

7. Podprzestrzenie niezmiennicze i wielomiany charakterystyczne operatorów

ver. 1.1

Stefan Jackowski

3 kwietnia 2011

1 Podprzestrzenie niezmiennicze i diagonalizacja

Definicja 1.1. Operator $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ nazywa się *rozkładalny* jeśli istnieją nietrywialne podprzestrzenie A -niezmiennicze $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \subset \mathbf{V}$ takie, że $\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$. W przeciwnym razie operator nazywa się *nierozkładalny*.

Definicja 1.2. Operator $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ nazywa się *redukowalny* jeśli istnieje nietrywialna podprzestrzeń A -niezmiennicza, różna od $\mathbf{V}$. W przeciwnym razie operator nazywa się *niereducowalny*.

Definicja 1.3. Operator $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ nazywa się *diagonalizowalny* jeśli istnieją jednowymiarowe podprzestrzenie A -niezmiennicze $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n \subset \mathbf{V}$ takie, że $\bigoplus \mathbf{V}_i = \mathbf{V}$. *Diagonalizacją* A nazywamy wybór tych jednowymiarowych podprzestrzeni.

Uwaga. Powyższe definicje mają także sens dla rodzin operatorów liniowych.

Zad. 1. Dla dowolnego operatora $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ i podzbioru (niekoniecznie podprzestrzeni!) $S \subset \mathbf{V}$ istnieje minimalna podprzestrzeń A -niezmiennicza zawierająca S , oznaczana symbolem $\mathbf{V}_A(S)$. Jeśli S składa się z jednego wektora $\mathbf{v}$, to podprzestrzeń tę nazywamy podprzestrzenią cykliczną tego wektora. Wykaż, że podprzestrzeń cykliczna wektora $\mathbf{v} \neq 0$ ma bazę postaci $\{\mathbf{v}, A(\mathbf{v}), \dots, A^k(\mathbf{v})\}$ dla pewnego k .

Zad. 2. Podać przykład operatora, który jest redukowalny, ale jest nierozkładalny. Jeśli przestrzeń $\mathbf{V}$ jest wyposażona w iloczyn skalarny, to redukowalna izometria jest rozkładalna.

Zad. 3 (Lemat I. Schura). Jeśli $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ jest niereducowalny to dowolny niezerowy operator $B : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ z nim przemienny tzn. taki, że $AB = BA$ jest izomorfizmem. Jeśli $\mathbf{V}$ jest przestrzenią zespoloną, to B jest mnożeniem przez pewien skalar.

Zad. 4. Niech $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ będzie operatorem skończonego rzędu (tzn. $A^k = Id$ dla pewnej liczby naturalnej k). Wtedy istnieje w $\mathbf{V}$ iloczyn skalarny taki, że A jest izometrią.

Zad. 5. Dowolny operator skończonego rzędu $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ w przestrzeni zespolonej $\mathbf{V}$ jest diagonalizowalny.

Zad. 6. Niech operator $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ ma $n = \dim \mathbf{V}$ różnych wartości własnych. Opisać wszystkie podprzestrzenie niezmiennicze przekształcenia A , ile ich jest?

Zad. 7. Jeżeli operator $A: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ ma $n = \dim \mathbf{V}$ różnych wartości własnych i dla $B: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ zachodzi $AB = BA$, to B jest diagonalizowalny.

Zad. 8. Jeśli operatory $A_i: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ dla $i = 1, \dots, m$ są diagonalizowalne oraz przemienne tzn. $\forall i, j \ A_i A_j = A_j A_i$, to rodzina operatorów $\{A_i\}$ jest diagonalizowalna (tzn. można wybrać podprzestrzeń diagonalizującą jednocześnie wszystkie operatory).

2 Wielomian charakterystyczny operatora liniowego

Zad. 9. Niech $\mathbb{F}[x]_n$ będzie przestrzenią liniową wielomianów o współczynnikach w ciele $\mathbb{F}$ stopnia $\leq n$. Niech $D: \mathbb{F}[x]_n \rightarrow \mathbb{F}[x]_n$ będzie różniczkowaniem. Dla przekształcenia D znaleźć: podprzestrzeń niezmienniczą, wartości własne i wektory własne. Zauważ, że podprzestrzeń cykliczna jednomianu x^k , $k < n$ nie ma niezmienniczej podprzestrzeni dopełniającej.

Zad. 10. Niech $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą operatora $A: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$. Pokazać, że zachodzi równość: $\chi_A(\lambda) = \chi_{A|_{\mathbf{W}}}(\lambda) \chi_{A/\mathbf{W}}(\lambda)$ gdzie $A/\mathbf{W}: \mathbf{V}/\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}/\mathbf{W}$ oznacza operator wyznaczony przez A na przestrzeniach warstw. Uogólnić tę własność na ciąg zstępujący podprzestrzeni niezmienniczych. Wywnioskować stąd, że jeśli operator zachowuje pewną flagę w $\mathbf{V}$, to jego wielomian charakterystyczny jest iloczynem wielomianów stopnia 1.

Zad. 11. Niech $A: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ będzie izomorfizmem. Wyrazić wielomian charakterystyczny $\chi_{A^{-1}}$ w terminach wielomianu χ_A .

Zad. 12. Dla dowolnego operatora $A: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ niech $A^*: \mathbf{V}^* \rightarrow \mathbf{V}^*$ oznacza odpowiadający mu operator dualny na przestrzeniach funkcjonałów. Znaleźć związek między wartościami własnymi, podprzestrzeniami niezmienniczymi oraz wielomianami charakterystycznymi operatorów A i A^* . Jeśli $\mathbf{V}$ jest przestrzenią unitarną, to izomorfizm zadany przez iloczyn skalarny $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}^*$ (odp. $\bar{\mathbf{V}} \simeq \mathbf{V}^*$ w przypadku zespolonym) jest podobieństwem operatora A^h i A^* .

Zad. 13. Dla dowolnego operatora $A: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ w przestrzeni zespolonej $\mathbf{V}$ istnieje flaga w $\mathbf{V}$ w której wszystkie podprzestrzenie są A -niezmiennicze.

Zad. 14. Korzystając z Zad. 13 oraz Zad. 10 udowodnij twierdzenie Cayley'a-Hamiltona tzn. że $\chi_A(A) = 0$.

Zad. 15 (HT 13.5). Ustalmy operator $L: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ i niezerowy wektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Niech $\{\mathbf{v}, L(\mathbf{v}), \dots, L^k(\mathbf{v})\}$ będzie bazą podprzestrzeni cyklicznej $\mathbf{V}_A(\mathbf{v})$ (p.Zad 1) Znaleźć macierz $A|_{\mathbf{V}_0}$ w tej bazie oraz wielomian charakterystyczny $\chi_{L|_{\mathbf{V}_A(\mathbf{v})}}(\lambda)$. Wykazać, że zachodzi równość $\chi_{L|_{\mathbf{V}_0}}(L)(\mathbf{v}) = 0$. Wywnioskować stąd tezę twierdzenia Cayley'a-Hamiltona.