

5. Izometrie liniowe przestrzeni unitarnych niskich wymiarów

Stefan Jackowski

29 marca 2011

Jeśli $\mathbf{V}$ jest rzeczywistą (odp. zespoloną) przestrzenią ortogonalną, to przez $O(\mathbf{V})$ oznaczamy grupę izometrii liniowych $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ (odp. $U(\mathbf{V})$). Ich podgrupy składające się z macierzy o wyznaczniku 1 będziemy oznaczać odpowiednio $SO(\mathbf{V})$ i $SU(\mathbf{V})$ i nazywać odp. specjalną grupą ortogonalną i specjalną grupą unitarną. Grupa $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ (odp. $U(\mathbf{V})$) jest izomorficzna z grupą izometrii przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ (odp. $\mathbb{C}^n$) ze standardowym iloczynem skalarnym, a więc grupą macierzy ortogonalnych $O(n)$ (odp. macierzy unitarnych $U(n)$).

Definicja 0.1. Przez odbicie lustrzane rozumiemy zawsze odbicie w podprzestrzeni kowymiaru 1, przez symetrię osiową odbicie w podprzestrzeni wymiaru 1, a symetrię centralną odbicie w 0, czyli antypodyzm. Obrotem rzeczywistej przestrzeni dwuwymiarowej nazywamy izometrię zachowującą orientację. Obrotem dowolnej przestrzeni nazywamy ortogonalne rozszerzenie obrotu pewnej podprzestrzeni 2-wymiarowej.

Zanim przejdziemy do przypadków niskowymiarowych zauważmy pewne ogólne własności grup $O(\mathbf{V})$ i $U(\mathbf{V})$.

Stwierdzenie 0.1. *Jeśli $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ jest liniową izometrią przestrzeni unitarnej, to $|\det(A)| = 1$. W przypadku rzeczywistym, izometrie dla których $\det(A) = 1$ to dokładnie izometrie zachowujące orientację. Dowolna izometria zmieniająca orientację (np. lustrzane odbicie $S : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$) wyznacza bijekcję $SO(\mathbf{V}) \rightarrow O(\mathbf{V}) \setminus SO(\mathbf{V})$ daną wzorem $A \rightsquigarrow A \circ S$.*

Zad. 1. Jeśli $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ jest jednowymiarową podprzestrzenią, to można zanurzyć grupę $O(\mathbf{W}) \subset O(\mathbf{V})$ rozszerzając dowolną izometrię $g : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$ do $\bar{g} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, kładąc identyczność na $\mathbf{W}^\perp$. Podgrupy $O(\mathbf{W})$ i $SO(\mathbf{V})$ generują całą grupę $O(\mathbf{V})$.

Zbadamy budowę grup izometrii niskowymiarowych przestrzeni unitarnych.

1 Izometrie 1-wymiarowych przestrzeni unitarnych

W wymiarze 1 możemy jednocześnie rozważać przypadek rzeczywisty i zespolony (a nawet kwaternionowy). Skoro $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ jest przekształceniem liniowym, to $A(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ dla pewnego skalaru $\lambda \in \mathbb{F}$. Ponieważ A jest izometrią, to dla dowolnego niezerowego wektora $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ mamy $\langle v, v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = |\lambda|^2 \langle v, v \rangle$ skąd wynika, że $|\lambda| = 1$, a więc $O(\mathbf{V}) = \{\lambda \in \mathbb{F} \mid |\lambda| = 1\}$. W przypadku rzeczywistym jest to dwulementowa podgrupa grupy mnożeniowej $\mathbb{R}^\times$, a w przypadku zespolonym podgrupa $\mathbb{C}^\times$ składająca się z liczb zespolonych o module =1, czyli okrąg.

Wniosek 1. $O(1) = \mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{R}^\times$ oraz $U(1) = S^1 \subset \mathbb{C}^\times$. Grupy specjalne w obu przypadkach są trywialne.

