

4. Struktury zespolone

Stefan Jackowski

14 marca 2011

Definicja. Niech $\mathbf{V}$ będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru n nad ciałem $\mathbb{R}$. Strukturą zespoloną na $\mathbf{V}$ nazywamy operator liniowy $J : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ taki, że $J^2 = -\text{Id}$. Zbiór struktur zespolonych na przestrzeni $\mathbf{V}$ oznaczamy $\mathcal{C}(\mathbf{V}) \subset \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$.

Uwaga. Struktura zespolona $J : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ wyznacza w $\mathbf{V}$ strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{C}$. Mnożenie przez zespolone skalary jest zdefiniowane następująco: $i\mathbf{v} := J(\mathbf{v})$.

Zad. 1. Dla każdej struktury zespolonej $J : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ istnieje baza przestrzeni $\mathbf{V}$ postaci $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, J(\mathbf{v}_1), \dots, J(\mathbf{v}_n)\}$, a więc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}$ jest parzysty. (por. rozwiąż zad. HT 4.1)

Zad. 2. Zbadać podzbiór $\mathcal{C}(\mathbf{V}) \subset \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$. Czy jest podprzestrzenią liniową? Czy jest zamknięty ze względu na mnożenie przez skalary? Sprawdzić, że jest zamknięty ze względu na sprzęganie przez automorfizmy tzn. jeśli $A \in \text{Iso}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ i $J \in \mathcal{C}(\mathbf{V})$ jest strukturą zespoloną, to $A^{-1} \circ J \circ A \in \mathcal{C}(\mathbf{V})$ tzn. grupa automorfizmów liniowych $\mathbf{V}$ działa na zbiorze struktur zespolonych. Wykazać, że dla dowolnych dwóch struktur $J, J' \in \mathcal{C}(\mathbf{V})$ istnieje automorfizm $A \in \text{GL}(\mathbf{V})$ taki, że $A^{-1} \circ J \circ A = J'$. Dla ustalonej struktury zespolonej J scharakteryzować automorfizmy A takie, że $A^{-1} \circ J \circ A = J$.

Zad. 3. Udowodnić, że dla dowolnych dwóch struktur zespolonych $J, J' \in \mathcal{C}(\mathbf{V})$ istnieje droga $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{V}) \subset \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ taka, że $\omega(0) = J$ oraz $\omega(1) = J'$ lub $\omega(1) = -J'$.

Zad. 4. Niech $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ będzie n -wymiarową zespoloną przestrzenią unitarną z iloczynem hermitowskim $\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}}$. "Zapominanie" o strukturze zespolonej, czyli ograniczenie ciała skalarów do $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, daje $2n$ -wymiarową przestrzeń rzeczywistą $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}$ wyposażoną w odwzorowanie $\mathbb{R}$ -dwuliniowe $\langle -, - \rangle_{\mathbb{R}} : \mathbf{V}_{\mathbb{R}} \times \mathbf{V}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gdzie $\langle -, - \rangle_{\mathbb{R}} = (\text{Re}\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}}, \text{Im}\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}})$. Sprawdzić, że $\text{Re}\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}}$ jest rzeczywistym iloczynem skalarnym na $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}$ a $\text{Im}\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}}$ antysymetryczną dwuliniową nie zdegenrowaną formą na $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}$ (takie formy nazywają się *symplektyczne*). *Uwaga.* Porównaj i rozwiąż najpierw zadanie HT 6.2.

Zad. 5. Niech teraz $\mathbf{V}$ będzie rzeczywistą $2n$ -wymiarową przestrzenią wyposażoną w iloczyn skalarny $\langle -, - \rangle_{\mathbb{R}}$. Strukturę zespoloną $J : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ nazywamy zgodną z metryką, jeśli J jest izometrią. Wykazać, że na $\mathbb{R}^2$ istnieją dokładnie dwie struktury zespolone zgodne z kanoniczną metryką (iloczynem skalarnym). Spróbuj wyobrazić sobie zbiór takich struktur zespolonych na $\mathbb{R}^4$.