

3. Drogi w przestrzeniach wektorowych

Stefan Jackowski

8 marca 2011

Definicja. Niech $\mathbf{V}$ będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru n nad ciałem $\mathbb{R}$. *Drogą (gładką)* w przestrzeni $\mathbf{V}$ określoną na odcinku $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nazywamy odwzorowanie $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbf{V}$ takie, że dla pewnej bazy $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ współczynniki wektora $\omega(t) = \sum \omega_{\mathcal{V}}^i(t) \mathbf{v}_i$ są ciągłymi (gładkimi) funkcjami $\omega_{\mathcal{V}}^i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wektor $\omega(a)$ nazywamy początkiem drogi ω a wektor $\omega(b)$ jej końcem.

Uwaga. W przypadku gdy $\mathbf{V}$ będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru n nad ciałem $\mathbb{C}$ definicja drogi jest taka sama, z tym że rozpatrujemy przestrzeń V jako przestrzeń rzeczywistą.

Zad. 1. Wykazać, że jeśli $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbf{V}$ jest drogą (gładką) to dla dowolnej bazy $\mathcal{W}$ współczynniki $\omega(t) = \sum \omega_{\mathcal{W}}^i(t) \mathbf{v}_i$ są odwzorowaniami ciągłymi (gładkimi).

Zad. 2. Wykazać, że jeśli $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ jest funkcją ciągłą, $\omega : [c, d] \rightarrow \mathbf{V}$ drogą, a $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ przekształceniem liniowym, to złożenie $L \circ \omega \circ f$ jest drogą w $\mathbf{W}$.

Zad. 3. Jeśli $\omega : [a, b] \rightarrow L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ oraz $\eta : [a, b] \rightarrow L(\mathbf{W}, \mathbf{Z})$ są drogami, to formuła $\gamma(t) := \eta(t) \circ \omega(t)$ zadaje drogę $\gamma : [a, b] \rightarrow L(\mathbf{V}, \mathbf{Z})$. Szczególny przypadek: $\mathbf{V} = \mathbf{W} = \mathbf{Z}$.

Zad. 4. Niech $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$. Wykazać, że dowolne dwa monomorfizmy w $L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ można połączyć drogą $\omega : [a, b] \rightarrow L(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ taką, że $\forall t \in [a, b]$ $\omega(t)$ jest monomorfizmem. Sformułować i udowodnić analogiczny fakt dla epimorfizmów. *Wsk. Prof. Toruńczyk, Porcja 6 zad. 3,4.*

Zad. 5. Niech $\mathbf{V}$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową. Udowodnić, że dwa izomorfizmy w $L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ można połączyć drogą ω , taką że $\forall t \in [a, b]$ $\omega(t)$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy oba zachowują orientację lub oba zmieniają orientację $\mathbf{V}$.

Zad. 6. Niech $\mathbf{V}$ będzie zespoloną przestrzenią wektorową. Udowodnić, że dowolne dwa izomorfizmy w $L_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ można połączyć drogą ω , taką że $\forall t \in [a, b]$ $\omega(t)$ jest izomorfizmem.

Zad. 7. Niech $\mathbf{V}$ będzie przestrzenią unitarną. Utożsamiając zbiór baz $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ z podzbiorem $GL(\mathbf{V}) \subset L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ wykazać, że ortonormalizacja Grama-Schmidta wyznacza drogę ω łączącą wyjściową bazę z jej ortonormalizacją, taką że $\forall t \in [a, b]$ $\omega(t)$ jest izomorfizmem.

Zad. 8. Niech $\mathbf{V}$ będzie rzeczywistą przestrzenią unitarną. Udowodnić, że baza ortogonalna otrzymana poprzez ortogonalizację Grama-Schmidta jest zgodnie zorientowana z wyjściową bazą.

Zad. 9. Niech $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ będą przestrzeniami unitarnymi. Wtedy dla dowolnego monomorfizmu $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ i dowolnej flagi $\mathcal{F} = (\mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}_1 \subset \dots \subset \mathbf{V}_n)$ podprzestrzeni w $\mathbf{V}$ istnieje izomorfizm $S : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ zachowujący tę flagę i zachowujący orientację $\mathbf{V}$ taki, że złożenie $A \circ S : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ jest zanurzeniem izometrycznym. Sformułować i udowodnić odpowiedni fakt dla epimorfizmów. *Wsk. Prof. Toruńczyk, Porcja 4, zad. 3.*