

8. Twierdzenie C. Jordana w zadaniach

Agnieszka Bojanowska

Stefan Jackowski

29 kwietnia 2011

Zad. 1. Niech $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ będzie endomorfizmem n -wymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech $\mathbf{V}_A^i := \ker A^i$, $\mathbf{V}_i^A := \operatorname{im} A^i$, gdzie wykładnik oznacza i -krotną iterację. Podprzestrzenie te są A -niezmiennicze i układają się w dwa ciągi (niekoniecznie flagi!):

$$\mathbf{V}_A^1 \leq \mathbf{V}_A^2 \leq \dots \leq \mathbf{V}$$

$$\mathbf{V} \geq \mathbf{V}_1^A \geq \mathbf{V}_2^A \geq \dots \geq \{0\}$$

Niech m będzie najmniejszą liczbą naturalną dla której $\mathbf{V}_A^m = \mathbf{V}_A^{m+1}$. Wykazać, że:

- a) $\dim \mathbf{V}_A^m \geq m$ oraz $\forall_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{V}_A^m = \mathbf{V}_A^{m+k}$;
- b) $\forall_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{V}_m^A = \mathbf{V}_{m+k}^A$ oraz m jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $\mathbf{V}_m^A = \mathbf{V}_{m+1}^A$.
- c) $\mathbf{V} = \mathbf{V}_A^m \oplus \mathbf{V}_m^A$ jest rozkładem operatora A (p. Def. 0.1 w SJ 7)
- d) $A^m|_{\mathbf{V}_A^m} = 0$, zaś $A^j|_{\mathbf{V}_A^m} \neq 0$ dla $j < m$.
- e) $A|_{\mathbf{V}_m^A}$ jest izomorfizmem.
- f) Wykazać, że dla przekształcenia A podprzestrzenie niezmiennicze $\mathbf{W}, \mathbf{U} \leq \mathbf{V}$, takie że $A|_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$ jest przekształceniem nilpotentnym, a $A|_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ jest izomorfizmem są wyznaczone jednoznacznie.

Zad. 2 (Rozkład Jordana operatora nilpotentnego). Niech $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$. Niech $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ będzie operatorem nilpotentnym tzn. $A^m = 0$ dla pewnego m . Znaleźć wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$ takie, że $\mathbf{V} = \bigoplus \mathbf{V}_A(\mathbf{v}_i)$, czyli rozkład operatora A na podprzestrzenie cykliczne. Wykazać, że w każdej podprzestrzeni cyklicznej $\mathbf{V}_A(\mathbf{v}_i)$ można wybrać bazę tak, aby macierz $A : \mathbf{V}_A(\mathbf{v}_i) \rightarrow \mathbf{V}_A(\mathbf{v}_i)$ miała postać $[a_{ij}]$ gdzie $a_{ij} = \delta_{i,i+1}$ (Por. Zad. SJ 7.1 i Zad. SJ 5.6 pkt.2).

Wskazówka. Opiszemy algorytm konstrukcji wektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$, i jednocześnie baz w podprzestrzeniach $\mathbf{V}_A(\mathbf{v}_i)$, który nazywamy *metodą diagramu Jordana* (nazwa *ad hoc*). Niech *stopień nilpotentności* operatora A wynosi $m > 0$ tzn. $A^m = 0$ natomiast $A^{m-1} \neq 0$. Rozpatrzmy ciąg właściwych inkluzji podprzestrzeni z Zad. 1 $\mathbf{V}_A^i := \ker A^i$:

$$\{0\} < \mathbf{V}_A^1 < \dots < \mathbf{V}_A^{m-1} < \mathbf{V}_A^m = \mathbf{V}.$$

Chociaż podprzestrzenie $\mathbf{V}_A^i$ są niezmiennicze, to nie mają one na ogół niezmienniczego dopełnienia w $\mathbf{V}_A^{i+1}$, a więc nie jest możliwa prosta, indukcyjna metoda konstruowania wektorów $\mathbf{v}_i$. Szukane wektory konstruujemy w kilku krokach:

I Wybieramy wektory liniowo niezależne $\mathbf{v}_1^m, \dots, \mathbf{v}_{k_m}^m \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{V}_A^{m-1}$ takie, że

$$\mathbf{V}_A^{m-1} \oplus \text{Lin}\{\mathbf{v}_1^m, \dots, \mathbf{v}_{k_m}^m\} = \mathbf{V}_A^m = \mathbf{V}.$$

II Pokazać, że żadna niezerowa kombinacja liniowa wektorów $A(\mathbf{v}_1^m), \dots, A(\mathbf{v}_{k_m}^m) \in \mathbf{V}_A^{m-1}$ nie należy do podprzestrzeni $\mathbf{V}_A^{m-2}$.

III Pokazać, że istnieją liniowo niezależne wektory $\mathbf{v}_1^{m-1}, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}}^{m-1} \in \mathbf{V}_A^{m-1} \setminus \mathbf{V}_A^{m-2}$, dla których

$$\mathbf{V}_A^{m-2} \oplus \text{Lin}\{A(\mathbf{v}_1^m), \dots, A(\mathbf{v}_{k_m}^m), \mathbf{v}_1^{m-1}, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}}^{m-1}\} = \mathbf{V}_A^{m-1}$$

IV etc. Powtórzmy kroki II, III w odniesieniu do układu wektorów

$$A(\mathbf{v}_1^m), \dots, A(\mathbf{v}_{k_m}^m), \mathbf{v}_1^{m-1}, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}}^{m-1} \in \mathbf{V}_A^{m-1}$$

oraz przestrzeni $\mathbf{V}_A^{m-2}$ i powtarzamy tę konstrukcję aż dojdziemy do podprzestrzeni $\mathbf{V}_A^1$.

