

9. Formy dwuliniowe Ver. 2.1

Stefan Jackowski

18 maja 2011

Celem tych notatek jest przedstawienie twierdzeń dotyczących form dwuliniowych jako uogólnienia rozważanych wcześniej iloczynów skalarnych i akcentując ich geometryczny charakter. Dotyczy to w szczególności twierdzeń o istnieniu dopełnień ortogonalnych, istnienia baz ortogonalnych i ortogonalizacji Grama-Schmidta. Nasze podejście opiera się na książce J.Milnora i D.Husemollera¹.

Niech $\mathbf{V}$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią nad ciałem $\mathbb{F}$ charakterystyki $\neq 2$. Będziemy rozważać przestrzenie wektorowe $(\mathbf{V}, \beta)$ wyposażone w pewną formę dwuliniową $\beta : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{F}$. Niech $(\mathbf{V}_1, \beta_1)$ i $(\mathbf{V}_2, \beta_2)$ będą przestrzeniami wektorowymi wyposażonymi w formy dwuliniowe. Homomorfizmem form nazywamy przekształcenie liniowe $A : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ takie, że $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_1$ zachodzi równość $\beta_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta_2(A(\mathbf{v}), A(\mathbf{w}))$.

Definicja 0.1. Jeśli $(\mathbf{V}, \beta)$ jest formą dwuliniową a $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ bazą przestrzeni $\mathbf{V}$ to macierz $B = \{\beta(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)\}$ nazywamy macierzą formy β w bazie $\mathcal{V}$. Liczba $\dim \mathbf{V}$ nazywa się *wymiarem* formy β ; rząd macierzy B *rzędem* formy β . Forma nazywa się *niezdegenerowana* jeśli $\text{rk}(\beta) = \dim \mathbf{V}$. Definiujemy *wyznacznik* formy $\det(\beta) := \det\{\beta(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)\}$, przy czym jeśli $\det(\beta) \neq 0$ to jest on określony z dokładnością do mnożenia przez kwadrat niezerowej liczby.

Dowolna forma dwuliniowa $\beta : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{F}$ wyznacza dwa przekształcenia liniowe

$$\tilde{\beta}_1 : \mathbf{V} \ni \mathbf{v} \rightsquigarrow \beta(\mathbf{v}, \cdot) \in \mathbf{V}^* \quad \text{oraz} \quad \tilde{\beta}_2 : \mathbf{V} \ni \mathbf{v} \rightsquigarrow \beta(\cdot, \mathbf{v}) \in \mathbf{V}^*.$$

Zad. 1. Macierz $\{\beta(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)\}$ jest macierzą przekształcenia $\tilde{\beta}_1$ w bazach $\mathcal{V}$ i bazie sprzężonej $\mathcal{V}^*$, a macierz $\tilde{\beta}_2$ w tych bazach jest do niej transponowana. Wywnioskować stąd, że definicja rzędu formy jest poprawna tzn nie zależy od wyboru bazy, oraz wzór na zmianę macierzy formy przy zmianie bazy jako wniosek z odpowiedniego wzoru dla macierzy przekształceń liniowych. Por. Zad. HT 21.4-5.

Definicja 0.2. Sumą (ortogonalną) $(\mathbf{V}_1, \beta_1)$ i $(\mathbf{V}_2, \beta_2)$ nazywamy przestrzeń $\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$ wyposażoną w formę

$$\beta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) := \beta_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) + \beta_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2) \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i \in \mathbf{V}_i.$$

Jeśli $(\mathbf{V}, \beta)$ jest formą dwuliniową oraz $\mathbf{V}_1 \leq \mathbf{V}$ podprzestrzenią to jej dopełnieniem ortogonalnym nazywamy podprzestrzeń $\mathbf{V}_2 \leq \mathbf{V}$ taką, że $\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$ oraz $\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \beta(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) = 0, \forall \mathbf{v}_1 \in \mathbf{V}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_2$.

Zad. 2. $\det(\beta_1 \oplus \beta_2) = \det(\beta_1) \det(\beta_2)$ oraz $\text{rk}(\beta_1 \oplus \beta_2) = \text{rk}(\beta_1) + \text{rk}(\beta_2)$.

¹wg. J.Milnor, D.Husemoller "Symmetric bilinear forms" Springer-Verlag 1973

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać symetryczne formy dwuliniowe (SFD) $\beta : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{F}$, tzn. takie, że $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ i antysymetryczne (alternujące) formy dwuliniowe (AFD) tzn. takie, że $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ dla dowolnych $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$. Dla SFD będziemy oznaczać $\tilde{\beta} := \tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2$ oraz dla AFD, $\tilde{\beta} := \tilde{\beta}_1 = -\tilde{\beta}_2$. Jeśli będziemy zakładać, że forma jest symetryczna lub antysymetryczna będziemy pisać ASFD. W Skrypcie HT VII .3.3 takie formy nazywają się *metryczne*.