2 Izometrie 2-wymiarowych przestrzeni unitarnych nad $\mathbb{R}$

Twierdzenie 2.1. *Jeśli $\dim(\mathbf{V}) = 2$ to na $\mathbf{V}$ istnieje struktura zespolonej przestrzeni liniowej, taka że $SO(\mathbf{V}) = U(\mathbf{V}) \simeq S^1$.*

Dowód. Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie ustaloną bazą ortonormalną $\mathbf{V}$, a $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ dowolną izometrią zachowującą orientację. Rozważmy wektory $\{A(e_1), A(e_2)\}$ i zauważmy, że wektor $A(e_2)$ jest jednoznacznie wyznaczony przez wektor $A(e_1)$. Istotnie $A(e_2)$ jest jednostkowym wektorem leżącym w jednowymiarowej podprzestrzeni $\text{Lin}\{A(e_1)\}^\perp$. Tylko jeden z dwóch wektorów tworzy bazę zgodnie zorientowaną z $\{e_1, e_2\}$. Odwrotnie, zadając wektor $A(e_1)$, jednoznacznie określamy w ten sposób wektor $A(e_2)$. Zauważmy, że jeśli $J : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ jest strukturą zespoloną na $\mathbf{V}$ zadaną wzorem $J(e_1) = e_2, J(e_2) = -e_1$ to dla dowolnej izometrii tak skonstruowanej $A \circ J = J \circ A$, a więc A jest izometrią zespolonej jednowymiarowej przestrzeni. Stąd wynika, że $SO(\mathbf{V}) = U(\mathbf{V}) = S^1$. $\square$

Ze Stwierdzenia 0.1 wynika, że dowolną inną izometrię możemy przedstawić w postaci $A \circ S$ gdzie $A \in SO(\mathbf{V})$ jest obrotem a $S : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ dowolnie wybranym odbiciem lustrzanym. W terminach struktury zespolonej oznacza to, że A jest $\mathbb{C}$ -antyliniowe tzn. $A \circ J = -J \circ A$.

Wniosek 2. *Dowolna liniowa izometria 2-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni unitarnej jest lustrzanym odbiciem (gdy zmienia orientację) lub dwóch lustrzanych odbić (gdy zachowuje orientację).*

Dowód. Jeśli izometria A zmienia orientację i przeprowadza wektor e_1 na wektor $A(e_1)$ to jest odbiciem lustrzanym w prostej zadanej przez wektor $w_A := e_1 + A(e_1)$, jeśli $e_1 + A(e_1) \neq 0$ lub w prostej generowanej przez wektor $w_A := e_2$. Złożenie dwóch odbić zachowuje orientację, więc jest obrotem. Odwrotnie, ponieważ dowolna izometria $A \notin SO(\mathbf{V})$ jest odbiciem, wybierając ustaloną izometrię zmieniającą orientację S otrzymujemy bijekcję $SO(\mathbf{V}) \rightarrow O(\mathbf{V}) \setminus SO(\mathbf{V})$ (daną wzorem $A \rightsquigarrow A \circ S$), czyli dowolny obrót jest złożeniem dwóch odbić (przy czym jedno z nich można ustalić!). $\square$

Zad. 2. Niech $S : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ będzie dowolną ustaloną izometrią zmieniającą orientację. Dowolną inną izometrię zmieniającą orientację można jednoznacznie zapisać w postaci $A \circ S$, gdzie A zachowuje orientację. Zapisać w ten sposób iloczyn $(A \circ S) \circ B$, gdzie B zachowuje orientację.

3 Izometrie 3-wymiarowych przestrzeni unitarnych nad $\mathbb{R}$

Twierdzenie 3.1. *Jeśli $\dim(\mathbf{V}) = 3$ to dowolna izometria $A \in SO(\mathbf{V})$ jest obrotem w pewnej dwuwymiarowej podprzestrzeni.*

Dowód. Niech $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ będzie dowolną izometrią zachowującą orientację. Pokażemy, że A musi zachowywać pewną podprzestrzeń 1-wymiarową. Wielomian charakterystyczny $\det(A - \lambda Id)$ ma stopień 3, w więc ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Stąd wynika, że istnieje niezerowy wektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ taki, że $A(\mathbf{v}) = \pm \mathbf{v}$, a więc obcięcie A jest izometrią jednowymiarowej podprzestrzeni, $A : \text{Lin}\{\mathbf{v}\} \rightarrow \text{Lin}\{\mathbf{v}\}$. Ponieważ A jest izometrią, podprzestrzeń prostopadła $\text{Lin}\{\mathbf{v}\}^\perp$ też musi być zachowywana. Jeśli $A(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ to izometria przestrzeni dwuwymiarowej $A : \text{Lin}\{\mathbf{v}\}^\perp \rightarrow \text{Lin}\{\mathbf{v}\}^\perp$ zachowuje orientację, więc na mocy przypadku 2-wymiarowego jest obrotem. Przypadek $A(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ sprowadzamy do poprzedniego, znajdując inny wektor $\mathbf{w}$ taki, że $A(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$. Istotnie, w takim przypadku $A : \text{Lin}\{\mathbf{v}\}^\perp \rightarrow \text{Lin}\{\mathbf{v}\}^\perp$ musi zmieniać orientację, a więc być odbiciem lustrzanym, a więc $A(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ dla pewnego wektora $\mathbf{w} \in \text{Lin}\{\mathbf{v}\}^\perp$. $\square$