Opisana metoda prowadzi do układu wektorów, który możemy ustawić w następującej tablicy (diagramie Jordana):

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbf{v}_1^m \dots & \mathbf{v}_{k_m}^m & & & & & & \\ A(\mathbf{v}_1^m) \dots & A(\mathbf{v}_{k_m}^m) & \mathbf{v}_1^{m-1} \dots & \mathbf{v}_{k_{m-1}}^{m-1} & & & & \\ A^2(\mathbf{v}_1^m) \dots & A^2(\mathbf{v}_{k_m}^m) & A(\mathbf{v}_1^{m-1}) \dots & A(\mathbf{v}_{k_{m-1}}^{m-1}) & \mathbf{v}_1^{m-2} \dots & & \mathbf{v}_{k_{m-2}}^{m-2} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{m-1}(\mathbf{v}_1^m) \dots & A^{m-1}(\mathbf{v}_{k_m}^m) & A^{m-2}(\mathbf{v}_1^{m-1}) \dots & A^{m-2}(\mathbf{v}_{k_{m-1}}^{m-1}) & A^{m-3}(\mathbf{v}_1^{m-2}) \dots & A^{m-3}(\mathbf{v}_{k_{m-2}}^{m-2}) \dots & \mathbf{v}_1^1 \dots & \mathbf{v}_{k_1}^1 \end{array}$$

a) Wektory w kolumnach diagramu Jordana są bazą podprzestrzeni cyklicznych pierwszego od góry wektora występującego w kolumnie (por. Zad. SJ 7.1). W tej bazie uszeregowanej od dołu do góry, macierz $A: \mathbf{V}_A(\mathbf{v}_j^{m-i}) \rightarrow \mathbf{V}_A(\mathbf{v}_j^{m-i})$ jest postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Pokazać, że wektory ostatnich i wierszy tworzą bazę podprzestrzeni $\mathbf{V}_A^i$ oraz że wektory ostatniego wiersza są bazą $\ker A = \mathbf{V}_A^1$, zaś wszystkie wektory tablicy są bazą $\mathbf{V}$.

c) Sprawdzić, że szukany w zad. 2 układ wektorów to $\{\mathbf{v}_1^m \dots \mathbf{v}_{k_m}^m, \mathbf{v}_1^{m-1} \dots \mathbf{v}_{k_{m-1}}^{m-1}, \dots, \mathbf{v}_1^1 \dots \mathbf{v}_{k_1}^1\}$

d) Zauważyć, że macierz A w bazie wektorów diagramu Jordana składa się z klatek na głównej przekątnej. Klatek jest tyle ile kolumn tablicy, każda jest wielkości odpowiadającej wysokości kolumny.

Uwaga 1. Niech $A: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, będzie przekształceniem liniowym. Podprzestrzeń $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ jest A niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego skalaru λ jest ona $A - \lambda Id$ niezmiennicza, lub ogólniej dla dowolnego wielomianu $p \in \mathbb{F}[x]$ podprzestrzeń $\mathbf{W}$ jest $p(A)$ niezmiennicza.

Zad. 3 (Rozkład Jordana). Niech $A: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, będzie operatorem w przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$ i niech $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ będą jego różnymi wartościami własnymi. Wówczas $\mathbf{V}$ jest sumą prostą A -niezmienniczych podprzestrzeni:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{(A-\lambda_1 I)}^{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbf{V}_{(A-\lambda_m I)}^{k_m}$$

(Oznaczenia z Zad. 1.) Pokazać, że istnieje baza podprzestrzeni $\mathbf{V}_{(A-\lambda_i I)}^{m_i}$, w której A jest sumą klatek postaci:

$$(*) \quad \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Macierz taka nazywa się *klatką Jordana*.

Zad. 4. Pokazać, że choć konstrukcja bazy, w której macierz przekształcenia liniowego ma formę Jordana nie jest jednoznaczna, to forma Jordana tej macierzy jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do kolejności klatek Jordana. W tym celu zauważyć, że wartości własne oraz podprzestrzenie $\mathbf{V}_{(A-\lambda_i I)}^{k_i}$ są wyznaczone jednoznacznie przez przekształcenie A oraz dla ustalonej wartości własnej λ_i liczbę klatek Jordana danego rzędu odpowiadających tej wartości własnej można wyznaczyć w następujący sposób:

Jeżeli $a_j(\lambda_i)$ oznacza liczbę klatek Jordana rzędu j odpowiadających wartości własnej λ_i , $j = 1, \dots, m$ zaś $b_j(\lambda_i)$ jest rzędem przekształcenia $A^j: \mathbf{V}_{(A-\lambda_i I)}^{k_i} \rightarrow \mathbf{V}_{(A-\lambda_i I)}^{k_i}$, to

$$a_j(\lambda_i) = b_{j-1}(\lambda_i) - 2b_j(\lambda_i) + b_{j+1}(\lambda_i), \quad j = 1, \dots, m.$$

Zad. 5. Niech macierz operatora A w pewnej bazie ma postać Jordana. Udowodnić, że liczba liniowo niezależnych wektorów własnych o wartości własnej λ jest równa ilości klatek Jordana mających λ na przekątnej.

Zad. 6 (A. Kostrikin¹, Zad. 2.4.11). Niech $A: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ będzie operatorem w przestrzeni zespolonej $\mathbf{V}$. Udowodnić, że $A \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy operatorów: $A = S + N$ takich, że S jest diagonalizowalny, N jest nilpotentny, $SN = NS$ i oba są wielomianami od operatora A .

Zad. 7. Znaleźć formę Jordana macierzy zespolonej, która ma tylko jedną prostą niezmienniczą.

¹A.I.Kostrikin "Wstęp do Algebry. Algebra liniowa 2." PWN 2008