Każdej formie dwuliniowej można kanonicznie przypisać pewną formę symetryczną (symetryzacja) i formę antysymetryczną (antysymetryzacja) - por. Zad. HT 20.1 . Ponadto formy symetryczne i antysymetryczne mają elegancką charakterystykę p. Zad. HT 20.5. Iloczyn skalarny nad $\mathbb{R}$ jest niezdegenerowaną SFD. Niezdegenerowane formy antysymetryczne nad $\mathbb{R}$ nazywają się *formami symplektycznymi*.

Niech $(\mathbf{V}, \beta)$ będzie ASFD. Jej obcięcie do dowolnej podprzestrzeni jest też ASFD, choć własność niezdegenerowania nie musi być zachowywana (w odróżnieniu od bycia iloczynem skalarnym!). Podobnie jak w przypadku przestrzeni unitarnych można zdefiniować zbiór wektorów prostopadłych (w sensie formy β) do zadanego zbioru.

Definicja 0.3. Dla podprzestrzeni $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ i ASFD β definiujemy podprzestrzeń β -prostopadłą

$$\mathbf{W}^{\perp\beta} := \tilde{\beta}^{-1}\{\phi \in \mathbf{V}^* \mid \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}, \phi(\mathbf{w}) = 0\} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}, \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0\}.$$

(Literę β w $\mathbf{W}^{\perp\beta}$ będziemy pomijać, jeśli nie prowadzi to do nieporozumień.)

Zad. 3. Rozwiąż Zad. HT 21.1.

Zad. 4. Dowolna ASFD $(\mathbf{V}, \beta)$ rozkłada się na sumę ortogonalną $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\perp} \oplus \mathbf{W}$ gdzie $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ i forma $(\mathbf{W}, \beta|_{\mathbf{W}})$ jest niezdegenerowana. Jeśli $(\mathbf{V}, \beta)$ jest niezdegenerowana, to dla dowolnej podprzestrzeni $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, $\dim \mathbf{W}^{\perp} = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{W}$. A w ogólnym przypadku? Uwaga: podprzestrzeń $\mathbf{W}^{\perp}$ nie musi być dopełniająca $\mathbf{W}$, tak jak w przypadku iloczynów skalarnych! Por. Zad. HT 21.2.

Twierdzenie 0.4 (o dopełnieniu ortogonalnym). *Jeśli ASFD $\beta : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{F}$ jest niezdegenerowana na podprzestrzeni $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, to podprzestrzeń $\mathbf{W}^{\perp}$ jest dopełnieniem ortogonalnym $\mathbf{W}$.*

Dowód. Wystarczy wykazać, że $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^{\perp} = 0$ oraz, że dowolny wektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ można zapisać jako sumę $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$, gdzie $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{w}' \in \mathbf{W}^{\perp}$. Jeśli $\mathbf{v} \in \mathbf{W} \cap \mathbf{W}^{\perp}$ to $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}$, $\beta(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ a więc $\mathbf{v} = 0$. Trzeba więc pokazać, że dowolny element $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ rozkłada się na sumę $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$ gdzie $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ oraz $\mathbf{w}' \in \mathbf{W}^{\perp}$. Rozważmy funkcjonal $\mathbf{W} \ni \mathbf{w} \rightsquigarrow \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{F}$. Ponieważ forma β jest na niezdegenerowana na podprzestrzeni $\mathbf{W}$, więc istnieje wektor $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}$ taki, że $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}$, $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{w}_0, \mathbf{w})$ a więc $\beta(\mathbf{v} - \mathbf{w}_0, \mathbf{w}) = 0$. Wynika stąd, że $\mathbf{v} = \mathbf{w}_0 + (\mathbf{v} - \mathbf{w}_0)$ jest szukanym rozkładem. $\square$

Zad. 5. Udowodnić, odwrotną tezę: jeśli podprzestrzeń $\mathbf{W}^{\perp}$ jest dopełnieniem ortogonalnym $\mathbf{W}$ to $\beta : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{F}$ jest niezdegenerowana na podprzestrzeni $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$.

