in Y$, $f : \Omega \rightarrow \text{Hom}(Y, Z)$, $g : \Omega \rightarrow Z$ będzie dana wzorem $g(x) = f(x)v$ dla $x \in \Omega$. Pokaż, że jeśli $Df(x) \in \text{Hom}(X, \text{Hom}(Y, Z))$ istnieje dla pewnego $x \in \Omega$, to

$$(Df(x)u)v = Dg(x)u \quad \text{dla każdego } u \in X.$$

6.22 Zadanie. Dana jest funkcja gładka $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ taka, że $\|\gamma'(t)\| = 1$ dla $t \in \mathbf{R}$. Niech $\tau : \mathbf{R} \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ będzie takie, że $\tau(t)$ to rzutowanie ortogonalne na przestrzeń (linię) rozpiętą przez $\gamma'(t)$. Udowodnij, że

$$\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0 \quad \text{oraz} \quad \tau'(t)(\gamma'(t)) = \gamma''(t) \quad \text{dla } t \in \mathbf{R}.$$

6.23 Zadanie. Znajdź pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f : (0, \infty) \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = x^{yz}$,
2. $f : \mathbf{R}^2 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = x \exp(y) \ln(z) + \arctan(x/z)$,
3. $f : \mathbf{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \|x\|_2$,
4. $f : \mathbf{R}^2 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = \exp(xy) + \sin^2(z) + x^z$,
5. $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x, y) = y^2 \exp(x) + x^2 \exp(y)$.

6.24 Zadanie. Wyznacz pochodną oraz gradient funkcji $f : \mathbf{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \|x\|_2$.

6.25 Zadanie. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ jeśli

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$f(z) = \begin{cases} \|z\|_2^2 \sin(\|z\|_2^{-2}) & \text{dla } z \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\} \\ 0 & \text{dla } z = 0 \in \mathbf{R}^k \end{cases}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & \text{dla } y \neq 0 \\ x & \text{dla } y = 0 \end{cases},$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}.$$

6.26 Zadanie. Znajdź pochodną funkcji $f : (0, \infty) \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = x^{yz}$ w punkcie $(1, 1, 1)$ w kierunku wektora $(1, 2, 0)$.

6.27 Zadanie. Zbadaj istnienie pochodnej kierunkowej $D_v f(p)$ jeśli

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(xy) - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases},$$

$$p = (0, 1), \quad v \in \{(1, 1), (1, 0)\}.$$

6.28 Zadanie. Dane są funkcje $f(x, y) = (x - y, x + y, 2\sqrt{xy})$ i $g(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. Określamy $F = g \circ f$.

- Wyznacz maksymalną dziedzinę funkcji F .
- Wyznacz $D_1 F$ korzystając z reguły łańcuchowej.
- Wyznacz $Df(x, y)$.
- Znajdź funkcje $g \circ f$. Wyznacz jej gradient.

6.29 Zadanie. Powierzchnię pewnego wzgórza można opisać za pomocą funkcji $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, która jest różniczkowalna w punkcie o współrzędnych (a, b) , przy czym $D_1 f(a, b) = 3$ i $D_2 f(a, b) = 2$. Wyznacz wektor:

- $v \in \mathbf{R}^2$ wskazujący kierunek największej stromizny „pod górę” w punkcie (a, b) ,
- $w \in \mathbf{R}^2$ wskazujący kierunek najszybszego spadku w punkcie (a, b) ,
- $u \in \mathbf{R}^2$ odpowiadający poziomicy przechodzącej przez (a, b) (styczny do poziomicy).
- Oblicz kąt nachylenia drogi przechodzącej przez punkt (a, b) skierowanej na północny wschód (tj. wzdłuż wektora $(1, 1)$).

6.30 Zadanie. Proszę wyznaczyć bezpośrednio z definicji (bez wyznaczania pochodnych cząstkowych) różniczkę w zerze funkcji $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$

$$f(x) = x \sin(\|x\|) + u \det(x, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}),$$

gdzie $u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ są ustalonymi wektorami. Proszę obliczyć pochodną kierunkową w zerze w kierunku wektora v_1 .

($\det(w_1, w_2, \dots, w_n)$ oznacza wyznacznik macierzy, której kolumnami są wektory $w_1, \dots, w_n$.)

7 Reguła łańcuchowa

7.1 Zadanie. Funkcja $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ jest różniczkowalna, $f(0) = \pi/2$, $D_k f(0) = k$ dla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Oblicz pochodną funkcji

$$g(t) = \cos(f(t, t^2, \dots, t^n)) \quad \text{w punkcie } t = 0.$$

7.2 Zadanie. Funkcja $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ jest dana wzorem $f(x, y) = (x^3 - x - y)(2x - y - 2)$. Wiadomo, że $Df(p) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $p \in \{(-2, -6), (-1, -2), (1, 0)\} = A$. Dla każdego $p \in A$ rozpoznać, czy f ma ekstremum lokalne w p .

7.3 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = (x^2 + y - y^2, 2xy + y).$$

Zakładając, że f jest odwracalna w otoczeniu punktu $(2, 1)$ i funkcja odwrotna jest różniczkowalna w punkcie $(4, 5)$ wyznacz pochodną funkcji odwrotnej do f w punkcie $(4, 5)$.

7.4 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ będzie taka, że dla (x, y) w pewnym otoczeniu punktu $(2, 1)$ zachodzi wzór

$$f(x^2 + y - y^2, 2xy + y) = (3x, 2y).$$

Wyznacz pochodną funkcji f w punkcie $(4, 5)$.

8 Proste równania różniczkowe

8.1 Zadanie. Funkcja $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ jest różniczkowalna i spełnia warunek

$$\sum_{i=1}^n x_i D_i f(x) \leq \sum_{i=1}^n D_i f(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbf{R}^n.$$

Wykaż, że na każdym zbiorze zwartym i wypukłym $K \subseteq \mathbf{R}^n$ funkcja f osiąga swój kres dolny w pewnym punkcie brzegu ∂K .

Wskazówka. Niech $v = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^n$. Dla $x \in \mathbf{R}^n$ zbadaj zachowanie funkcji $g(t) = f(x + t(x - v))$.

8.2 Zadanie. Niech $v \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Opisz wszystkie funkcje $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ takie, że $D_v f(x) = 0$ dla $x \in \mathbf{R}^2$.

8.3 Zadanie. Niech $v \in \mathbf{R}^2$. Opisz wszystkie funkcje $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ takie, że $D_v f(x) = 0$ dla $x \in \mathbf{R}^2$.

8.4 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie różniczkowalna. Wiadomo, że f spełnia

$$xD_1 f(x, y) + yD_2 f(x, y) = 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Wykaż, że f jest funkcją stałą.

8.5 Zadanie. Załóżmy, że $K \subseteq \mathbf{R}^2$ jest zwarty, wypukły i zawiera pewne otoczenie punktu $(0, 0)$. Dana jest funkcja ciągła $f : K \rightarrow \mathbf{R}$, różniczkowalna we wnętrzu zbioru K i spełniająca

$$xD_1 f(x, y) + yD_2 f(x, y) > 0 \quad \text{dla } (x, y) \in K \setminus \{(0, 0)\}.$$

Wykaż, że f ma globalne minimum w punkcie $(0, 0)$, a maksimum jest przyjmowane na brzegu zbioru K .

8.6 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, $g(u, v) = (u^2 - v^2, v^2 - u^2)$ oraz $z = g \circ f$. Wykaż, że

$$uD_2 z + vD_1 z = 0.$$

8.7 Zadanie. Niech

$$C = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mid \forall_{i=1,2,\dots,m} \ x_i \geq 0\}.$$

Założmy, że $f : C \rightarrow \mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą na C i różniczkowalną na $\text{int}C$, przy czym

$$\sum_{i=1}^m D_i f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{Int } C.$$

Wykaż, że $\inf_C f = \inf_{\text{int}C} f$.

9 Twierdzenie o wartości średniej

9.1 Zadanie. Niech $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ będzie otwarty i wypukły, a $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ będzie taka, że $D_1 f(x)$ i $D_2 f(x)$ istnieją dla wszystkich $x \in \Omega$. Ponadto istnieje stała $M \in (0, \infty)$ taka, że $|D_i f(x)| \leq M$ dla wszystkich $x \in \Omega$ oraz $i \in \{1, 2\}$. Pokaż, że

$$|f(x) - f(y)| \leq M \|x - y\|_1 \quad \text{dla } x, y \in \Omega$$

Czy powyższe oszacowanie będzie prawdziwe jeśli opuścimy założenie o wypukłości Ω ?

9.2 Zadanie. Niech $U \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie otwarty i łukowo spójny, $f : U \rightarrow \mathbf{R}^k$ będzie klasy C^1 , zaś $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ będzie kawałkami klasy C^1 . Kładziemy $M = \sup\{\|Df(z)\| : z \in U\}$, $x = \gamma(0)$ oraz $y = \gamma(1)$. Niech l oznacza długość krzywej γ , tj.

$$l = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt.$$

Pokaż, że

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \cdot l.$$

10 Znajdowanie kresów funkcji

10.1 Zadanie. Wyznaczyć kres górny funkcji $f(x, y) = x(y - x - 1)e^{-y}$ na zbiorze $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$.

10.2 Zadanie. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f na podanym zbiorze zwartym D .

1. $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \ x \leq y\}$,
2. $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$, a D jest dyskiem jednostkowym,
3. $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$, a D jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 2)$ i $(2, 0)$
4. $f(x, y) = xy^2$, a D jest zawartym w pierwszej ćwiartce układu obszarem ograniczonym krzywą o równaniu $x^2 + y^2 = x$ i prostą $y = 0$.

10.3 Zadanie. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f na podanym zbiorze zwartym D . Naszkicuj zbiór D .

1. $f(x, y, z) = z \sin(x^2 + y^2)$ $D = \{(x, y, z) \mid z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$,
2. $f(x, y, z) = xy + y - z$ $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y^2 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 1\}$,
3. $f(x, y, z) = x^2 z \sqrt{x^2 + y^2}$, gdzie D jest zbiorem zwartym, ograniczonym walcem $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ oraz płaszczyznami $z = 0$ i $x + z = 1$.

10.4 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją afiniczną (tzn. istnieje taki wektor $a \in \mathbf{R}^n$ i $b \in \mathbf{R}$, że $f(x) = \langle a, x \rangle + b$). Wykaż, że jeśli D jest wielościanem, to funkcja f przyjmuje swoje minimum na zbiorze D w pewnym wierzchołku.

10.5 Zadanie. Znajdź kresy funkcji na podanych zbiorach nieograniczonych

$$f(x, y) = (3x + 2y)e^{-4x^2 - y^2} \quad \text{na } \mathbf{R}^2;$$

$$g(x, y) = \frac{x^2 y}{x + 1} e^{-xy} \quad \text{na } A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < y \leq x\},$$

10.6 Zadanie. Niech $a, b, c \in \mathbf{R}$ spełniając $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Wyznacz kresy funkcji $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem

$$f(x, y) = \frac{ax + by + c}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \quad \text{dla } x, y \in \mathbf{R}.$$

10.7 Zadanie. Wyznacz kresy funkcji $f : [0, \pi]^2 \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem

$$f(x, y) = \sin(x) \sin(y) \sin(x + y) \quad \text{dla } x, y \in [0, \pi].$$

11 Stożek styczny

Definicja. Niech X będzie przestrzenią liniową. Zbiór $C \subseteq X$ nazywamy *stożkiem* jeśli

$$\forall v \in C \quad \forall t \in (0, \infty) \quad tv \in C.$$

Definicja. Niech X będzie przestrzenią unormowaną, $A \subseteq X$, $a \in A$. Definiujemy *stożek styczny* $T_a A$ jako zbiór tych $w \in X$ dla których istnieje ciąg $x_j \in A \setminus \{a\}$ taki, że

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = a \quad \text{oraz} \quad \frac{w}{\|w\|} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x_j - a}{\|x_j - a\|}.$$

11.1 Zadanie. Niech $M \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie wykresem pewnej funkcji gładkiej typu $\mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$, $p \in M$, $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ będzie gładkie i takie, że $Df(p)$ jest izomorfizmem liniowym, $v \in \mathbf{R}^n$ będzie wektorem prostopadłym do $T_p M$. Pokaż, że wektor $w = (Df(p)^{-1})^* v$ jest prostopadły do $T_{f(p)} f[M]$.

Uwaga. Dziedzina i przeciwdziedzina f wyposażone są w pewne iloczyny skalarne (niekoniecznie standardowe) definiujące pojęcia prostopadłości i względem których wyznaczone jest przekształcenie sprzężone do $Df(p)^{-1}$.

Zadanie z $\star$: Załóżmy, że $\|v\| = 1$. Oblicz $\|w\|$.

11.2 Zadanie. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 = y^2\}$. Dla każdego $z \in A$ opisz stożek styczny $T_z A$.

11.3 Zadanie. Niech $G : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ będzie dana wzorem

$$G(x, y, z, t) = (z + x^2 + y^2 - 2, z + y^2 + t^2 - 2).$$

Kładziemy $A = G^{-1}\{0\} = \{w \in \mathbf{R}^4 : G(w) = 0\}$. Opisz stożek styczny do A w punkcie $(1, 1, 0, 1)$.

11.4 Zadanie. Zbadaj istnienie pochodnej kierunkowej $D_v f(p)$ jeśli $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ jest funkcją charakterystyczną zbioru $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^5\}$ oraz $p \in M$ i v jest wektorem stycznym do M w p .

11.5 Zadanie. Niech $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^5\}$, $p \in M$, $v \in T_p M$. Dane są dwie funkcje różniczkowalne $f, g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ takie, że $f(a) = g(a)$ dla $a \in M$. Pokaż, że $Df(p)v = Dg(p)v$.

Wskazówka. Reguła łańcuchowa.

