

Przestrzeń iloczynów skalarnych

Stefan Jackowski

28 lutego 2011

Definicja 0.1. Niech $\mathbf{V}$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową skończonego wymiaru n . Wprowadzamy oznaczenia:

1. $\mathcal{B}(\mathbf{V}) := \{\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \mid \mathbf{v}_i \in \mathbf{V}, \mathcal{V} \text{ jest bazą } \mathbf{V}\}$
2. $\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V}; \mathbb{R})$ przestrzeń wektorowa dwuliniowych form $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$,
3. $\mathcal{S}(\mathbf{V}) := \{\phi \in \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V}; \mathbb{R}) \mid \phi \text{ jest iloczynem skalarnym}\}$,
4. $\text{Iso}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) := \{\phi \in \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \mid \phi \text{ jest izomorfizmem}\}$
5. Macierz kwadratowa A nazywa się ortogonalna jeśli $A \circ A^T = Id$.
6. Podzbiór $A \subset \mathbf{V}$ nazywa się wypukły jeśli $\forall_{a,b \in A} \forall t \in [0, 1], ta + (1-t)b \in A$

Zad. 1. Istnieje bijekcja $\mathcal{B}(\mathbf{V}) \simeq \text{Iso}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$. Składanie przekształceń zadaje w $\text{Iso}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ strukturę grupy, zwanej grupą liniową przestrzeni $\mathbf{V}$ i oznaczanej $GL(\mathbf{V})$.

Zad. 2. Znaleźć wymiar przestrzeni $\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V}; \mathbb{R})$ oraz jej podprzestrzeni $\text{Hom}^{\text{sym}}(\mathbf{V}, \mathbf{V}; \mathbb{R})$ składającej się z form symetrycznych.

Zad. 3. Wykazać, że $\mathcal{S}(\mathbf{V}) \subset \text{Hom}^{\text{sym}}(\mathbf{V}, \mathbf{V}; \mathbb{R})$ jest zamknięty ze względu na mnożenie przez dodatnie skalary, oraz jest wypukły. (Ale nie jest podprzestrzenią liniową.) Wyobrazić sobie ten zbiór w przypadku gdy $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V} \leq 2$.

Zad. 4. Istnieje surjektywne odwzorowanie $\mathcal{B}(\mathbf{V}) \ni \mathcal{V} \rightsquigarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}} \in \mathcal{S}(\mathbf{V})$ przyporządkowujące bazie $\mathcal{V}$ iloczyn skalarny $\langle -, - \rangle_{\mathcal{V}}$ w którym ta baza jest ortonormalna.

Zad. 5. Niech $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$. Zachodzi równość $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}}$ wtedy i tylko wtedy gdy macierz $[Id]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ jest ortogonalna.

Wniosek 1. Niech $\mathbf{V}$ będzie rzeczywistą skończonego wymiarową przestrzenią wektorową.

1. Zbiór iloczynów skalarnych jest wypukłym podzbiorem w przestrzeni liniowej $\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V}; \mathbb{R})$, zamkniętym ze względu na mnożenie przez dodatnie skalary;
2. Grupa liniowa $GL(\mathbf{V})$ działa tranzytywnie na zbiorze $\mathcal{S}(\mathbf{V})$, a więc wybór dowolnego iloczynu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zadaje bijekcję określoną na zbiorze warstw: $GL(\mathbf{V})/\mathbf{O}(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \simeq \mathcal{S}(\mathbf{V})$ gdzie $\mathbf{O}(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oznacza grupę izometrii iloczynu $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Zadania do kontemplacji

Zad. 6. ♡ Sformułować i udowodnić odpowiednie fakty w przypadku zespolonych przestrzeni wektorowych i iloczynów hermitowskich.

Zad. 7. ♡ Czy powyższe rozważania pozostają prawdziwe dla przestrzeni wektorowych nad ciałem liczb wymiernych i iloczynów skalarnych o wartościach wymiernych ?