Zauważmy, że dowód twierdzenia 0.4 dostarcza konstrukcji bazy w której macierz formy β ma postać blokową. Niech $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ będzie taką bazą, że wektory $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ rozpinają podprzestrzeń $\mathbf{W}$. Dla wektora $\mathbf{v}_{r+i}$ rozpatrzmy funkcjonal $\mathbf{W} \ni \mathbf{w} \rightsquigarrow \beta(\mathbf{v}_{r+i}, \mathbf{w}) \in \mathbb{F}$. Ponieważ ten funkcjonal musi być wyznaczony przez pewien wektor z $\mathbf{W}$, istnieją więc skalary $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ir}$ takie, że $\mathbf{v}'_{r+i} := \mathbf{v}_{r+i} - \sum \alpha_{ij} \mathbf{v}_j \in \mathbf{W}^{\perp}$. Wektory $\{\mathbf{v}'_{r+1}, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ tworzą bazę podprzestrzeni $\mathbf{W}^{\perp}$,

a więc w bazie $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}'_{r+1}, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ przestrzeni $\mathbf{V}$ macierz formy β ma przekątniową postać blokową:

$$\begin{pmatrix} \{b_{ij}\}_{i,j \leq r} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Macierz przejścia od bazy $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ do bazy $\mathcal{V}' := \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}'_{r+1}, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ jest postaci:

$$\begin{pmatrix} Id_r & C \\ 0 & Id_{n-r} \end{pmatrix}$$

a zatem macierz przejścia od bazy dualnej $\mathcal{V}^*$ do bazy dualnej $\mathcal{V}'^*$ przestrzeni $\mathbf{V}^*$ jest postaci:

$$\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ C & Id_{n-r} \end{pmatrix}$$

Przystąpimy teraz do sformułowania i dowodu twierdzenia Lagrange'a o diagonalizacji form (Tw. 2 str. VII-6 skryptu HT) oraz podobnego twierdzenia dla form antysymetrycznych.

Wniosek 1. Dla dowolnej SFD $(\mathbf{V}, \beta)$ istnieje baza $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ taka, że $\beta(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ przy czym $\lambda_i \neq 0$ dla $i \leq \text{rk}(\beta)$ oraz $\lambda_i = 0$ dla $i > \text{rk}(\beta)$.

Baza o jakiej mowa we wniosku nazywa się β -prostopadła, lub krócej protostpadła. Dowód wniosku poprzedzimy lematem:

Lemat 0.1. Jeśli $(\mathbf{V}, \beta)$ jest niezerową SFD, to istnieje wektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ taki, że $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \neq 0$.

Dowód. Istnieją wektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ takie, że $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq 0$. Jeśli $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \beta(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$ to $\beta(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = 2\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq 0$. $\square$

Dowód Wniosku 1. Jeśli forma β jest niezerowa, to istnieje wektor $\mathbf{v}_1$ taki, że $\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) \neq 0$ a więc β jest niezdegenerowana na podprzestrzeni $\langle \mathbf{v}_1 \rangle$ generowanej przez wektor $\mathbf{v}_1$. Z Tw. 0.4 wynika, że $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus \langle \mathbf{v}_1 \rangle^\perp$, a więc można dowód tezy przeprowadzić indukcyjnie, ze względu na $\dim \mathbf{V}$. $\square$

Uwaga 1. Jeśli $\lambda'_i = \alpha_i^2 \lambda_i$ gdzie $\alpha_i \neq 0$ to wybierając wektory $\mathbf{v}'_i := \alpha_i \mathbf{v}_i$ otrzymujemy bazę taką, że $\beta(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j) = \lambda'_i \delta_{ij}$. Wobec tego dla ciała liczb zespolonych można znaleźć bazę taką, że $\lambda_i = 1$ dla $i \leq \text{rk}(\beta)$ a dla ciała liczb rzeczywistych $\lambda_i = \pm 1$ dla $i \leq \text{rk}(\beta)$.

Uwaga 2 (Ważna!). Dowolną formę kwadratową na $\mathbf{V}$ można przedstawić w postaci $q = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j^*$ gdzie $\mathcal{V}^* = \{\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_n^*\}$ jest bazą dualną do $\mathcal{V}$, czyli $\mathbf{v}_i^*(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$. Tw. Kroneckera, czyli Zad 4 na str. VII-9 skryptu HT i Zad. HT 17.5 wynika natychmiast z tego przedstawienia i rozważań o bazach po Tw. ??.

Wniosek 2. Dla dowolnej niezdegenerowanej AFD $(\mathbf{V}, \beta)$ istnieje baza $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in \mathbf{V}$ taka, że $\beta(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j) = \delta_{ij}$ oraz $\beta(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \beta(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = 0$. W szczególności $\dim \mathbf{V} = 2k$.