11.6 Zadanie. Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi, $\Omega \subseteq X$ będzie otwarty, $a \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow Y$ będzie klasy C^1 , $Df(a)$ będzie ciągłym przekształceniem liniowym oraz $A = f^{-1}[f(a)]$. Pokaż, że $T_a A \subseteq \ker Df(a)$.

★ *Uwaga.* Gdy poznamy *twierdzenie o funkcji uwikłanej* będziemy mogli powiedzieć więcej. Mianowicie, jeśli $\dim X < \infty$, $\dim Y < \infty$ oraz $l \in \mathbb{N}_0$ jest takie, że $\dim \ker Df(x) = l$ dla każdego $x \in A$, to $T_a A = \ker Df(a)$; zob. [Bir86, Twierdzenie 11.1].

11.7 Zadanie. Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi, $\Omega \subseteq X$ będzie otwarty, $A \subseteq \Omega$, $a \in A$, $f : \Omega \rightarrow Y$ będzie klasy C^1 . Pokaż, że $Df(a)[T_a A] \subseteq T_{f(a)} f[A]$, tzn. jeśli $v \in T_a A$, to $Df(a)v \in T_{f(a)} f[A]$. Kiedy zachodzi równość $Df(a)[T_a A] = T_{f(a)} f[A]$?

11.8 Zadanie. Niech $M \subseteq \mathbf{R}^n$, $p \in M$, $v \in T_p M$. Dane są dwie funkcje $f, g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ klasy C^1 takie, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in M$. Korzystając z zadania 11.6 pokaż, że $Df(p)v = Dg(p)v$.

11.9 Zadanie. Niech X będzie unormowaną przestrzenią liniową, $p \in X$, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. Załóżmy, że istnieje $r > 0$ takie, że $\mathbf{B}(p, r) \cap A = \mathbf{B}(p, r) \cap B$. Pokaż, że wówczas $T_p A = T_p B$.

11.10 Zadanie. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 = y^2\}$. Dla każdego $z \in A$ opisz stożek styczny $T_z A$.

11.11 Zadanie. Niech $k < n$, $A \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$.

- Założmy, że $P_1, \dots, P_l$ są k -wymiarowymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbf{R}^n$ oraz dla każdej $(n - k)$ -wymiarowej podprzestrzeni liniowej $K \subseteq \mathbf{R}^n$ istnieje $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ takie, że $P_j \cap K = \{0\}$. Pokaż, że $\text{rank}(A) = k$ wtw. wtedy gdy istnieje $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ takie, że $\dim A[P_j] = k$.
- Niech $v_1, \dots, v_n$ będzie dowolną bazą $\mathbf{R}^n$ zaś $\Lambda(n, k)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji rosnących $\sigma : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ (każda taka funkcja odpowiada wyborowi pewnych k liczb spośród n liczb). Pokaż, że rodzina $P_\sigma = \text{span}\{v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\}$ indeksowana funkcjami $\sigma \in \Lambda(n, k)$ spełnia powyższe założenia.
- Wynioskuj, że $\text{rank } A = k$ wtw. gdy macierz A (zapisana w dowolnych bazach) zawiera k liniowo niezależnych wektorów (pionowych bądź poziomych).

11.12 Zadanie. Niech $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$, $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ będzie klasy C^1 . Pokaż, że $\{x \in \mathbf{R}^n : \dim \ker Df(x) = n - k\}$ jest otwarty. *Wskazówka.* Skorzystaj z zadania 11.11.

11.13 Zadanie. Niech $G : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ będzie dana wzorem

$$G(x, y, z, t) = (z + x^2 + y^2 - 2, z + y^2 + t^2 - 2).$$

Kładziemy $A = G^{-1}\{0\}$. Opisz stożek styczny do A w punkcie $(1, 1, 0, 1)$.

Wskazówka. Należy założyć prawdziwość twierdzenia z zadania 11.6★.

11.14 Zadanie. Niech P, Q, X, Y, Z będą przestrzeniami unormowanymi, $\dim X < \infty$, $\dim Y < \infty$, $b : X \times Y \rightarrow Z$ będzie dwuliniowe, $f : P \rightarrow X$, $g : Q \rightarrow Y$ i $h(p, q) = b(f(p), g(q))$. Pokaż, że

$$\begin{aligned} Db(x, y)(u, v) &= b(x, v) + b(u, y) \quad \text{dla } x, u \in X, y, v \in Y, \\ Dh(p, q)(r, s) &= b(f(p), Dg(q)s) + b(Df(p)r, g(q)) \quad \text{dla } p, r \in P, q, s \in Q. \end{aligned}$$

11.15 Zadanie. Niech $I \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ będzie dane wzorem $Ix = x$ dla $x \in \mathbf{R}^n$. Definiujemy

$$\mathbf{O}(n) = \{A \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) : A^* \circ A = I\}.$$

Opisz równaniami przestrzeni styczną do $\mathbf{O}(n)$ w punkcie I , a następnie w dowolnym punkcie $A \in \mathbf{O}(n)$. Wyznacz wymiar $T_A \mathbf{O}(n)$.

Wskazówka. Należy założyć prawdziwość twierdzenia z zadania 11.6★.

11.16 Zadanie. Definiujemy

$$\mathbf{SL}(n) = \{A \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) : \det A = 1\}.$$

Opisz równaniami przestrzeni styczną do $\mathbf{SL}(n)$ w punkcie I , a następnie w dowolnym punkcie $A \in \mathbf{SL}(n)$.

11.17 Zadanie. Udowodnić, że jeśli funkcja różniczkowalna $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ spełnia

$$yD_1f(x, y) - xD_2f(x, y) = 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

to istnieje funkcja różniczkowalna $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ taka, że

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2) \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}.$$

11.18 Zadanie. Niech $p \in (0, \infty)$, a $f : (0, \infty)^3 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną spełniającą

$$x^{1-p}D_1f(x, y, z) = y^{1-p}D_2f(x, y, z) = z^{1-p}D_3f(x, y, z) \quad \text{dla } (x, y, z) \in (0, \infty)^3.$$

Pokaż, że istnieje funkcja $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ taka, że $f(x, y, z) = \varphi(x^p + y^p + z^p)$.

11.19 Zadanie. Niech $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Definiujemy $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem

$$g(x) = \int_0^1 f(x, t) dt \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}.$$

Pokaż, że

$$g'(x) = \int_0^1 D_1f(x, t) dt.$$

Wskazówka. Rozpatrz rodzinę funkcji $L = \{l_h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} : h \in (-1, 1)\}$ daną przez $l_h(x, y) = h^{-1}(g(x + h, y) - g(x, y))$ dla $h \in (-1, 1)$, $x, y \in \mathbf{R}$. Korzystając ze zwartości odcinka $[0, 1]$ wykaż jednostajną ciągłość $D_1f(x, y)$, a następnie pokaż, że L jest rodziną funkcji równociągłych. Dalej skorzystaj z twierdzenia Arzeli–Ascoliego by pokazać, że l_h zbiega jednostajnie przy $h \rightarrow 0$ do D_1f .

11.20 Zadanie. Niech $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie otwarty, $f : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ będzie klasy C^1 oraz $g : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ będzie dana wzorem

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt \quad \text{dla } x \in \Omega.$$

Udowodnij, że dla $x \in \Omega$ oraz $v \in \mathbf{R}^n$ zachodzi

$$Dg(x)v = \int_a^b Df(x, t)(v, 0) dt.$$

Wskazówka. Rozważ funkcję $g(a, b, c, d) = \int_a^b f(c, d, t) dt$.

11.21 Zadanie. Wyznacz pochodne cząstkowe funkcji $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem

$$h(x, y) = \int_{xy}^{x^2} f(xy^2, \exp(xy), t) dt,$$

gdzie $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ jest klasy C^1 .

11.22 Zadanie. Definiujemy

$$\mathbf{G}(n, m) = \{P \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) : P \circ P = P, P^* = P, \text{rank}(P) = m\}.$$

Jeśli $Q \in \mathbf{G}(n, m)$, to kładziemy $Q^\perp = I - Q$. Niech $P \in \mathbf{G}(n, m)$. Udowodnij, że

$$T_P \mathbf{G}(n, m) = \{A \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) : A^* = A, P \circ A \circ P = 0, P^\perp \circ A \circ P^\perp = 0\}.$$

12 Ekstrema lokalne

12.1 Zadanie. Funkcja $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ jest różniczkowalna, $p \in \mathbf{R}^n$ oraz $Df(p) = 0$. Dla $v \in \mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$ definiujemy funkcję $g_v : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem $g_v(t) = f(p + tv)$ oraz liczbę $\varepsilon(v) = \inf\{t \in (0, \infty) : g'_v(t) = 0\}$. Załóżmy, że dla każdego $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ funkcja g_v ma minimum lokalne w 0 oraz $\inf\{\varepsilon(v) : v \in \mathbb{S}^{n-1}\} > 0$. Pokaż, że wówczas f ma minimum lokalne w p .

12.2 Zadanie. Wyznacz lokalne minima i maksima funkcji

$$f(x, y, z) = \ln(1 + x^2) \cdot \cos(y) \cdot \exp(y + \sin z) \quad \text{dla } (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

12.3 Zadanie. Niech $f(x, y) = x^3y - 3x^2y + y^2$ dla $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Wyznacz wszystkie punkty krytyczne f . Dla każdego punktu krytycznego rozpoznaj, czy f ma tym punkcie lokalne ekstremum.

12.4 Zadanie. Niech

$$f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Wykaż, że f ograniczona do dowolnej prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$ ma minimum w punkcie $(0, 0)$ ale nie ma minimum w $(0, 0)$ jako funkcja dwóch zmiennych.

13 Wielomiany i notacja wielowskaźnikowa

Definicja. Niech $X_1, \dots, X_l$ i Y będą przestrzeniami liniowymi. Przestrzeń liniową wszystkich przekształceń l -liniowych typu $X_1 \times \dots \times X_l \rightarrow Y$ oznaczamy przez

$$\text{Hom}(X_1, \dots, X_l; Y).$$

W przypadku gdy $X_1 = \dots = X_l$, $\phi \in \text{Hom}(X_1, \dots, X_l; Y)$ oraz $x \in X_1$ będziemy również pisać

$$\phi x^l = \phi(x, \dots, x).$$

Definicja. Wielowskaźnikiem n -wymiarowym nazywamy każdy wektor $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Wprowadzamy ponadto oznaczenia

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}^n, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}.$$

Definicja. Jeśli $\phi \in \text{Hom}(X, \dots, X; Y)$ jest symetryczna, $v_1, \dots, v_l \in X$ oraz $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ spełnia $|\alpha| = l$, to piszemy

$$\phi v^\alpha = \phi(w_1, \dots, w_l),$$

gdzie $(w_1, \dots, w_l)$ to dowolny ciąg wektorów taki, że

$$\#\{i : w_i = v_j\} = \alpha_j \quad \text{dla } j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Definicja. Funkcję $W : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ nazwiemy *wielomianem* stopnia d jeśli dla każdego $l \in \{0, 1, \dots, d\}$ istnieje symetryczne l -liniowe przekształcenie $\phi_l \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \dots, \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^k)$ oraz

$$W(x) = \sum_{l=0}^d \phi_l x^l \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}^n.$$

Uwaga. Jeśli $\phi \in \text{Hom}(X, \dots, X; Y)$ oraz $x \in X$, to piszemy „ ϕx^l ” mając na myśli $\phi(x, \dots, x)$. Samo wyrażenie „ x^l ” nie ma dotąd formalnie nadanego sensu. Można jednak skonstruować algebrę (tj. przestrzeń liniową z dodatkową strukturą pierścienia), w której element x^l będzie l -tą potęgą x . Opiszemy tę konstrukcję wykorzystując notację [Fed69, §1].

Niech $Z = X_1 \times \dots \times X_l$ będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni liniowych $X_1, \dots, X_l$, zaś F będzie zbiorem (przestrzenią liniową) wszystkich funkcji typu $Z \rightarrow \mathbf{R}$, które są niezerowe tylko na pewnym zbiorze skończonym. Niech $f : Z \rightarrow F$ będzie dana wzorem

$$f(\xi)(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \xi = \zeta, \\ 0 & \text{jeśli } \xi \neq \zeta. \end{cases}$$

Rozważmy teraz podprzestrzeń liniową $G \subseteq F$ wygenerowaną przez wszystkie elementy postaci

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_l) + f(v_1, \dots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \dots, v_l) - f(v_1, \dots, v_{i-1}, x + y, v_{i+1}, \dots, v_l)$$

oraz $f(v_1, \dots, tv_i, \dots, v_l) - tf(v_1, \dots, v_i, \dots, v_l),$

gdzie $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, $v_j \in X_j$ dla $j \in \{1, 2, \dots, l\}$, $x, y \in X_i$ oraz $t \in \mathbf{R}$. Przestrzeń ilorazowa F/G nazywa się *iloczynem tensorowym* przestrzeni $X_1, \dots, X_l$ i jest oznaczana przez $X_1 \otimes \dots \otimes X_l$. Niech

$\pi : F \rightarrow F/G$ będzie kanonicznym rzutem, zaś $\mu = \pi \circ f$. Zauważmy, że μ jest l -liniowe. Będziemy pisać

$$\mu(v_1, \dots, v_l) = v_1 \otimes \dots \otimes v_l.$$

Rozważmy teraz przypadek, gdy wszystkie X_i są sobie równe. Iloczyn tensorowy l -kpii X , tj. przestrzeń $X \otimes \dots \otimes X$, będziemy nazywać l -tą potęgą tensorową X i oznaczać przez $\bigotimes_l X$. Połóżmy też $\bigotimes_0 X = \mathbf{R}$. Niech $\bigotimes_* X = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bigotimes_l X$ będzie sumą prostą wszystkich potęg tensorowych X . Wówczas $\bigotimes_* X$ jest algebrą (z gradacją), gdzie mnożenie wektorów, oznaczane symbolem $\otimes$, scharakteryzowane jest przez

$$\mu_l(v_1, \dots, v_l) \otimes \mu_k(v_{l+1}, \dots, v_{l+k}) = \mu_{l+k}(v_1, \dots, v_{l+k}) \quad \text{dla } v_1, \dots, v_{l+k} \in X,$$

gdzie $\mu_i : X \times \dots \times X \rightarrow \bigotimes_i X$ dla $i \in \{1, 2, \dots\}$ oznacza przekształcenie μ skonstruowane powyżej. Dla każdych przestrzeni liniowych $X_1, \dots, X_l$ oraz Y istnieje kanoniczny izomorfizm liniowy

$$(4) \quad \text{Hom}(X_1 \otimes \dots \otimes X_l; Y) \simeq \text{Hom}(X_1, \dots, X_l; Y),$$

gdzie po lewej mamy przekształcenia liniowe, zaś po prawej l -liniowe.

