

2. Iloczyny skalarne i przekształcenia sprzężone

Stefan Jackowski

12 marca 2011

1 Formy dwuliniowe i iloczyny skalarne

Definicja 1.1. Niech $\mathbf{V}$ będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru n nad ciałem $\mathbb{F}$. Dwuliniowe, symetryczne odwzorowanie $\langle -, - \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{F}$ nazywamy *iloczynem skalarnym* jeśli odwzorowanie $\mathbf{V} \ni \mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{v}, - \rangle \in \mathbf{V}^*$ jest izomorfizmem.

Jeśli $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ jest bazą $\mathbf{V}$ to przez $\mathcal{V}^* = (\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \dots, \mathbf{v}_n^*)$ oznaczamy bazę dualną przestrzeni dualnej $\mathbf{V}^*$, a także odpowiadającą jej bazę przestrzeni $\mathbf{V}$, którą będziemy nazywać sprzężoną ze względu na iloczyn skalarny $\langle -, - \rangle$.

Macierzą iloczynu $\langle -, - \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{F}$ w bazie $\mathcal{V}$ nazywamy macierz kwadratową $\{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle\}$.

Uwaga 1. Baza sprzężona w $\mathbf{V}$ jest jednoznacznie wyznaczona przez warunek $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j^* \rangle = \delta_{ij}$. Baza $\mathcal{V}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{V} = \mathcal{V}^*$.

Uwaga 2. Dodatnia określoność ma sens jeśli ciało jest uporządkowane: np. $\mathbb{Q}$ lub $\mathbb{R}$.

Uwaga 3. Iloczyny skalarne można definiować też w modułach wolnych nad pierścieniami np. nad liczbami całkowitymi $\mathbb{Z}$.

Definicja 1.2. Flagą w przestrzeni wektorowej $\mathbf{V}$ wymiaru n nazywamy wstępujący ciąg podprzestrzeni liniowych $0 = \mathbf{V}_0 \subsetneq \mathbf{V}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathbf{V}_{n-1} \subsetneq \mathbf{V}_n = \mathbf{V}$. Zauważmy, że $\dim \mathbf{V}_i = i$.

Zad. 1. Metodą Grama-Schmidta wykazać, że dowolną bazę przestrzeni z iloczynem skalarnym można zortogonalizować (ale nie koniecznie ortonormalizować!), czyli dla każdego iloczynu skalarnego istnieje baza w której jego macierz jest diagonalna.

Zad. 2. Sprawdzić, że jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i dwuliniowe, symetryczne odwzorowanie jest dodatnio określone, to jest iloczynem skalarnym.

Zad. 3 (Kryterium Sylwestera). Niech $\langle -, - \rangle$ będzie dwuliniową formą symetryczną na przestrzeni $\mathbf{V}$. Forma $\langle -, - \rangle$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy istnieje flaga $0 = \mathbf{V}_0 \subsetneq \mathbf{V}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathbf{V}_{n-1} \subsetneq \mathbf{V}_n = \mathbf{V}$ taka, że $\det \langle -, - \rangle|_{\mathbf{V}_i} > 0$ dla $i > 0$.

2 Przekształcenia dualne i sprzężone

Zad. 4. Przypomnieć własności przyporządkowania homomorfizmowi $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ homomorfizmu dualnego (sprzężonego) $F^* : \mathbf{W}^* \rightarrow \mathbf{V}^*$, a w szczególności funktorialność tzn: $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ oraz $Id^* = Id$. Dla dowolnej podprzestrzeni (a nawet podzbioru) $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ definiujemy zbiór funkcjonałów prostopadłych: $U^\perp = \{\phi \in \mathbf{V}^* \mid \phi(u) = 0 \ \forall u \in U\}$. Przypomnieć związki między jądrem i kojądrem F oraz odpowiednimi przestrzeniami prostopadłymi.

Zad. 5. Niech $(V, \langle -, - \rangle)$ będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym. Wtedy dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbf{V}$ wyznaczone przez iloczyn skalarny $\langle -, - \rangle$ utożsamienie $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}^*$ zadaje bijekcję $\{\mathbf{w} \in \mathbf{V} \mid \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{v} \in A\} \simeq A^\perp$.

Zad. 6. Niech $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ będzie homomorfizmem przestrzeni wyposażonych w iloczyny skalarne. Zdefiniujemy homomorfizm $F^* : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ jako złożenie: $\mathbf{W} \simeq \mathbf{W}^* \xrightarrow{F^*} \mathbf{V}^* \simeq \mathbf{V}$ gdzie utożsamienia przestrzeni wektorowych z przestrzeniami dualnymi dane są przez odpowiednie iloczyny skalarne. Sprawdzić, że przekształcenie $F^* : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ spełnia warunek:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{w} \in \mathbf{W} \quad \langle F(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{W}} = \langle \mathbf{v}, F^* \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{V}}.$$

i jest przezeń wyznaczone jednoznacznie. Przekształcenie F^* nazywa się przekształceniem sprzężonym do F ze względu na ustalone iloczyny skalarne.

Zad. 7 (Macierz przekształcenia sprzężonego). Niech $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ będą odpowiednio bazami $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$. Wtedy między macierzami $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ i $F^* : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ zachodzi związek: $M_{\mathcal{W}^*}^{\mathcal{V}}(F^*) = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(F)^T$.

Zad. 8. Przekształcenie $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ nazywamy samosprzężonym (albo symetrycznym) jeśli $F^* = F$. Sprawdzić, że jeśli F jest samosprzężony, to $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_F := \langle F(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle$ jest przekształceniem dwuliniowym, symetrycznym. Jeśli $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_F$ jest iloczynem skalarnym, to operator nazywa się *dodatnio określony* ze względu na iloczyn skalarny $\langle -, - \rangle$.

Zad. 9 (Pierwiastkowanie operatorów). Dla dowolnego operatora samosprzężonego dodatnio określonego $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ istnieje operator $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ taki, że $F = A^* \circ A$.