Dowód. Indukcja ze względu na $\dim \mathbf{V}$. Ponieważ forma jest niezerowa, istnieją dwa wektory liniowo niezależne $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1$ takie, że $\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) = 1$. Rozpatrzmy podprzestrzeń 2-wymiarową $\mathbf{V}_1 := \text{Lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) \leq \mathbf{V}$. Obcięcie $\beta|_{\mathbf{V}_1}$ jest forma niezdegenerowana, bowiem $\det(\beta|_{\mathbf{V}_1}) \neq 0$. Na mocy tw. 0.4 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_1^\perp$, a forma $\beta|_{\mathbf{V}_1^\perp}$ musi być niezdegenerowana, bo składnik prosty formy niezdegenerowanej musi być formą niezdegenerowaną ($\det \beta = \det(\beta|_{\mathbf{V}_1}) \det(\beta|_{\mathbf{V}_1^\perp}) \neq 0$). Por. Zad. HT 16.4. i 21.3. $\square$

Dla form nad $\mathbb{R}$ zdefiniowany jest jeszcze jeden niezmiennik, a mianowicie *sygnatura*. Niech $\sigma_{\pm}(\beta)$ będzie maksymalnym wymiarem podprzestrzeni na której forma β jest dodatnio (odp. ujemnie) określona. Definiujemy sygnaturę $\sigma(\beta) := (\sigma_+(\beta), \sigma_-(\beta))$. Oczywiście $\sigma_+(\beta) + \sigma_-(\beta) = \text{rk}(\beta)$. Sygnaturę definiuje się też jako różnicę $\text{sygn}(\beta) := \sigma_+(\beta) - \sigma_-(\beta)$

Wniosek 3. Dwie SFD nad $\mathbb{C}$ są izomorficzne gdy mają ten sam wymiar i rząd. Dwie formy nad $\mathbb{R}$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy mają równe wymiary, rzędy i sygnatury.

Twierdzenie 0.5 (Kryterium Sylwestera - Jacobiego). SFD $(\mathbf{V}, \beta)$ nad ciałem $\mathbb{R}$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy istnieje flaga podprzestrzeni $0 < \mathbf{V}_1 < \dots < \mathbf{V}_n = \mathbf{V}$ taka, że $\forall 1 \leq i \leq n, \det(\beta|_{\mathbf{V}_i}) > 0$.

Dowód. Jeśli forma jest dodatnio określona, to oczywiście $\det(\beta|_{\mathbf{V}_i}) > 0$. Dla dowodu implikacji przeciwnej stosujemy indukcję ze względu na i . Dla $i = 1$ teza oczywiście zachodzi, bo $\dim \mathbf{V}_1 = 1$. Rozważmy podprzestrzeń $\mathbf{V}_i < \mathbf{V}_{i+1}$. Ponieważ forma $\beta|_{\mathbf{V}_i}$ jest niezdegenerowana ma ona dopełnienie ortogonalne w $\mathbf{V}_{i+1}$, a więc dla pewnego wektora $\mathbf{v}_{i+1} \in \mathbf{V}_{i+1}$ zachodzi izomorfizm form $\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_i \oplus \langle \mathbf{v}_{i+1} \rangle$. Ponieważ $\det(\beta|_{\mathbf{V}_{i+1}}) > 0$, wynika stąd, że $\beta(\mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}) > 0$ a suma form dodatnio określonych jest dodatnio określona. $\square$

Zad. 6 (Uogólnienie ortogonalizacji Grama-Schmidta. Por. zad HT 20.2). Niech (V, β) będzie niezdegenerowaną SFD oraz B jej macierzą w bazie $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Załóżmy, że dla każdego $k \leq n = \dim \mathbf{V}$ podprzestrzeń $\text{Lin}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ jest niezdegenerowana. Pokazać, że

- a) istnieje baza prostopadła $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ taka, że dla każdego $1 \leq k \leq n$,

$$\text{Lin}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} = \text{Lin}\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$$

oraz wektory $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ są wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do mnożenia przez skalar.

- b) jeżeli dla każdego $1 \leq k \leq n, \beta(\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k) = 1$, to

$$\beta(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_k) = \Delta_{k-1}(B)/\Delta_k(B),$$

gdzie $\Delta_0 = 1$, zaś Δ_k jest k -tym minorem głównym macierzy B

- c) jeżeli $k = \mathbb{R}$, to $\text{sygn}(\beta) = n - 2c$, gdzie c jest liczbą zmian znaku minorów Δ_k .

Zad. 7. Dwie niezdegenerowane formy kwadratowe q_1, q_2 dwóch zmiennych nad ciałem $\mathbb{F}$ charakterystyki $\neq 2$ są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są następujące warunki:

- $\det(q_1)/\det(q_2)$ jest kwadratem w ciele $\mathbb{F}$,
- istnieją dwie pary elementów $x_i, y_i \in \mathbb{F}$ takie, że $q_1(x_1, y_1) = q_2(x_2, y_2) \neq 0$.