Symetryczne przekształcenia l -liniowe typu $X \times \dots \times X \rightarrow Y$ oznaczmy symbolem $\odot^l(X, Y)$, a jeśli $Y = \mathbf{R}$, to piszemy $\odot^l X$. Niech $\mathcal{B}X$ będzie dwustronnym ideałem w $\bigotimes_* X$ generowanym przez wszystkie elementy postaci

$$x \otimes y - y \otimes x \in \bigotimes_2 X \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Symetryczna algebra przestrzeni X to iloraz

$$\odot_* X = \bigotimes_* X / \mathcal{B}X.$$

Algebra ta przedstawia się jako suma prosta przestrzeni liniowych

$$\odot_* X = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \odot_l X,$$

$$\text{gdzie } \odot_l X = \bigotimes_l X / (\bigotimes_l X \cap \mathcal{B}X) \quad \text{dla } l \in \mathbb{N}_0.$$

Operację mnożenia w algebrze $\odot_* X$ będziemy oznaczać symbolem $\odot$, zaś elementy $\odot_l X$ będziemy nazywać *symetrycznymi l -wektorami*. Dla każdych przestrzeni liniowych X i Y oraz $l \in \mathbb{N}_0$ istnieje kanoniczny izomorfizm liniowy

$$(5) \quad \text{Hom}(\odot_l X; Y) \simeq \odot^l(X, Y),$$

gdzie po lewej mamy przekształcenia liniowe, zaś po prawej l -liniowe symetryczne.

Stosując izomorfizm (5) utożsamiamy $\phi \in \odot^l(X, Y)$ z $\varphi \in \text{Hom}(\odot_l X; Y)$. Jeśli $x \in X$, to piszemy

$$\phi x^l = \phi(x, \dots, x) = \varphi(x \odot \dots \odot x) = \varphi x^{\odot l},$$

gdzie $x^{\odot l}$ to l -ta potęga $x \in \odot_1 X \simeq X$ obliczona w algebrze $\odot_* X$. Zdefiniowaliśmy zatem formalny sens dla napisu „ x^l ”. Podobnie, jeśli $\alpha \in \mathbb{N}_0^l$ oraz $v_1, \dots, v_l \in X$, to $(v_1, \dots, v_l)^\alpha = v_1^{\odot \alpha_1} \odot \dots \odot v_l^{\odot \alpha_l}$.

13.1 Zadanie. Niech $\{w_\alpha \in \mathbf{R}^k : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq d\}$ będzie dowolną rodziną wektorów, zaś $W : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ będzie dana wzorem

$$W(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq d} w_\alpha x^\alpha \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}^n.$$

Pokaż, że W jest wielomianem.

13.2 Zadanie. Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbf{R}^k$ oraz $m \in \mathbb{N}_0$ zachodzi

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^m = \sum_{|\alpha|=m, \alpha \in \mathbb{N}_0^k} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha.$$

13.3 Zadanie. Niech X i Y to przestrzenie liniowe, $\phi \in \text{Hom}(X, \dots, X; Y)$ będzie m -liniowa i symetryczna. Wykaż, że

$$\phi(v_1 + v_2 + \dots + v_k)^m = \sum_{|\alpha|=m, \alpha \in \mathbb{N}_0^k} \frac{m!}{\alpha!} \phi v^\alpha.$$

13.4 Zadanie (Formuła polaryzacyjna). Niech X i Y to przestrzenie liniowe, $\phi \in \text{Hom}(X, \dots, X; Y)$ będzie m -liniowa i symetryczna, zaś T oznacza zbiór wszystkich funkcji typu $\{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{-1, 1\}$. Pokaż, że

$$2^m m! \phi(v_1, \dots, v_m) = \sum_{t \in T} \prod_{i=1}^m t_i \phi \left(\sum_{j=1}^m t_j v_j \right)^m \quad \text{dla } v_1, \dots, v_l \in \mathbf{R}^n.$$

Wskazówka. Zastosuj 13.3 dla $k = m$

Uwaga. To pokazuje, że ϕ jest jednoznacznie wyznaczona przez wielomian W dany wzorem $W(x) = \phi x^m$ dla $x \in \mathbf{R}^n$.

13.5 Zadanie. Niech $W : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ będzie wielomianem stopnia $d \in \mathbb{N}_0$. Pokaż, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{W(x)}{\|x\|^d} = 0 \quad \Rightarrow \quad W = 0.$$

Wskazówka. Skorzystaj z formuły polaryzacyjnej i postępuj jak w przypadku 1-wymiarowym.

14 Wyższe pochodne i wzór Taylora

Twierdzenie ([Str16, Twierdzenie 2.54]). *Założmy, że funkcja $f : \mathbf{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ jest $(k-1)$ -krotnie różniczkowalna na Ω , kula $\mathbf{B}(a, r) \subseteq \Omega$ dla pewnego $r > 0$ i $D^k f(a)$ istnieje. Wówczas, dla $\|h\| < r$,*

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \frac{1}{2!} D^2 f(a)h^2 + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a)h^k + R(h),$$

gdzie $R(h)/\|h\|^k \rightarrow 0$ dla $h \rightarrow 0$.

Twierdzenie ([Str16, Twierdzenie 2.58]). *Założmy, że $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ jest otwarty, $f \in C^k(\Omega, \mathbf{R}^m)$, $\mathbf{B}(a, \delta) \subseteq \Omega$ dla pewnego $\delta > 0$. Wówczas, dla $\|h\| < \delta$,*

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha + R_k(a, h),$$

$$\text{gdzie } R_k(a, h) = k \int_0^1 (1-t)^{k-1} \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha f(a+th) - D^\alpha f(a)) h^\alpha dt.$$

14.1 Zadanie. Niech $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ zaś $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^\alpha$ dla $x \in \mathbf{R}^n$. Pokaż, że

$$D^\alpha f(x) = \alpha! \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}^n.$$

14.2 Zadanie. Niech

$$f(x, y) = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \text{oraz} \quad f(0, 0) = 0.$$

Znajdź drugie pochodne cząstkowe funkcji f . Czy f jest klasy $C^2(\mathbf{R}^2)$?

14.3 Zadanie. Niech $f(x, y) = x \exp(xy^2)$ dla $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Wykaż, że f jest dwukrotnie różniczkowalna oraz znajdź $D^2 f(1, 1)hh$, gdzie $h \in \mathbf{R}^2$.

14.4 Zadanie. Niech $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$ oraz $g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$. Znajdź $D^2 g(t)$.

14.5 Zadanie. Niech $a \in \mathbf{R}$. Znajdź wielomian Taylora stopnia 2 w punkcie $(0, a)$ funkcji $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x, y) = \exp(xy^2)$. Następnie udowodnij, że funkcja $g : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbf{R}\} \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $g(x, y) = x^{-1}(\exp(xy^2) - 1)$ przedłuża się na całą przestrzeń $\mathbf{R}^2$ do funkcji klasy C^1 .

14.6 Zadanie. Pokaż, że jeśli $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, $a \in \Omega$, $h \in \mathbf{R}^n$, $f \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$ oraz $[a, a + h] \subseteq \Omega$, to istnieje punkt $\theta \in (0, 1)$ taki, że

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n D_i f(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_i D_j f(a + \theta h) h_i h_j.$$

Wskazówka. Skorzystaj ze wzoru Taylora z resztą w postaci Lagrange'a dla funkcji jednej zmiennej $g(t) = f(a + th)$.

14.7 Zadanie. Niech $W : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie wielomianem stopnia $d \in \mathbb{N}_0$, tzn. istnieją liczby w_α dla $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ takie, że $W(x) = \sum_{|\alpha| \leq d} w_\alpha x^\alpha$. Pokaż, że istnieją przekształcenia $A_j : \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ dla $j \in \{0, 1, 2, \dots, d\}$ takie, że A_j jest j -liniowe i symetryczne oraz

$$W(x) = \sum_{j=0}^d \frac{1}{j!} A_j x^j.$$

14.8 Zadanie. Niech (e_1, e_2) to baza standardowa $\mathbf{R}^2$. Dana jest funkcja $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$ taka, że

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - \operatorname{tg}(x) \sin(y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Oblicz $D_1 D_2 f(0, 0) = D^{(1,1)} f(0, 0) = D^2 f(0, 0)(e_1, e_2)$.

14.9 Zadanie. Dana jest funkcja $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$. Wiadomo, że

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - \exp(x - y)}{x^2 + y^2} = 2.$$

Oblicz $D_1 D_2 f(0, 0)$.

14.10 Zadanie. Funkcja $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ jest dana wzorem $f(x, y) = (x^3 - x - y)(2x - y - 2)$. Wiadomo, że $Df(p) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $p \in \{(-2, -6), (-1, -2), (1, 0)\} = A$. Dla każdego $p \in A$ rozpoznaj, czy f ma ekstremum lokalne w p .

14.11 Zadanie. Załóżmy, że $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ spełnia

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\|x\|^2} = 0.$$

Czy wynika stąd, że $D^2 f(0) = 0$?

15 Twierdzenie o funkcji odwrotnej i uwikłanej

Twierdzenie (TFO, cf. [Str16, 3.9], [Bir86, §8]). Załóżmy, że $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ jest otwarty, $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ jest klasy $\mathcal{C}^1$, $a \in \Omega$, $Df(a)$ jest izomorfizmem liniowym. Wówczas istnieją zbiory otwarte $U \subseteq \Omega$ oraz $V \subseteq \mathbf{R}^n$ takie, że $a \in U$, $f(a) \in V$, $f|U : U \rightarrow V$ jest bijekcją oraz $(f|U)^{-1} : V \rightarrow U$ jest klasy $\mathcal{C}^1$.

Twierdzenie (TFU, cf. [Str16, 3.13], [Bir86, §10]). Załóżmy, że $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ jest otwarty, $(a, b) \in \Omega$, $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ jest klasy $\mathcal{C}^1$, $\Omega_{x,*} = \{y \in \mathbf{R}^m : (x, y) \in \Omega\}$ dla $x \in \mathbf{R}^n$, $\Omega_{*,y} = \{x \in \mathbf{R}^n : (x, y) \in \Omega\}$ dla $y \in \mathbf{R}^m$, $F_{x,*} : \Omega_{x,*} \rightarrow \mathbf{R}^m$ i $F_{*,y} : \Omega_{*,y} \rightarrow \mathbf{R}^m$ dane są przez $F_{x,*}(y) = F(x, y) = F_{*,y}(x)$ dla $(x, y) \in \Omega$ oraz $DF_{a,*}(b)$ jest izomorfizmem liniowym. Wówczas istnieją zbiory otwarte $U \subseteq \mathbf{R}^n$ i $V \subseteq \mathbf{R}^m$ oraz funkcja $h : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ klasy $\mathcal{C}^1$ takie, że $a \in U$, $b \in V$, oraz

$$\{(x, y) \in U \times V : F(x, y) = F(a, b)\} = \{(x, h(x)) : x \in U\}.$$

Ponadto, $Dh(x) = -(DF_{x,*}(h(x)))^{-1} \circ DF_{*,h(x)}(x)$.

Definicja ([Str16, Definicja 3.19], [Bir86, s. 56]). Niech $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie otwarty. Przekształcenie $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ nazywamy *dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$* jeśli $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ jest klasy $\mathcal{C}^1$, f jest różnowartościowe, $f[\Omega]$ jest otwarty, oraz $f^{-1} \in C^1(f[\Omega], \mathbf{R}^n)$.

15.1 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = (x^2 + y - y^2, 2xy + y).$$

- Wyznacz wszystkie punkty, w otoczeniu których f ma funkcję odwrotną klasy $\mathcal{C}^1$.
- Wykaż, że punkt o współrzędnych $(2, 1)$ jest jednym z nich.
- Wyznacz różniczkę funkcji odwrotnej w punkcie $(4, 5)$.

15.2 Zadanie. Niech $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ będzie dana wzorem

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \quad \text{gdzie} \quad u(x, y) = x(x^3 - 3y^2), v(x, y) = y(3x^2 - y^2).$$

Czy istnieje takie otoczenie punktu $(0, 0)$ na którym F jest bijekcją?

15.3 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (x^2 - 2y + 3y^2, xy + y^2).$$

- Uzasadnij, że f zawężona do pewnego otoczenia U punktu $(1, 1)$ jest bijekcją ma pewien zbiór otwarty V zawierający $(2, 2)$.
- Wyznacz $D_2(f|U)^{-1}(2, 2)$.

15.4 Zadanie. Zbadaj czy równanie $\sin y = x$ określa jednoznacznie funkcję ciągłą $y = y(x)$ na pewnym otoczeniu punktów $(\sqrt{2}/2, \pi/4)$ oraz $(1, \pi/2)$.