Wniosek 3. *Izometria liniowa unitarnej rzeczywistej przestrzeni 3-wymiarowej może być przedstawiona jako złożenie nie więcej niż trzech symetrii lustrzanych, przy czym jest obrotem wtedy i tylko wtedy, gdy jest złożeniem dwóch odbić lustrzanych.*

Dowód. Złożenie dwóch symetrii lustrzanych zachowuje orientację, więc na mocy poprzedniego stwierdzenia jest obrotem wokół pewnej osi. Niech teraz $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ będzie dowolną izometrią zmieniającą orientację. Jak poprzednio, istnieje 1-wymiarowa podprzestrzeń niezmiennicza generowana przez wektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ taki, że $A(\mathbf{v}) = \pm \mathbf{v}$. Jeśli $A(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, to izometria płaszczyzny $\text{Lin}\{\mathbf{v}\}^\perp$ musi zmieniać orientację, a więc na mocy Tw... musi być odbiciem w pewnej prostej leżącej w tej płaszczyźnie. Przekształcenie A jest więc odbiciem w płaszczyźnie generowanej przez tę prostą i wektor $\mathbf{v}$. $\square$

Zad. 3. Uogólnij powyższy wniosek na przestrzenie dowolnego wymiaru.

Uwaga 1. Zwróćmy uwagę, że w grupie $O(3)$ element $-Id$ zmienia orientację (jest złożeniem trzech odbić lustrzanych) oraz jest on przemienny z dowolnym elementem grupy $O(3)$. Stąd dowolną izometrię zmieniającą orientację można przedstawić w postaci $-A$, gdzie A jest obrotem.

4 Izometrie przestrzeni unitarnych i algebra kwaternionów

Niech $\mathbb{H}$ będzie ciałem kwaternionów. Argumenty przytoczone w 1-wymiarowym przypadku nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ przenoszą się bez zmian na kwaterniony, a więc grupa izometrii $\mathbb{H}$ -liniowych $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ jest izomorficzna z grupą mnożącą kwaternionów o module 1 - jest to sfera 3-wymiarowa $S^3 \subset \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$.

Zad. 4. Wykazać, że dowolna $\mathbb{C}$ -liniowa izometria $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ taka, że $\det(A) = 1$ jest $\mathbb{H}$ -liniowa, a więc istnieje izomorfizm $S^3 \simeq \text{SU}(2)$.

Dla dowolnego jednostkowego kwaternionu $q \in S^3$ oznaczmy przez $C_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ sprzężenie przez element q tzn. $C_q(q') := q^{-1}q'q$. Jest to izometria $\mathbb{R}$ -liniowa (ale nie $\mathbb{H}$, ani $\mathbb{C}$ -liniowa!). Działa ono trywialnie na prostej rzeczywistej, a więc zachowuje kwaterniony czysto urojone, czyli $\mathbb{R}$ -podprzestrzeń $\text{Lin}\{i, j, k\}$, którą utożsamiamy z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie 4.1. *Przyporządkowanie $S^3 \ni q \mapsto C_q \in \text{SO}(3)$ jest epimorfizmem grup, zaś jego jądro to grupa $\{-1, 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$.*

Dowód. Sprawdzenie, że $C_q = Id$ wtedy i tylko wtedy gdy kwaternion jest liczbą rzeczywistą pozostawiamy jako zadanie. Pokażemy, że dowolny element w $\text{SO}(3)$ jest iloczynem $C_q C_{q'}$. Istotnie, dla dowolnego czysto urojonego kwaternionu q odwzorowanie $-C_q$ jest odbiciem lustrzanym (i każde odbicie jest tej postaci), a stąd wynika, że $C_q C_{q'}$ jest obrotem. [por. Skrypt prof. H.Toruńczyka Rozdz. V.4 Tw. 1 i 2]. $\square$