

4. Struktury zespolone

Stefan Jackowski

14 marca 2011

Definicja. Niech $\mathbf{V}$ będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru n nad ciałem $\mathbb{R}$. Strukturą zespoloną na $\mathbf{V}$ nazywamy operator liniowy $J : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ taki, że $J^2 = -\text{Id}$. Zbiór struktur zespolonych na przestrzeni $\mathbf{V}$ oznaczamy $\mathcal{C}(\mathbf{V}) \subset \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$.

Uwaga. Struktura zespolona $J : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ wyznacza w $\mathbf{V}$ strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{C}$. Mnożenie przez zespolone skalary jest zdefiniowane następująco: $i\mathbf{v} := J(\mathbf{v})$.

Zad. 1. Jeśli na $\mathbf{V}$ istnieje struktura zespolona, to $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}$ jest parzysty, a więc $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{2n+1}) = \emptyset$.

Zad. 2. Niech $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$. Dowolny rozkład przestrzeni na sumę dwóch podprzestrzeni n -wymiarowych $V = V_1 \oplus V_2$ wyznacza dwie struktury zespolone na $\mathbf{V}$. Odwrotnie, każda struktura zespolona wyznacza taki rozkład przestrzeni na sumę prostą dwóch podprzestrzeni n -wymiarowych.

Zad. 3. Zbadać podzbiór $\mathcal{C}(\mathbf{V}) \subset \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$. Czy jest podprzestrzenią liniową? Czy jest zamknięty ze względu na mnożenie przez skalary? Sprawdzić, że jest zamknięty ze względu na sprzężanie przez automorfizmy tzn. jeśli $A \in \text{Iso}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ i $J \in \mathcal{C}(\mathbf{V})$ jest strukturą zespoloną, to $A^{-1} \circ J \circ A \in \mathcal{C}(\mathbf{V})$ tzn. grupa automorfizmów liniowych $\mathbf{V}$ działa na zbiorze struktur zespolonych. Wykazać, że dla dowolnych dwóch struktur $J, J' \in \mathcal{C}(\mathbf{V})$ istnieje automorfizm $A \in \text{GL}(\mathbf{V})$ taki, że $A^{-1} \circ J \circ A = J'$. Dla ustalonej struktury zespolonej J scharakteryzować automorfizmy A takie, że $A^{-1} \circ J \circ A = J$.

Zad. 4. Zdefiniować operację sprzężenia struktury zespolonej $\mathcal{C}(\mathbf{V}) \ni J \rightsquigarrow \bar{J} \in \mathcal{C}(\mathbf{V})$. Udowodnić, że dla dowolnych dwóch struktur zespolonych $J, J' \in \mathcal{C}(\mathbf{V})$ istnieje droga $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{V}) \subset \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ taka, że $\omega(0) = J$ oraz $\omega(1) = J'$ lub $\omega(1) = \bar{J}'$.

Zad. 5. Niech $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ będzie n -wymiarową zespoloną przestrzenią unitarną z iloczynem hermitowskim $\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}}$. "Zapominanie" o strukturze zespolonej, czyli ograniczenie ciała skalarów do $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, daje $2n$ -wymiarową przestrzeń rzeczywistą $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}$ wyposażoną w odwzorowanie $\mathbb{R}$ -dwuliniowe $\langle -, - \rangle_{\mathbb{R}} : \mathbf{V}_{\mathbb{R}} \times \mathbf{V}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gdzie $\langle -, - \rangle_{\mathbb{R}} = (\text{Re}\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}}, \text{Im}\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}})$. Sprawdzić, że $\text{Re}\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}}$ jest rzeczywistym iloczynem skalarnym na $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}$ a $\text{Im}\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}}$ antysymetryczną dwuliniową niezdegenrowaną formą na $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}$ (takie formy nazywają się *symplektyczne*). *Uwaga.* Porównaj i rozwiąż najpierw zadanie HT 6.2.

Zad. 6. Niech teraz $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}$ będzie rzeczywistą $2n$ -wymiarową przestrzenią unitarną (tzn. ortogonalną) wyposażoną w iloczyn skalarny $\langle -, - \rangle_{\mathbb{R}}$. Wtedy dowolna n -wymiarowa podprzestrzeń $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ wyznacza strukturę zespoloną $J_{\mathbf{W}} : \mathbf{V}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{V}_{\mathbb{R}}$ taką, że na otrzymanej przestrzeni zespolonej $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ istnieje iloczyn hermitowski $\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}} : \mathbf{V}_{\mathbb{C}} \times \mathbf{V}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ taki, że $\text{Re}\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}} = \langle -, - \rangle_{\mathbb{R}}$.