15.5 Zadanie. Wykaż, że istnieje taki $\varepsilon > 0$, że dla $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ istnieje taka funkcja $y = y(x)$ klasy $\mathcal{C}^1$, że $x \exp(y(x)) + y(x) \exp(x) = 2$. Czy y jest dwukrotnie różniczkowalna w 0? Jeśli tak, wyznacz $y''(0)$.

15.6 Zadanie. Wykaż, że układ równań

$$\begin{aligned}x \exp(z + w) &= 2y - zw, \\ z^3 - w^3 &= xz + yw,\end{aligned}$$

wyznacza w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (3, 1, 1, -1)$ zmienne (z, w) jako funkcje $z = z(x, y)$, $w = w(x, y)$ klasy C^1 takie, że $z(3, 1) = 1$ oraz $w(3, 1) = -1$.

Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie różniczkowalna w $(1, -1)$ oraz $D_1 f(1, -1) = 2$, $D_2 f(1, -1) = -4$. Znajdź różniczkę funkcji $g(x, y) = f(z(x, y), w(x, y))$ w punkcie $(3, 1)$.

15.7 Zadanie. Niech $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie klasy C^1 i spełnia

$$xD_1 F(x, y) + yD_2 F(x, y) \neq 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Pokaż, że równanie $F(x/z, y/z) = 0$ określa lokalnie funkcję $z : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ taką, że

$$xD_1 z(x, y) + yD_2 z(x, y) = z(x, y).$$

15.8 Zadanie. Pokaż, że w małym otoczeniu punktu $(0, 2)$ równanie $x \exp(y) + y \exp(x) = 2$ opisuje ograniczoną funkcję różniczkowalną $y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Oblicz $y'(0)$.

15.9 Zadanie. Wykaż, że równanie

$$z^3 - xyz + y^2 = 16$$

wyznacza w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0) = (1, 4, 2)$ dokładnie jedną funkcję $z = z(x, y)$. Oblicz $D_1 z(1, 4)$ oraz $D^{(2,0)} z(1, 4)$.

15.10 Zadanie. Wykaż, że równanie $x \ln w + w \ln y = 0$ wyznacza w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0, w_0) = (1, 1, 1)$ zmienną w jako funkcję pozostałych zmiennych $w = g(x, y)$ oraz g jest klasy C^1 .

Wyznacz wielomian Taylora stopnia 2 funkcji g w punkcie $(1, 1)$.

16 Dyfeomorfizmy

16.1 Zadanie. Znajdź dyfeomorfizm zbioru U na V jeśli

$$U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > y > 0\}, \quad V = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : u^2 + 3v^2 < 1, 2v > u + |u|\}.$$

16.2 Zadanie. Niech

$$G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > \max(x, -x(2 + \sqrt{3}))\}, \quad H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}.$$

Znajdź dyfeomorfizm klasy C^1 przekształcający G na H .

Wskazówka: $2 + \sqrt{3} = \tan 75^\circ$.

16.3 Zadanie. Niech $n \geq 3$. Rozważmy zbiór $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_i > 0 \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n\}$ oraz funkcję

$$F(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1^2}{x_2}, \frac{x_2^2}{x_3}, \dots, \frac{x_{n-1}^2}{x_n}, \frac{x_n^2}{x_1} \right).$$

Wykazać, że F jest dyfeomorfizmem zbioru A na ten sam zbiór.

16.4 Zadanie. Niech $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie otwarty, a $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1 .

- Pokaż, że $F[\Omega]$ jest otwarty w $\mathbf{R}^n$.
- Pokaż, że $F[U] \subseteq \mathbf{R}^n$ jest otwarty dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq \mathbf{R}^n$.
- Pokaż, że $F[\partial U] = \partial(F[U])$ jeśli $U \subseteq \mathbf{R}^n$ jest otwarty.

16.5 Zadanie. Niech $p \in (0, \infty)$. Znajdź dyfeomorfizm przekształcający p -kulę $B = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_p < 1\}$ na $\mathbf{R}^n$.

Rozwiązanie 1 (dla $n = 2$). Zauważmy, że jeśli $(x, y) \in B$, to

$$-(1 - |y|^p)^{1/p} < x < (1 - |y|^p)^{1/p}.$$

Definiujemy $f : B \rightarrow \mathbf{R}^2$ wzorem

$$f(x, y) = \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2(1 - |y|^p)^{1/p}} \right), y \right).$$

Ewidentnie jest to funkcja klasy C^∞ . Łatwo też wypisać funkcję odwrotną. Mianowicie

$$f^{-1}(w, z) = \left(\frac{2}{\pi} (1 - |z|^p)^{1/p} \operatorname{arc tg} w, z \right).$$

Ponownie łatwo widać, że f^{-1} jest klasy C^∞ . Zatem f jest dyfeomorfizmem klasy C^∞ .

Rozwiązanie 2. Kładziemy

$$f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|_p} \quad \text{dla } x \in B.$$

Wówczas

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 + \|y\|_p} \quad \text{dla } y \in \mathbf{R}^n.$$

Rozwiązanie 3. Kładziemy

$$f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \|x\|_p \right) \frac{x}{\|x\|_p} \quad \text{dla } x \in B \setminus \{0\} \quad \text{oraz} \quad f(0) = 0.$$

Wówczas

$$f^{-1}(y) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc tg}(\|y\|_p) \frac{y}{\|y\|_p} \quad \text{dla } y \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{oraz} \quad f^{-1}(0) = 0.$$

16.6 Zadanie. Sprawdź, że f i f^{-1} są klasy $\mathcal{C}^1$. Można zacząć od wykazania, że funkcje jednej zmiennej $g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{t}$ oraz $h(t) = \frac{\operatorname{arc tg} t}{t}$ dla $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ przedłużają się do funkcji klasy $\mathcal{C}^1$ na całym $\mathbf{R}$.

16.7 Zadanie. Niech $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ będzie klasy C^1 . Załóżmy, że istnieje stała $M \in (0, \infty)$ taka, że

$$M^{-1} \|x - y\| \leq \|F(x) - F(y)\| \leq M \|x - y\| \quad \text{dla } x, y \in \mathbf{R}^n$$

(mówimy wówczas, że F jest bilipschitzowska). Pokaż, że F jest dyfeomorfizmem oraz

$$\mathbf{B}(x, M^{-1}r) \subseteq F[\mathbf{B}(x, r)] \subseteq \mathbf{B}(x, Mr) \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}^n \text{ oraz } r \in (0, \infty).$$

16.8 Zadanie. Funkcja $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ jest klasy C^1 oraz istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\langle DF(x)v, v \rangle \geq C\|v\|^2 \quad \text{dla } x, v \in \mathbf{R}^n.$$

Udowodnij, że F jest dyfeomorfizmem oraz $F[\mathbf{R}^n] = \mathbf{R}^n$.

16.9 Zadanie. Przekształcenie $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ jest dyfeomorfizmem klasy C^1 przekształcającym zbiór

$$A = \{(x, y) : y = 0\} \quad \text{na zbiór} \quad B = \{(x, y) : y = x^2\}.$$

Udowodnić, że $\sup_{x \in \mathbf{R}^2} (\|DF(x)\| + \|DF^{-1}(x)\|) = \infty$.

Wskazówka. Popatrz na obrazy kwadratów $[-R, R] \times [0, 2R]$ dla $R \in (0, \infty)$ i skorzystaj z zadania 16.7. Oszacuj liczbę kul o ustalonym promieniu, która mieści się w obrazie.

16.10 Zadanie. Niech $S = \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ oraz $R = \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_\infty = 1\}$. Udowodnić, że nie istnieje dyfeomorfizm $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ taki, że $f(S) = R$.

16.11 Zadanie. Znajdź dyfeomorfizm ze zbioru $A \subseteq \mathbf{R}^2$ na $\mathbf{R}^2$ jeśli

- A jest wnętrzem jednostkowej kuli Euklidesowej,
- A jest wnętrzem jednostkowej kuli w metryce indukowanej przez normę $\|\cdot\|_3$,
- A jest wnętrzem elipsy o równaniu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$,
- A jest wnętrzem trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$,
- A jest wnętrzem trapezu o wierzchołkach $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1/2, 1)$, $(-1/2, 1)$,
- A jest wnętrzem pięciokąta foremnego o środku w $(0, 0)$ i jednym z wierzchołków w punkcie $(1, 0)$.

16.12 Zadanie. Znajdź dyfeomorfizm ze zbioru $A \subseteq \mathbf{R}^3$ na $\mathbf{R}^3$ jeśli

- A jest wnętrzem jednostkowej kuli Euklidesowej,
- A jest wnętrzem jednostkowej kuli w metryce indukowanej przez normę $\|\cdot\|_3$,
- A jest wnętrzem czworościanu o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

16.13 Zadanie. Niech $n \in \mathbb{N}_0$ spełnia $n \geq 2$. Kładziemy

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbf{B}^0(1, n-1) &\rightarrow \partial \mathbf{B}^0(1, n) \subseteq \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}, & \Psi(z) &= (z, \sqrt{1 - \|z\|^2}), \\ \Phi : \mathbf{B}^0(1, n-1) \times (0, \infty) &\rightarrow \mathbf{R}^n, & \Phi(z, r) &= r\Psi(z). \end{aligned}$$

Pokaż, że Φ jest dyfeomorfizmem oraz istnieje funkcja wymierna $D : \mathbf{B}^0(1, n-1) \rightarrow [0, \infty)$ taka, że

$$|\det D\Phi(z, r)| = r^{n-1}D(z) \quad \text{dla } z \in \mathbf{B}^0(1, n-1) \text{ i } r \in (0, \infty).$$

16.14 Zadanie. Niech $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L < 1$, tzn. $\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|$ dla $x, y \in \mathbf{R}^n$. Funkcja $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ dana jest wzorem $f(x) = x + g(x)$. Pokaż, że f jest bijekcją oraz istnieją stałe $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ takie, że dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}^n$ zachodzą oszacowania $C_1\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq C_2\|x - y\|$. Udowodnij, że jeśli g jest klasy $\mathcal{C}^k$, to f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$.

17 Rozmaitości

Definicja. Niech $1 \leq n \leq m$ będą liczbami naturalnymi. Przekształcenie $\alpha : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ nazwiemy *izometrycznym włożeniem* jeśli α jest liniowe i spełnia

$$\langle \alpha(u), \alpha(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \text{dla } u, v \in \mathbf{R}^n.$$

Uwaga. Jeśli $\alpha : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ jest izometrycznym włożeniem, to $\pi = \alpha \circ \alpha^\top$ jest rzutem ortogonalnym w $\mathbf{R}^m$ na podprzestrzeń liniową $\text{im } \alpha$.

Definicja. Niech $n \leq m$ będą liczbami naturalnymi, zaś $\alpha : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ będzie liniowym izometrycznym włożeniem. Zbiór $M \subseteq \mathbf{R}^m$ nazywamy *rozmaitością n -wymiarową klasy $\mathcal{C}^k$* jeśli dla każdego $p \in M$ istnieją zbiory otwarte $G, H \subseteq \mathbf{R}^m$ oraz dyfeomorfizm $\Phi : G \rightarrow H$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że

$$p \in H \quad \text{oraz} \quad M \cap H = \Phi[G \cap \text{im } \alpha].$$

Twierdzenie (cf. [Str16, Twierdzenia 3.28 i 3.30]). Niech $\Omega \subseteq \mathbf{R}^{n+m}$ będzie otwarty, $g \in C^1(\Omega, \mathbf{R})$, $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^m)$ będzie submersją, $M = F^{-1}\{0\}$, $p \in M$. Jeśli $g|_M$ ma ekstremum lokalne w p , to $Dg(p)u = 0$ dla $u \in T_p M$, czyli $\ker DF(p) \subseteq \ker Dg(p) = \text{span}\{\text{grad } g(p)\}^\perp$ zatem istnieje wektor $\lambda \in \mathbf{R}^m$ taki, że $DF(p)^\top \lambda = \text{grad } g(p)$.¹ W szczególności, jeśli $m = 1$, to $\text{grad } g(p) = \lambda \text{grad } F(p)$.

Ponadto, jeśli g i F są klasy C^2 oraz $L = g - \langle \lambda, F \rangle$, to

- jeśli $D^2L(p)|_{T_p M \times T_p M} > 0$ (< 0), to $g|_M$ ma właściwe minimum (maksimum) w p ;
- jeśli $D^2L(p)(w, w) > 0 > D^2L(p)(v, v)$ dla pewnych $w, v \in T_p M$, to $g|_M$ nie ma ekstremum lokalnego w p .

17.1 Zadanie. Niech $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$ zaś $l \in \mathbb{N}_0$. Załóżmy, że

$$A = F^{-1}\{0\} \subseteq \text{Int } B, \quad \text{gdzie} \quad B = \{x \in \mathbf{R}^n : \dim \ker Df(x) = l\}.$$

Pokaż, że A jest rozmaitością różniczkową wymiaru l .

Dla jakich $l \in \mathbb{N}_0$ zbiór $\{x \in \mathbf{R}^n : \dim \ker Df(x) = l\}$ jest otwarty niezależnie od wyboru funkcji $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ klasy $\mathcal{C}^1$?

Czy założenie, że A leży we wnętrzu B jest istotne, tzn. czy można wnioskować, że A jest rozmaitością jeśli $A \subseteq B$ oraz $A \cap B \setminus \text{Int } B \neq \emptyset$?

17.2 Zadanie. Niech P będzie d -wymiarową podprzestrzenią liniową $\mathbf{R}^n$, $f : P \rightarrow P^\perp$ będzie klasy $\mathcal{C}^2$, $\|Df(x)\| < 1$ dla $x \in P$, $f(0) = 0$, $F : P \rightarrow \mathbf{R}^n$ będzie dana wzorem $F(x) = x + f(x)$ dla $x \in P$, $Q = \text{im } DF(0)$. Zauważ, że przy naturalnym utożsamieniu $\mathbf{R}^n$ z $P \times P^\perp$ zbiór $\text{im } F$ odpowiada wykresowi f . Pokaż, że istnieje funkcja $g : Q \rightarrow Q^\perp$ taka, że jeśli $G : Q \rightarrow \mathbf{R}^n$ dana jest przez $G(x) = x + g(x)$ dla $x \in Q$, to $\text{im } G = \text{im } F$. Wyznacz $D^2g(0)$ w zależności od $Df(0)$ oraz $D^2f(0)$.

Uwaga. Dla ułatwienia zapisu i obliczeń można wybrać izometryczne zanurzenia $j : \mathbf{R}^d \rightarrow P$ oraz $k : \mathbf{R}^d \rightarrow Q$ (co odpowiada wybraniu bazy dla P i Q). Wówczas $p = j^\top : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^d$ i $q = k^\top : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^d$ będą rzutami ortogonalnymi. Następnie można rozważyć przekształcenie $q \circ F \circ j : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ – czy to dyfeomorfizm?

¹Zauważ, że $\text{im } DF(p)^\top = \ker DF(p)^\perp$.

17.3 Zadanie. Niech $M \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie d wymiarową podrozmainością $\mathbf{R}^m$ klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $p_n, q_n \in M$ dla $n \in \mathbb{N}_0$. Załóżmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ oraz $p_n \neq q_n$ dla $n \in \mathbb{N}_0$. Wykaż, że istnieją liczby dodatnie $a_n \in (0, \infty)$ oraz wektory $v_n \in T_p M$ spełniające $\|v_n\| = 1$ dla $n \in \mathbb{N}_0$ takie, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(p_n - q_n) - v_n = 0.$$

Wskazówka. Niech $\varphi : U \rightarrow M$ parametryzuje M w otoczeniu punktu p_0 . Niech $x_n, y_n \in U$ będą takie, że $\varphi(x_n) = p_n$ oraz $\varphi(y_n) = q_n$. Ponieważ ma być $\|v_n\| = 1$, więc dobrym pomysłem jest położyć $a_n = \|p_n - q_n\|^{-1}$ jednak lepszym będzie przyjąć $a_n = \|D\varphi(y_0)(x_n - y_n)\|^{-1}$. Przydatne może też okazać się twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji jednej zmiennej.

17.4 Zadanie. (Porównaj [Fed69, 3.1.19]) Niech $n, \mu, k \in \mathbb{N}_0$, $\mu, k \geq 1$, $\mu \leq n$, oraz $B \subseteq \mathbf{R}^n$. Pokaż, że następujące warunki są równoważne.

1. B jest rozmainością wymiaru μ klasy $\mathcal{C}^k$.
2. **[Prostowanie]** Dla każdego $b \in B$ istnieje otoczenie T punktu b w $\mathbf{R}^n$, dyfeomorfizm $\sigma : T \rightarrow \sigma[T] \subseteq \mathbf{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^k$ oraz μ -wymiarowa podprzestrzeń liniowa Z w $\mathbf{R}^n$ takie, że

$$\sigma[B \cap T] = Z \cap \text{im } \sigma.$$

3. **[Poziomica]** Dla każdego $b \in B$ istnieje otoczenie T punktu b w $\mathbf{R}^n$ oraz przekształcenie $f : T \rightarrow \mathbf{R}^i$ klasy $\mathcal{C}^k$, gdzie $i \geq n - \mu$, takie, że

$$B \cap T = f^{-1}\{f(b)\}, \quad \dim \text{im } Df(x) = n - \mu \quad \text{dla } x \in T.$$

4. **[Parametryzacja]** Dla każdego $b \in B$ istnieje zbiór otwarty Q w $\mathbf{R}^m$, gdzie $m \geq \mu$, oraz funkcja $f : Q \rightarrow \mathbf{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że f przekształca każdy otwarty podzbiór Q na otwarty podzbiór w B oraz

$$b \in \text{im } f, \quad \dim \text{im } Df(x) = \mu \quad \text{dla } x \in Q.$$

5. **[Mapa]** Dla każdego $b \in B$ istnieje otoczenie T punktu b w $\mathbf{R}^n$, wypukły i otwarty podzbiór V w $\mathbf{R}^\mu$ oraz przekształcenia $\phi : T \rightarrow V$ i $\psi : V \rightarrow T$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że

$$B \cap T = \text{im } \psi, \quad \phi \circ \psi = \text{id}_V.$$

6. **[Wykres]** Dla każdego $b \in B$ istnieje otoczenie T punktu b w $\mathbf{R}^n$ oraz izometryczne włożenie $\alpha : \mathbf{R}^\mu \rightarrow \mathbf{R}^n$ takie, że kładąc $p = \alpha^\top$ mamy

$$\begin{aligned} p|_{B \cap T} \text{ jest różnowartościowe,} \quad p[B \cap T] = p[T] \text{ jest wypukły,} \\ (p|_{B \cap T})^{-1} : p[T] \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ jest klasy } \mathcal{C}^k, \quad D(p|_{B \cap T})^{-1}(p(b)) = \alpha. \end{aligned}$$

17.5 Zadanie. Niech $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1 , a $M \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie rozmainością klasy C^1 . Pokaż, że $\varphi[M]$ też jest rozmainością klasy C^1 .

17.6 Zadanie. Niech $P \subseteq \mathbf{R}^n$ będą k -wymiarowymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbf{R}^n$, $f : P \rightarrow P^\perp$ będzie klasy C^1 , $M = \{x + f(x) : x \in P\} \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie wykresem funkcji f , $x_0 \in P$, $a = x_0 + f(x_0) \in M$. Pokaż, że istnieją zbiory otwarte $U \subseteq T_a M$ i $V \subseteq P$ oraz funkcja $g : U \rightarrow T_a M^\perp$ klasy C^1 takie, że

$$x_0 \in V, \quad 0 \in U, \quad Dg(0) = 0, \quad g(0) = 0, \\ \{x + f(x) : x \in V\} = \{a + y + g(y) : y \in U\}.$$

Wskazówki. Niech $\alpha, \beta : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ będą izometrycznymi włożeniami takimi, że $\alpha[\mathbf{R}^k] = P$ oraz $\beta[\mathbf{R}^k] = T_a M$ (zauważ, że wówczas $\alpha \circ \alpha^\top \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ jest rzutem ortogonalnym na P). Niech $F : P \rightarrow \mathbf{R}^n$ będzie dana przez $F(x) = x + f(x)$ dla $x \in P$. Pokaż, że funkcja $h : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$ dana przez $h = \beta^\top \circ F \circ \alpha - \beta^\top(F(x_0))$ jest odwracalna na pewnym zbiorze otwartym $G \subseteq \mathbf{R}^k$ zawierającym $\alpha^\top(x_0)$. Niech $U = \beta \circ h[G] \subseteq T_a M$ oraz $\bar{g} : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ będzie dana przez $\bar{g}(z) = F \circ (h|_G)^{-1} \circ \beta^\top(z)$; wtedy $g(z) = (\bar{g}(z) - a) - \beta \circ \beta^\top(\bar{g}(z) - a)$ dla $z \in U$.

Wniosek. Jeśli $N \subseteq \mathbf{R}^n$ jest rozmaitością klasy C^1 i $a \in N$, to istnieją zbiory otwarte $U \subseteq \mathbf{R}^n$ i $V \subseteq T_a N$ zawierające a i 0 odpowiednio oraz funkcja $f : T_a N \rightarrow T_a N^\perp$ taka, że $N \cap U = \{a + x + f(x) : x \in V\}$, $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$.

17.7 Zadanie. Niech $m, n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq \min\{m, n\}$, $N \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie k -wymiarową rozmaitością klasy C^1 , a $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ będzie klasy C^1 . Załóżmy, że $D\varphi(x)|_{T_x M}$ jest rzędu k dla wszystkich $x \in M$ oraz $\varphi|_M$ jest różnowartościowa. Pokaż, że $M = \varphi[N]$ jest rozmaitością klasy C^1 .

17.8 Zadanie. Pokaż, że $\mathbf{O}(n) = \{A \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) : A^\top \circ A = I\}$ jest rozmaitością klasy C^1 wymiaru $n(n-1)/2$.

17.9 Zadanie. Rozpatrzmy funkcję $\varphi : S \rightarrow \mathbf{R}^4$ daną wzorem

$$\varphi(x, y, z) = (x^2 - y^2, 2xy, y^2 - z^2, 2yz) \quad \text{dla } (x, y, z) \in S^2,$$

gdzie $S = \{u \in \mathbf{R}^3 : \|u\|_2 = 1\}$ jest sferą dwuwymiarową. Niech $M = \varphi[S] \subseteq \mathbf{R}^4$.

- Zbadaj dla jakich $p \in S$ istnieje w $\mathbf{R}^3$ otoczenie $U \ni p$ takie, że zbiór $\varphi[U \cap S]$ jest rozmaitością klasy C^1 .
- Zbadaj dla jakich punktów $q \in M$ istnieje w $\mathbf{R}^4$ otoczenie $V \ni q$ takie, że zbiór $V \cap M$ jest rozmaitością klasy C^1 .
- Zbadaj czy prawdą jest, że $(u, v, w, t) \in M$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$4(u^2 - w^2) = 4(u + w) - 3(v^2 - t^2) \\ \text{oraz } (u + w)^2(v^2 - t^2) = (v^2 - t^2)(u + w) - (v^2 - t^2)^2.$$

Uwaga. Może się zdarzyć, że dla pewnego zbioru otwartego $U \subseteq \mathbf{R}^3$ zbiór $\varphi[S \cap U]$ jest rozmaitością ale $\varphi[S] \cap \varphi[U]$ nie jest rozmaitością nawet jeśli $\varphi|_U$ jest dyfeomorfizmem, gdyż $\varphi|_S$ nie musi być różnowartościowa.

17.10 Zadanie. Niech

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^3 + y^3 + z^4 + xyz = 4\}.$$

- Wykaż, że M jest rozmaitością klasy C^1 .
- Wyznacz przestrzeń styczną do M w punkcie $(3^{1/3}, 0, -1)$.

18 Ekstrema związane

18.1 Zadanie. Wyznacz kres dolny i górny funkcji $f(x, y, z) = xyz$ na zbiorze

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^4 + z^8 = 14\}.$$

18.2 Zadanie. Płaszczyzna $x + y + z = 12$ przecina paraboloidę $z = x^2 + y^2$. Wyznacz najwyższy i najniższy położony punkt przekroju.

18.3 Zadanie. Stożek $z^2 = x^2 + y^2$ przecina płaszczyznę o równaniu $x + 2y + 3z = 3$. Znajdź punkty tego przecięcia położone najbliżej i najdalej początku układu współrzędnych.

18.4 Zadanie. Wyznacz kres dolny i górny funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ na zbiorze

- $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 0, x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2\};$
- $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2, z = 1\}.$

18.5 Zadanie. Wyznacz kres górny i dolny funkcji $f : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ na zbiorze S jeśli

- $f(x, y) = x^2 - y^2, S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\};$
- $f(x, y) = x^2 + y^2, S = \{(x, y) : 2x + 3y = 6\};$
- $f(x, y, z) = xyz, S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z = 1\};$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, S = \{(x, y, z) : x + y + z = 1, x + 2y + 3z = 6\}.$

18.6 Zadanie. Na elipsie o równaniu $x^2 + 2y^2 = 1$ znajdź punkty, które są położone najbliżej i najdalej od prostej $x + y = 2$.

18.7 Zadanie. Znajdź zbiór wartości funkcji $f(x, y, z) = xyz$ na zbiorze $S = \{(x, y, z) : |x|^3 + |y|^3 + |z|^3 \leq 1\}.$

18.8 Zadanie. Znajdź kresy funkcji $f(x, y, z) = xy - z$ na zbiorze $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\}.$

18.9 Zadanie. Znajdź kres górny funkcji $f(x, y, z, t) = xt - yz$ na zbiorze

$$M = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : z + y + z + t = 8, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 25\}.$$

18.10 Zadanie. Niech $g(x, y) = xy$ dla $x, y \geq 0$. Ustalmy liczby $p, q > 1$ takie, że $p + q = pq$. Dla każdej stałej $c > 0$ niech

$$L_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^p/p + y^q/q = c\}.$$

Proszę wyznaczyć kresy funkcji g na zbiorze L_c , a następnie udowodnić nierówność $xy \leq x^p/p + y^q/q$.

18.11 Zadanie. Znaleźć kresy funkcji f na zbiorze S , gdzie

- $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x_1 \cdots x_m, S = \{x \in \mathbf{R}^m : \|x\|^2 = 1\};$

- $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = y + z$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq x\}$;
Wskazówka. Wykazać, że wnętrze $\text{Int } S$ jest niepustym zbiorem otwartym w $\mathbf{R}^3$, a brzeg $\partial S = S \setminus \text{Int } S$ jest rozmaitością. Szukać ekstremów lokalnych znanymi sposobami na każdym z tych zbiorów osobno.
- $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1\}$;
- $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = \frac{x}{7} + \frac{y}{5}$, $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
- $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = xy$, $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y = 1\}$;
- $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$, $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 25\}$;
- $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1\}$;
- $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = 5x + 3y$, $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 4 \sin(x) = 3 \cos(y)\}$.

Uwaga. W niektórych przykładach nie trzeba korzystać z twierdzenia Lagrange'a.

18.12 Zadanie. Znajdź kres górny funkcji $f(x, y, z) = z^4(x^2 - xy + y^2) + z^2(x^4 + y^4)$ na czworoboku o wierzchołkach $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$, $(4, 4, 0)$.

Funkcje wypukłe

18.13 Zadanie. Niech $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie normą klasy $\mathcal{C}^1$. Definiujemy $F^\top : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem

$$F^\top(y) = \sup\{\langle x, y \rangle : x \in \mathbf{R}^n, F(x) \leq 1\}.$$

1. Pokaż, że $F^\top$ jest normą.
2. Pokaż, że jeśli $y \in \mathbf{R}^n$ spełnia $F^\top(y) = 1$ to istnieje $x \in \mathbf{R}^n$ taki, że $F(x) = 1$ oraz $\text{grad } F(x) = y$.

Wskazówka. Twierdzenie Lagrange'a o ekstremach związanych.

3. Pokaż, że jeśli $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, to $F^\top(\text{grad } F(x)) = 1$.

Wskazówka. Zauważ, że $\text{grad } F(\lambda x) = \text{grad } F(x)$ dla $x \in \mathbf{R}^n$ oraz $\lambda \in \mathbf{R}$, więc można założyć, że $F(x) = 1$.

Wskazówka. Wartość $\|\text{grad } F(x)\|^{-1} \langle \text{grad } F(x), y \rangle$ można interpretować jako długość rzutu y na kierunek wyznaczany przez $\text{grad } F(x)$, $\text{grad } F(x)$ jest ortogonalny do poziomicy F , a zbiór $\{x \in \mathbf{R}^n : F(x) < 1\}$ jest wypukły.

4. Niech $S = \{x \in \mathbf{R}^n : F(x) = 1\}$ i $S^\top = \{x \in \mathbf{R}^n : F^\top(x) = 1\}$ będą sferami jednostkowymi w przestrzeniach unormowanych $(\mathbf{R}^n, F)$ i $(\mathbf{R}^n, F^\top)$. Wywnioskuj, że

$$S^\top = \text{grad } F[S].$$

Czy $\text{grad } F|_S : S \rightarrow S^\top$ jest homeomorfizmem?

5. Pokaż, że $F^{\top\top} = F$.

Uwaga. Być może łatwiej pokazać, że $F^{**} : \text{Hom}(\text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ pokrywa się z F przy naturalnym utożsamieniu $\text{Hom}(\text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \mathbf{R})$ z $\mathbf{R}^n$. W tym celu warto spojrzeć na dowód najprostszej wersji twierdzenia Hahna-Banacha; cf. [Rud91, 3.2].

18.14 Zadanie. Niech $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie normą klasy $\mathcal{C}^2$. Dla $x \in \mathbf{R}^n$ kładziemy $g(x) = \frac{1}{2}F(x)^2$ i zakładamy, że g jest *ściśle wypukła*, tzn.

$$g(tx + (1-t)y) < tg(x) + (1-t)g(y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbf{R}^n \text{ oraz } 0 < t < 1.$$

1. Pokaż, że $\text{grad } g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ jest homeomorfizmem spełniającym

$$F^\top(\text{grad } g(x)) = F(x).$$

2. Niech $y \in \mathbf{R}^n$ będzie punktem różniczkowalności $F^\top$. Pokaż, że

$$(\text{grad } g)^{-1}(y) = F^\top(y) \text{grad } F^\top(y).$$

18.15 Zadanie. Niech $1 \leq k < \infty$ będzie liczbą naturalną, $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie *jednostajnie wypukłą* normą klasy $\mathcal{C}^k$ tzn. istnieje $c > 0$ takie, że

$$D^2F(x)(u, u) \geq c\|u\|^2 \quad \text{dla } x, u \in \mathbf{R}^n, \|x\| = 1, u \perp x.$$

Niech $g(x) = \frac{1}{2}F(x)^2$.

1. Pokaż, że $\text{grad } g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ jest dyfeomorfizmem.
2. Pokaż, że $F^\top$ jest klasy $\mathcal{C}^2$.
3. Niech $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie *transformacją Legendre'a* g , tzn.

$$h(y) = \langle (\text{grad } g)^{-1}(y), y \rangle - g((\text{grad } g)^{-1}(y)) \quad \text{dla } y \in \mathbf{R}^n.$$

Pokaż, że $h(y) = \frac{1}{2}F^\top(y)^2$.

19 Całka Lebesgue'ga

Niech X będzie dowolnym zbiorem zaś H będzie rzeczywistą przestrzenią liniową, której elementami są ograniczone funkcje typu $X \rightarrow \mathbf{R}$ oraz dla każdej $h \in H$ zachodzi $|h| \in H$.

Definicja ([SG77, 2.1]). Funkcję liniową $I : H \rightarrow \mathbf{R}$ nazwiemy *całką elementarną* jeśli spełnia

1. $Ih \geq 0$ dla każdej nieujemnej funkcji $h \in H$.
2. Jeśli $h_i \in H$ dla $i \in \mathbb{N}_0$, $h_i(x) \geq h_{i+1}(x)$ dla $i \in \mathbb{N}$ i $x \in X$ oraz $\lim_{i \rightarrow \infty} h_i(x) = 0$ dla $x \in X$, to $\lim_{i \rightarrow \infty} Ih_i = 0$.

Definicja ([SG77, 2.2]). Zbiór $Z \subseteq X$ nazwiemy *zbiorem miary zero* jeśli jest pusty lub dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje niemalejący ciąg nieujemnych funkcji $\{h_i \in H : i \in \mathbb{N}_0\}$ taki, że $Ih_i < \varepsilon$ oraz

$$\sup\{h_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\} \geq 1 \quad \text{dla } x \in Z.$$

Przykład. Niech $X = \mathbf{R}^n$, a H zawiera wszystkie funkcje schodkowe typu $f = \sum_{i \in I} c_i \chi_{A_i}$, gdzie $\{A_i : i \in I\}$ jest skończonym zbiorem rozłącznych przedziałów n -wymiarowych. Całkę elementarną z f można wówczas zdefiniować jako $If = \sum_{i \in I} c_i m(A_i)$, gdzie $m(A_i)$ jest iloczynem długości boków przedziału A_i . Zbiór $E \subseteq \mathbf{R}^n$ jest miary zero wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przeliczalna rodzina A przedziałów n -wymiarowych taka, że $\sum_{B \in A} m(B) < \varepsilon$ oraz $E \subseteq \bigcup A$.

Uwaga. W poniższych zadaniach jeśli $X = \mathbf{R}^n$, to zakładamy, że H oraz I są zdefiniowane jak w przykładzie powyżej.

Definicja. Mówimy, że ciąg f_i zbiega *prawie wszędzie* do f jeśli $X \setminus \{x : \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = f(x)\}$ jest miary zero.

Będziemy pisać $f_i \nearrow f$ jeśli f_i zbiega prawie wszędzie do f oraz $f_i(x) \leq f_{i+1}(x)$ dla $i \in \mathbb{N}_0$ i prawie wszystkich $x \in X$.

Definicja ([SG77, 2.3, 2.5]). Klasa $L^+(X)$ składa się ze wszystkich funkcji $f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ dla których istnieje ciąg $h_i \in H$ taki, że $h_i \nearrow f$ oraz $\sup\{Ih_i : i \in \mathbb{N}_0\} < \infty$.

Całkę elementarną $I : H \rightarrow \mathbf{R}$ rozszerzamy do $I : L^+(X) \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem $If = \lim_{i \rightarrow \infty} Ih_i$ o ile $f \in L^+(X)$ oraz $h_i \in H$ spełnia $h_i \nearrow f$.

Przestrzeń liniowa funkcji *sumowalnych* $L(X)$ składa się ze wszystkich funkcji postaci $h = f - g$, gdzie $f, g \in L^+(X)$. Funkcję $I : L^+(X) \rightarrow \mathbf{R}$ rozszerzamy do funkcji liniowej $I : L(X) \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem $Ih = If - Ig$ jeśli $f, g \in L^+(X)$ oraz $h = f - g$. Wprowadzamy notację

$$\int_X f(x) dx = If \quad \text{dla } f \in L(X).$$

Definicja ([SG77, 2.8.1]). Funkcję $f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ nazwiemy *mierzalną* jeśli istnieje ciąg funkcji $\{f_i \in H : i \in \mathbb{N}_0\}$ który zbiega prawie wszędzie do f .

Twierdzenie ([SG77, 2.6, Corollary 1] **O zbieżności monotonicznej**). *Jeśli $C > 0$, $f_i \in L(X)$, $f_i \nearrow f$ oraz $If_i \leq C$ dla $i \in \mathbb{N}_0$, to $f \in L(X)$ oraz*

$$If = \lim_{i \rightarrow \infty} If_i.$$

Twierdzenie ([SG77, 2.7, Theorem 3] **O zbieżności zmajoryzowanej**). *Jeśli $f_i \in L(X)$ zbiega prawie wszędzie do f oraz istnieje $g \in L(X)$ taka, że*

$$|f_i(x)| \leq g(x) \quad \text{dla } i \in \mathbb{N}_0 \text{ oraz prawie wszystkich } x \in X,$$

to $f \in L(X)$ oraz $\lim_{i \rightarrow \infty} If_i = If$.

[Zobacz również [Fed69, 2.5.1 - 2.5.6].]

19.1 Zadanie. Pokaż, że $f \in L(X)$ wtedy i tylko wtedy gdy $|f| \in L(X)$.

19.2 Zadanie. Pokaż, że przeliczalna suma zbiorów miary zero jest miary zero.

19.3 Zadanie. Pokaż, że w przestrzeni $\mathbf{R}^n$ zbiór $Z \subseteq \mathbf{R}^n$ jest miary zero wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przeliczalna rodzina A przedziałów n -wymiarowych taka, że $Z \subseteq \bigcup A$ oraz $\sum_{B \in A} m(B) < \varepsilon$.

19.4 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^{n-k}$ będzie ciągłą. Pokaż, że wykres f jest zbiorem miary zero.

19.5 Zadanie. Udowodnij, że $I : L(X) \rightarrow \mathbf{R}$ jest *przeliczalnie addytywna*, tzn. $I(\sum_{i=1}^{\infty} f_i) = \sum_{i=1}^{\infty} If_i$ o ile $f_i \in L(X)$ dla $i \in \mathbb{N}_0$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \in L(X)$.

19.6 Zadanie. Niech $f \in L(\mathbf{R}^n)$, $u \in \mathbf{R}^n$ oraz $g(x) = f(x + u)$ dla $x \in \mathbf{R}^n$. Pokaż, że $g \in L(\mathbf{R}^n)$ oraz $Ig = If$.

19.7 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^{n-k}$ będzie mierzalna, zaś $G = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k} : x \in \mathbf{R}^k\}$ będzie wykresem f . Pokaż, że funkcja charakterystyczna G jest mierzalna. Wywnioskuj, że G jest miary zero.

Wskazówka. Dla $u \in \mathbf{R}^{n-k}$ połóżmy $f_u(x) = f(x) + u$ dla $x \in \mathbf{R}^k$. Jeśli $u, v \in \mathbf{R}^{n-k}$ oraz $u \neq v$, to wykresy f_u i f_v są rozłączne.

19.8 Zadanie. Pokaż, że każda rozmaitość M w $\mathbf{R}^n$ wymiaru $d < n$ jest zbiorem miary zero.

19.9 Zadanie. Pokaż, że klasyczny zbiór Cantora jest miary zero.

19.10 Zadanie. Niech $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie otwarty, a $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ będzie klasy C^1 . Pokaż, że jeśli $A \subseteq \Omega$ jest miary zero, to $\varphi[A]$ też jest miary zero.

19.11 Zadanie. Niech $A = (0, 1) \cap \mathbf{Q}$. Pokaż, że A jest miary zero. Pokaż, że jeśli A pokryjemy skończoną liczbą przedziałów to suma ich długości wynosi co najmniej 1.

19.12 Zadanie. Pokaż, że zbiory $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \in \mathbf{Q}\}$ oraz $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x - y \in \mathbf{Q}\}$ są miary zero.

19.13 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ będzie monotoniczna. Udowodnij, że f jest mierzalna.

19.14 Zadanie. Udowodnij, że poniższe funkcje są mierzalne.

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[x]}{1 + n^5[x]^2}$$

oraz $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[xy]}{1 + n^3[x^2 + y^2]}.$

19.15 Zadanie. Niech $f : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Udowodnij, że f' jest funkcją mierzalną.

19.16 Zadanie. Dla $n \in \mathbb{N}_0$ definiujemy $f_n : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem $f_n(x, y) = \exp(-n|x^2 - y|)$. Udowodnij, że ciąg f_n zbiega prawie wszędzie do funkcji zerowej.

19.17 Zadanie. Niech $f_n : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będą dane wzorem

$$f_n(x, y) = \exp\left(\sin^n(x) + \sqrt[n]{|\sin(y/n)|}\right).$$

Udowodnij, że ciąg f_n jest zbieżny prawie wszędzie i znajdź jego granicę.

19.18 Zadanie. Niech $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ oraz $f(0) = 1$. Czy f jest sumowalna na $\mathbf{R}$?

19.19 Zadanie. Podaj przykład ciągu funkcji sumowalnych $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ takiego, że f_n zbiega prawie wszędzie do pewnej funkcji sumowalnej $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ oraz

$$\int_0^1 \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx < \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

19.20 Zadanie. Niech $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ będzie mierzalna, zaś $g \in L(X)$ będzie taka, że $|f(x)| \leq g(x)$ dla prawie wszystkich $x \in X$. Pokaż, że wówczas $f \in L(X)$.

19.21 Zadanie. [ZBIORY BORELOWSKIE.] Niech $\mathcal{B}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów $\mathbf{R}^n$ powstałych przez zastosowanie przeliczalnie wielu operacji mnogościowych (suma, przecięcie, dopełnienie) na zbiorach otwartych. Pokaż, że funkcja charakterystyczna dowolnego $B \in \mathcal{B}$ jest funkcją mierzalną, a jeśli B jest ograniczony, to również sumowalną.

19.22 Zadanie. Niech $G \subseteq \mathbf{R}$ będzie otwarty i taki, że $G \subseteq [0, 1]$. Funkcja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ jest dana wzorem $f(x) = 1$ dla $x \in G$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \in [0, 1] \setminus G$. Pokaż, że $f \in L^+([0, 1])$.

19.23 Zadanie. Skonstruuj zbiór otwarty $G \subseteq \mathbf{R}$ taki, że $G \subseteq [0, 1]$, zaś funkcja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ dana przez $f(x) = 0$ dla $x \in G$ oraz $f(x) = 1$ dla $x \in [0, 1] \setminus G$ nie jest elementem $L^+([0, 1])$. [Oczywiście $f \in L([0, 1])$.]

Wskazówka. Niech G będzie sumą przedziałów (α_i, β_i) dla $i \in \mathbb{N}_0$ takich, że $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} \beta_i - \alpha_i < 1$ oraz $\overline{G} = [0, 1]$.

19.24 Zadanie. [FUNKCJA NIEMIERZALNA.] Na prostej $\mathbf{R}$ wprowadzamy relację równoważności: $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy gdy $x - y \in \mathbf{Q}$. Każda klasa równoważności jest równoliczna z $\mathbf{Q}$, a zatem przeliczalna, więc klas równoważności musi być nieprzeliczalnie wiele. Z każdej klasy równoważności $k \in \mathbf{R}/\sim$ wybierzmy dokładnie jednego reprezentanta $x_k \in [0, 1]$. Definiujemy $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ tak, że dla $k \in \mathbf{R}/\sim$ kładziemy $f(x_k) = 1$ oraz $f(y) = 0$ jeśli $y \sim x_k$, $y \neq x_k$ oraz $y \in [0, 1]$. Przedłużamy f do $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ kładąc $f(x) = f(x - [x])$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus [0, 1]$. Teraz f jest 1-okresowa. Pokaż, że f nie jest mierzalna.

Wskazówka. Z 1-okresowości mamy $\int_{[0,1]} f(x) dx = \int_{[0,1]} f(x+h) dx$ dla $h \in \mathbf{R}$. Z konstrukcji wynika również, że $\sum_{r \in \mathbf{Q}} f(x+r) = 1$ dla $x \in \mathbf{R}$.

20 Przechodzenie do granicy pod znakiem całki

Twierdzenie ([SG77, 2.6, Corollary 1] **O zbieżności monotonicznej**). *Jeśli $C > 0$, $\{f_i : i \in \mathbb{N}_0\} \subseteq L(X)$ jest niemalejącym ciągiem funkcji całkowalnych zbiegającym prawie wszędzie do funkcji f oraz $\int_X f_i \leq C$ dla $i \in \mathbb{N}_0$, to f jest całkowalna oraz*

$$\int_X f = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_X f_i.$$

Twierdzenie ([SG77, 2.7, Theorem 3] **O zbieżności zmajoryzowanej**). *Jeśli $\{f_i : i \in \mathbb{N}_0\} \subseteq L(X)$ jest ciągiem funkcji całkowalnych zbiegającym prawie wszędzie do f oraz istnieje $g \in L(X)$ taka, że*

$$|f_i(x)| \leq g(x) \quad \text{dla } i \in \mathbb{N}_0 \text{ oraz prawie wszystkich } x \in X,$$

to $f \in L(X)$ oraz $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_X f_i = \int_X f$.

Twierdzenie ([SG77, 2.10, Theorem 5] **Fubinięgo**). *Niech X, Y będą zbiorami zaś $W = X \times Y$. Załóżmy, że całki elementarne na X, Y i W określone są na przestrzeniach liniowych $H(X), H(Y)$ i $H(W)$ oraz dla każdej $h \in H(W)$ zachodzi*

(a) $h_y \in L(X)$ dla prawie wszystkich $y \in Y$, gdzie $h_y(x) = h(x, y)$ dla $x \in X$;

(b) jeśli $f(y) = \int_X h(x, y) dx$ dla $y \in Y$, to $f \in L(Y)$;

(c) $\int_W h d(x, y) = \int_Y \int_X h(x, y) dx dy$.

Wówczas własności (a), (b), (c) zachodzą również dla każdej $h \in L(W)$.

Uwaga. Przy założeniach powyższego twierdzenie własności (a), (b), (c) zachodzą również dla każdej funkcji mierzalnej i nieujemnej, tzn. jeśli $h \geq 0$ i jest mierzalna (np. ciągła prawie wszędzie) to nie trzeba wiedzieć a priori, że $\int_W h < \infty$.

20.1 Zadanie. Dla $n \in \mathbb{N}_0$ definiujemy $f_n : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem $f_n(x, y) = \exp(-n|x^2 - y|)$. Udowodnij, że ciąg f_n zbiega prawie wszędzie do funkcji zerowej.

20.2 Zadanie. Niech $f_n : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będą dane wzorem

$$f_n(x, y) = \exp\left(\sin^n(x) + \sqrt[n]{|\sin(y/n)|}\right).$$

Udowodnij, że ciąg f_n jest zbieżny prawie wszędzie i znajdź jego granicę.

20.3 Zadanie. Niech $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ oraz $f(0) = 1$. Czy f jest sumowalna na $\mathbf{R}$?

20.4 Zadanie. Podaj przykład ciągu funkcji sumowalnych $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ takiego, że f_n zbiega prawie wszędzie do pewnej funkcji sumowalnej $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ oraz

$$\int_0^1 \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx < \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

20.5 Zadanie. [Egzamin 2011/2012] Dla $n \in \mathbb{N}_0$ definiujemy $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem

$$f_n(x) = \frac{2 + \sin^n(x^2)}{1 + x^2}.$$

Wykaż, że granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]} f_n(x) dx$$

istnieje i znajdź jej wartość.

20.6 Zadanie. [Egzamin 2011/2012] Dla $n \in \mathbb{N}_0$ definiujemy $f_n : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem

$$f_n(x, y) = \sin^n(y - x) \exp(-x^2 - 3y^2).$$

Wykaż, że granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{(x, y) : x^2 + 2y^2 < n^2\}} f_n(z) dz$$

istnieje i znajdź jej wartość.

20.7 Zadanie. [Egzamin 2011/2012] Wykaż, że granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-2\pi n}^{2\pi n} \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}\right) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \exp(-2x^2) dx$$

istnieje i znajdź jej wartość.

20.8 Zadanie. Niech $y_n \in [0, 1]$ będzie dowolnym ciągiem. Czy funkcja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{|x - y_n|}}$$

jest całkowalna na $[0, 1]$?

20.9 Zadanie. Oblicz następujące granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \exp(-\cos^n(x)) dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty n(\exp(x/n) - 1) \frac{1}{1+x^4} dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty x^{-3} n \ln(1+x/n) dx.$$

20.10 Zadanie. Zbadaj istnienie i skończoność poniższej granicy.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n n(\exp(x/n) - 1) \frac{1}{1+x^4} dx.$$

20.11 Zadanie. [Egzamin 2018/2019] Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1,n]} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4 \cdot 2!} + \frac{x^3}{8 \cdot 3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2^{2n} \cdot (2n)!} \right) (x + \sin^n(x)) e^{-2x} dx.$$

20.12 Zadanie. [Egzamin 2018/2019] Niech $A_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, y > 0, (3 + \frac{1}{n})x + y \leq 2 + \frac{1}{5n}\}$ dla $n \in \mathbb{N}_0$. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} e^{-x/n} (x^4 + y + y^n e^{-n}) d(x, y).$$

20.13 Zadanie. [Nierówność Czebyszewa] Niech $\int_X$ będzie całką na X . Definiujemy *miarę* μ wzorem $\mu(A) = \int_X \chi_A(x) dx$ dla $A \subseteq X$ takich, że $\chi_A \in L(X)$. Niech $f \in L(X)$. Pokaż, że

$$\mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \leq \frac{1}{t} \int f d\mu.$$

Wynioskuj, że jeśli $\mu(X) < \infty$ oraz $K \in (0, \infty)$, to

$$\mu(\{x \in X : f(x) > K\mu(X)^{-1} \int f d\mu\}) \leq \frac{\mu(X)}{K}.$$

21 Funkcje mierzalne

21.1 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ będzie monotoniczna. Udowodnij, że f jest λ_1 -mierzalna.

21.2 Zadanie. Udowodnij, że funkcja charakterystyczna zbioru $A \subseteq \mathbf{R}^n$ jest λ_n -mierzalna wtedy i tylko wtedy gdy A jest λ_n -mierzalny.

21.3 Zadanie. Udowodnij, że funkcje

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[x]}{1+n^5[x]^2}$$

oraz $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[xy]}{1+n^3[x^2+y^2]}$

są mierzalne.

21.4 Zadanie. Niech $f : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Udowodnij, że f' jest funkcją mierzalną.

21.5 Zadanie. Dla $n \in \mathbb{N}_0$ definiujemy $f_n : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem $f_n(x, y) = \exp(-n|x^2 - y|)$. Udowodnij, że ciąg f_n zbiega λ_2 -prawie wszędzie do funkcji zerowej.

21.6 Zadanie. Niech $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ zbiega λ_1 -prawie wszędzie do $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Załóżmy, że istnieje funkcja $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ oraz λ_1 -prawie wszystkich x zachodzi $|f_n(x)| < g(x)$. Udowodnij, że $|f(x)| \leq g(x)$ dla λ_1 -prawie wszystkich x .

21.7 Zadanie. Niech $f_n : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będą dane wzorem

$$f_n(x, y) = \exp\left(\sin^n(x) + \sqrt[n]{|\sin(y/n)|}\right).$$

Udowodnij, że ciąg f_n jest zbieżny λ_2 -prawie wszędzie i znajdź jego granicę.

21.8 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$, a δ_x będzie miarą Diraca z atomem w punkcie x . Wyznacz

$$\int f d\delta_x.$$

21.9 Zadanie. Niech $f, g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będą λ_n -całkowalne. Załóżmy, że $\lambda_n(\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Pokaż, że

$$\int f d\lambda_n = \int g d\lambda_n.$$

21.10 Zadanie. Niech $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ oraz $f(0) = 1$. Czy f jest całkowalna na $\mathbf{R}$?

21.11 Zadanie. Podaj przykład ciągu funkcji λ_1 -całkowalnych $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ takiego, że f_n zbiega λ_1 -prawie wszędzie do pewnej funkcji λ_1 -całkowalnej $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ oraz

$$\int_0^1 \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\lambda_1(x) < \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) d\lambda_1(x).$$

21.12 Zadanie. [Egzamin 2011/2012] Dla $n \in \mathbb{N}_0$ definiujemy $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem

$$f_n(x) = \frac{2 + \sin^n(x^2)}{1 + x^2}.$$

Wykaż, że granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]} f_n(x) d\lambda_1(x)$$

istnieje i znajdź jej wartość.

21.13 Zadanie. [Egzamin 2011/2012] Dla $n \in \mathbb{N}_0$ definiujemy $f_n : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem

$$f_n(x, y) = \sin^n(y - x) \exp(-x^2 - 3y^2).$$

Wykaż, że granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{(x, y) : x^2 + 2y^2 < n^2\}} f_n d\lambda_2$$

istnieje i znajdź jej wartość.

21.14 Zadanie. [Egzamin 2011/2012] Wykaż, że granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-2\pi n}^{2\pi n} \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} \right) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \exp(-2x^2) d\lambda_1(x)$$

istnieje i znajdź jej wartość.

21.15 Zadanie. [Nierówność Czebyszewa] Niech μ będzie miarą na X oraz $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ będzie μ -całkowalna. Pokaż, że

$$\mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \leq \frac{1}{t} \int f d\mu.$$

Wynioskuj, że jeśli $\mu(X) < \infty$ oraz $K \in (0, \infty)$, to

$$\mu(\{x \in X : f(x) > K\mu(X)^{-1} \int f d\mu\}) \leq \frac{\mu(X)}{K}.$$

21.16 Zadanie. Niech $y_n \in [0, 1]$ będzie dowolnym ciągiem. Czy funkcja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{|x - y_n|}}$$

jest λ_1 -całkowalna na $[0, 1]$?

21.17 Zadanie. Oblicz

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \exp(-\cos^n(x)) d\lambda_1(x), \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} n(\exp(x/n) - 1) \frac{1}{1+x^4} d\lambda_1(x), \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} x^{-3} n \ln(1+x/n) d\lambda_1(x). \end{aligned}$$

Definicja. Mówimy, że $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest *absolutnie ciągła* jeśli istnieje funkcja λ_1 całkowalna $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ taka, że

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g d\lambda_1 \quad \text{dla } a < b.$$

Uwaga. Każda funkcja absolutnie ciągła jest λ_1 prawie wszędzie różniczkowalna.

21.18 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie λ_2 -całkowalna taka, że dla λ_1 prawie wszystkich $y \in \mathbf{R}$ funkcja $x \mapsto f(x, y)$ jest absolutnie ciągła oraz $D_1 f$ jest λ_2 całkowalna. Dla $x \in \mathbf{R}$ kładziemy

$$g(x) = \int f(x, y) d\lambda_1(y).$$

Pokaż, że g jest absolutnie ciągła oraz

$$g'(x) = \int D_1 f(x, y) d\lambda_1(y) \quad \text{dla } \lambda_1 \text{ prawie wszystkich } x \in \mathbf{R}.$$

Wskazówka. Twierdzenie Fubiniiego.

21.19 Zadanie. Niech μ będzie miarą na X , $f_n : X \rightarrow \mathbf{R}$ będzie ciągiem funkcji μ -całkowalnych, a $p \in [1, \infty)$. Udowodnij, że

1. jeśli f_n zbiega jednostajnie, to zbiega w $L^p(\mu)$ oraz μ -prawie wszędzie;
2. jeśli f_n zbiega w $L^p(\mu)$, to zbiega μ -według miary;
3. jeśli f_n zbiega μ -prawie wszędzie, to zbiega μ -według miary;
4. jeśli f_n zbiega μ -według miary, to istnieje podciąg zbieżny μ -prawie wszędzie.

Dla każdej implikacji znajdź przykład ciągu f_n pokazujący, że implikacja odwrotna nie zachodzi.

Ciekawostka

Twierdzenie ([Fed69, 2.2.13]). Niech X będzie zupełną ośrodkową przestrzenią metryczną, Y będzie przestrzenią Hausdorffa, μ będzie borelowską miarą (zewnątrzną) na Y , $f : X \rightarrow Y$ będzie ciągłą, $B \subseteq X$ będzie borelowski. Wówczas $f[B]$ jest μ -mierzalny.

Uwaga. Może się zdarzyć, że $f[B]$ nie jest borelowski ale mimo wszystko jest μ -mierzalny.

21.20 Zadanie. Niech $E \subseteq \mathbf{R}$ będzie borelowski. Pokaż, że zbiór $\{x - y : x, y \in E\}$ jest λ_1 -mierzalny.

22 Twierdzenie Fubiniego

22.1 Zadanie. Niech $P : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ będzie wielomianem o współczynnikach z przedziału $[0, 1]$, zaś $K \subseteq \mathbf{R}^2$ będzie kwadratem $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Wykaż, że

$$\int_K P(xy) \, d\lambda_2(x, y) \leq 8.$$

Czy można zmniejszyć stałą 8?

22.2 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ będzie mierzalna i ograniczona. Kładziemy

$$g(t) = \int_{\mathbf{R}} \cos(tx^2) \frac{f(x)}{1+x^6} \, d\lambda_1(x) \quad \text{dla } t \in \mathbf{R}.$$

Udowodnij, że g jest różniczkowalna i znajdź g' .

22.3 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie dana wzorem

$$f(u, v) = \int_{\mathbf{R}} \exp(-x^2) \sin(u + v)x \, d\lambda_1(x).$$

Wyznacz pochodne cząstkowe f .

22.4 Zadanie. Niech $0 < b < a$. Oblicz całkę

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-ax) - \exp(-bx)}{x} \, d\lambda_1(x).$$

22.5 Zadanie. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x\}$ oraz $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie dana wzorem $f(x, y) = (1 - x + y) \exp(-x)$. Oblicz całkę $\int_A f \, d\lambda_2$.

22.6 Zadanie. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x, x^2 y \leq 16\}$. Wyznacz $\lambda_2(A)$. Czy funkcja $f(x, y) = xy$ jest całkowalna na A ?

22.7 Zadanie. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$ oraz $f(x, y) = 1/(x\sqrt{y})$ dla $(x, y) \in A$. Oblicz całkę $\int_A f \, d\lambda_2$.

22.8 Zadanie. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq y\}$ oraz $f(x, y) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$ dla $(x, y) \in A$. Oblicz $\int_A f \, d\lambda_2$.

22.9 Zadanie. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^w, w \in \mathbf{Q}, 0 \leq w \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$. Wykaż, że A jest λ_2 -mierzalny i oblicz $\lambda_2(A)$.

22.10 Zadanie. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < 2y, y < 2x, x + y < 1, 1 < 3x + y\}$. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \frac{(x^{2n} + y^{2n})^{1/n}}{x^4 y} \, d\lambda_2(x, y).$$

22.11 Zadanie. Niech $K \subseteq \mathbf{R}^2$ będzie kwadratem o wierzchołkach $(0, \pi)$ oraz $(\pi, 2\pi)$. Oblicz

$$\int_K (x + y)^2 \cos^2(x - y) \, d\lambda_2(x, y).$$

22.12 Zadanie. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 < 8y < 8x^2, y^2 < x < 8y^2\}$. Oblicz

$$\int_A \left(\frac{x}{y}\right)^3 \, d\lambda_2(x, y).$$

22.13 Zadanie. Niech $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 2\}$. Wykaż, że granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \frac{z}{n} \ln((x^2 + y^2)^n + (x^2 + y^2)^{-n}) \, d\lambda_3(x, y, z).$$

istnieje i oblicz jej wartość.

22.14 Zadanie. Niech $A \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie λ_n -mierzalny, $p \in (0, \infty)$ oraz $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie λ_n -mierzalna. Wykaż, że

$$\int_A |f|^p \, d\lambda_n = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_n(\{x \in A : |f(x)| > t\}) \, d\lambda_1(t).$$

Wskazówka. Twierdzenie Fubinięgo.

22.15 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie λ_n -całkowalna. Pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego zbioru λ_n -mierzalnego $A \subseteq \mathbf{R}^n$ spełniającego $\lambda_n(A) \leq \delta$ zachodzi $\int_A f \, d\lambda_n \leq \varepsilon$.

Wskazówka. Rozważ miarę μ daną przez całkowanie λ_n z gęstością zadaną przez $|f|$.

22.16 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ będzie λ_n -całkowalna. Dla $r > 0$ oraz $x \in \mathbf{R}^n$ kładziemy

$$g_r(x) = \frac{1}{\lambda_n(\mathbb{B}(x, r))} \int_{\mathbf{B}(x, r)} f(y) \, d\lambda_n(y).$$

1. Pokaż, że dla każdego $r > 0$ funkcja g_r jest ciągła,

$$\int |g_r(x)| d\lambda_n(x) \leq \int |f(x)| d\lambda_n(x).$$

2. Pokaż, że jeśli f jest ciągła, to g_r zbiega niemal jednostajnie do f przy $r \downarrow 0$.

22.17 Zadanie. [$\star$] Pokaż, że dla f i g_r jak w poprzednim zadaniu (f jedynie λ_n -całkowalna) zachodzi

$$\lim_{r \downarrow 0} \int |g_r(x) - f(x)| d\lambda_n(x) = 0.$$

Wynioskuj, że jeśli $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest λ_1 -całkowalna oraz $k : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ spełnia

$$k(b) - k(a) = \int_a^b h(t) d\lambda_1(t) \quad \text{dla wszystkich } a, b \in \mathbf{R} \text{ takich, że } a < b,$$

to k jest różniczkowalna λ_1 -prawie wszędzie oraz $k'(x) = h(x)$ dla λ_1 -prawie wszystkich $x \in \mathbf{R}$.

22.18 Zadanie. Oblicz

$$\int \exp(-x^2) d\lambda_1(x).$$

Wskazówka. Oblicz kwadrat powyższego wyrażenia korzystając z twierdzenia Fubiniego i zmiany zmiennych.

22.19 Zadanie. Oblicz

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{x^3} \exp(y/x) d\lambda_1(y) d\lambda_1(x), \\ & \int_0^1 \int_y^1 \exp(-x^2) d\lambda_1(x) d\lambda_1(y), \\ & \int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} d\lambda_1(y) d\lambda_1(x), \\ & \int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{1+x^4} d\lambda_1(x) d\lambda_1(y). \end{aligned}$$

22.20 Zadanie. Niech D będzie zwartym podzbiorem $\mathbf{R}^2$ ograniczonym przez parabolę o równaniu $y = x^2$ oraz prostą o równaniu $x + y = 2$. Oblicz

$$\int_D 6x + 2y^2 d\lambda_2(x, y).$$

22.21 Zadanie. Niech D będzie zwartym podzbiorem $\mathbf{R}^2$ ograniczonym krzywymi o równaniach $y = x^2$ oraz $y = x^3$. Oblicz

$$\int_D xy^2 d\lambda_2(x, y).$$

22.22 Zadanie. Niech $A \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie mierzalny i taki, że $\lambda_n(A) > 0$. Udowodnij, że rzut ortogonalny A na dowolną k -wymiarową podprzestrzeń liniową $\mathbf{R}^n$ ma dodatnią miarę λ_k .

23 Kolokwia

Kolokwium 1, 2010

23.1 Zadanie. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|} \sin(x^2 + y^2) \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

23.2 Zadanie. Obliczyć

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), x>0, y>0} \sqrt{\frac{1}{x^4 + y^4} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^4 + y^4} + \frac{1}{y}}$$

lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

23.3 Zadanie. Na powierzchni $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = xy + 1\}$ znaleźć punkt położony najbliżej początku układu współrzędnych.

23.4 Zadanie. Niech $A \subseteq \mathbf{R}^k$ będzie wypukłym zbiorem zwartym, zaś $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ będzie ciągłą i różniczkowalną na $\text{Int } A$. Załóżmy, że istnieją liczby $a_1, \dots, a_k$ (nie wszystkie równe zero) takie, że

$$\sum_{i=1}^k a_i D_i f(x) \leq 0 \quad \text{dla } x \in \text{Int } A.$$

Udowodnić, że f osiąga swoje kresy na brzegu A .

Kolokwium 1, 2018

23.5 Zadanie. Wykazać, że istnieje funkcja ciągła $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ taka, że funkcja $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ określona wzorem

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(xy^2) - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ g(y) & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

jest ciągła. Zbadaj różniczkowalność tak otrzymanej funkcji we wszystkich punktach $\mathbf{R}^2$.

23.6 Zadanie. Znaleźć punkty prostej $l = \{(t, 1, 2t+1) : t \in \mathbf{R}\}$ oraz hiperboli $H = \{(x, y, z) : xy = 1, z = 2x\}$ najmniej odległe od siebie.

23.7 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ oraz $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ będą różniczkowalne, a $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym. Funkcja g i h dane są wzorami

$$g(x, y) = (5x^2 \sin y, e^{5x \cos y}), \quad h(x, y) = (4x - 3e^4 y, 6x + 4^4 y, -x + e^4 y).$$

Niech $U \subseteq \mathbf{R}^2$ będzie otwartym zbiorem zawierającym punkt $(1, \arcsin(3/5))$ takim, że

$$\forall z \in U \quad (f \circ g)(z) = h(z).$$

Wyznaczyć różniczkę funkcji f w punkcie $(3, e^4)$ i zapisać jej macierz w standardowych bazach.

23.8 Zadanie. Niech $r > 0$, zaś $K \subseteq \mathbf{R}^3$ będzie zwartym zbiorem wypukłym zawierającym kulę $\mathbf{B}((0,0,0), r)$. Niech $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ będzie ciągłą i różniczkowalną na $\text{Int } K$. Załóżmy, że zachodzi

$$xD_1f(x, y, z) + zD_3f(x, y, z) > 0 \quad \text{dla } (x, y, z) \in K \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

oraz

$$yD_2f(x, y, z) > 0 \quad \text{dla } (x, y, z) \in K, y \neq 0.$$

Wykazać, że minimum funkcji f jest przyjmowane w punkcie $(0, 0, 0)$, a maksimum jest przyjmowane na brzegu K .

Kolokwium 1, 2019

23.9 Zadanie. Zbadać ciągłość funkcji $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 x^{-4} \exp(-|yx^{-2}|) & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0 & \text{gdy } x = 0. \end{cases}$$

23.10 Zadanie. Zbadać różniczkowalność funkcji $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(2x - 2y) - 1}{2x - 2y} & \text{gdy } x > y, \\ (x + y)^2(x + y - 1) - (x - y) & \text{gdy } x \leq y. \end{cases}$$

23.11 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie różniczkowalna i taka, że $f(\cdot, y)$ jest rosnąca dla każdego $y \in \mathbf{R}$. Kładziemy

$$M = \mathbf{R}^2 \cap \{((1 + \cos \varphi) \cos \varphi, (1 + \cos \varphi) \sin \varphi) : \varphi \in \mathbf{R}, |\varphi| \leq \pi\}.$$

Udowodnić, że

$$\partial_v f(x, y) \leq 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ oraz } v \in T_{(0,0)}M.$$

23.12 Zadanie. Niech $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = \frac{17xy}{17x^2 + 17y^2 - 16y^3 + 4y^4} \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Znaleźć kresy funkcji f .

23.13 Zadanie. Połóżmy $p_1 = (1, 1)$, $p_2 = (-1, 1)$, $p_3 = (-1, -1)$, $p_4 = (1, -1)$. Wyznaczyć wielomian Taylora stopnia 2 w punkcie $(0, 0)$ dla funkcji $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem

$$F(x) = \sum_{i=1}^4 \|x - p_i\| \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Kolokwium 1, 2022

23.14 Zadanie. Niech $A = \{(x, y) \mid 3x > 2y \geq 0\}$. Funkcja $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ będzie zadana wzorem

$$f(x, y) = \frac{3x - 2y}{y^4 + (3x - 2y)^2 + 4}$$

1. Wyznaczyć kres dolny wartości funkcji f na zbiorze A .
2. Rozstrzygnąć czy kres górny wartości f na zbiorze A jest przyjmowany, jeśli jest, to wskazać w jakim punkcie.

23.15 Zadanie. Funkcja $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dana jest wzorem:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \ln(1+x^2) + 2xy^2}{x^2 + 2y^2 + 3y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Rozstrzygnąć czy f jest różniczkowalna w punkcie $(0, 0)$.

23.16 Zadanie. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła i jej wszystkie pochodne kierunkowe istnieją. Pokazać, że jeśli $f'_u(u) < 0$ dla każdego $u \in \mathbb{S}^{m-1}$, to istnieje punkt $a \in \mathbf{R}^m$, taki, że $f'_v(a) = 0$ dla każdego wektora $v \in \mathbf{R}^m$.

Literatura

- [Bir86] Andrzej Birkholc. *Analiza matematyczna*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warsaw, 1986. Funkcje wielu zmiennych. [Functions of several variables].
- [Fed69] Herbert Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-62010-2>,
- [Rud91] Walter Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, second edition, 1991.
- [SG77] G. E. Shilov and B. L. Gurevich. *Integral, measure and derivative: a unified approach*. Dover Publications, Inc., New York, english edition, 1977. Translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, Dover Books on Advanced Mathematics.
- [Str16] Paweł Strzelecki. Analiza matematyczna II (skrypt wykładu), Jan 2016. wersja z dnia: 5.01.2016. URL: http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/am2/Analiza_Matematyczna_2/Notatki_files/skrypt-amII-05-01-2016.pdf.