31 #2727 55.50 57.30

Atiyah, Michael; Bott, Raoul

On the periodicity theorem for complex vector bundles.

Acta Math. **112** 1964 229–247

Der Bottsche Periodizitatssatz fur die unitare Gruppe $U = \lim U(n)$ liefert eine Isomorphie zwischen der k-ten und der $(k+2)$-ten Homotopiegruppe von U [Bott, Ann. of Math (2) 70 (1959), 313–337; MR 22#987]. Spater wurde der Satz in der Form $K(X \times S^2) \simeq K(X) \otimes K(S^2)$ ausgesprochen und angewandt [Atiyah und Hirzebruch, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. III, pp. 7–38, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1961; MR 25#2617]. Der Satz stellt so (fur einen kompakten Raum X) einen Zusammenhang her zwischen den komplexen Vektorraum-Bundeln uber $X \times S^2$ und denen uber X und wird in dieser Form hier in wunderschoner elementarer Weise bewiesen. Der Beweis benutzt keine algebraische Topologie und keine Morsesche Theorie, sein Grundprinzip ist vielmehr die Approximation und Homotopieklassifikation der "clutching functions" (Ubergangsfunktionen oder Klebefunktionen genannt) mittels der Fourierentwicklung.

Es sei E ein komplexes Vektorraum-Bundel uber dem kompakten Raum X. Die 2-dimensionale Sphare werde als Gausssche Ebene $C \cup \{\infty\}$ angesehen. Es sei $P = X \times S^2$, ferner sei P^0 das cartesische Produkt von X mit dem abgeschlossenen Vollkreis $\{z \big| |z| \leq 1\}$, analog P^∞ das Produkt mit $\{z \big| z = \infty \vee |z| \geq 1\}$ und $S = P^0 \cap P^\infty$ das Produkt von X mit dem Einheitskreis $\{z \big| |z| = 1\}$. Es ist $P = P^0 \cup P^\infty$. Die Projektionen $S \to X$, $P^0 \to X$, $P^\infty \to X$, $P \to X$ werden mit π, π_0, π_∞, π_1 bezeichnet. Gegeben sei nunmehr eine stetige Funktion f, die jedem Punkt $(x,z) \in S$ einen Endomorphismus der Faser E_x zuordnet. Dann heisst fur jede ganze Zahl k

$$a_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(x,z) z^{-k-1} dz \in \mathrm{End}(E_x)$$

der k-te Fourierkoeffizient von f. Man definiert $f_n = (1/n) \sum_{r=0}^n s_r$, wobei $s_r = \sum_{k=-r}^r a_k z^k$. Auch f_n ordnet jedem $(x,z) \in S$ einen Endomorphismus von E_x zu und ist stetig. Nach Fejer konvergiert f_n gleichmassig gegen f. Die Funktion f heisst Klebefunktion, wenn $f(x,z) \in \mathrm{Iso}(E_x)$ fur alle $(x,z) \in S$. Sie definiert vermoge Klebung von ${\pi_0}^*E$ und ${\pi_\infty}^*E$ langs π^*E ein komplexes Vektorraum-Bundel (E,f) uber $P = X \times S^2$ und jedes komplexe Vektorraum-Bundel uber P kann so erhalten werden. Ist f Klebefunktion, dann ist auch f_n fur n hinreichend gross. Die Bundel (E,f) und (E,f_n) sind fur n hinreichend gross aquivalent, da die Klebefunktionen f und f_n homotop sind (homotop: die verbindende Schar besteht nur aus Klebefunktionen). Es lassen sich also alle Bundel uber P durch Klebefunktionen der Gestalt $f=\sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathrm{End}(E)$ erhalten.

Uber S^2 und damit uber $P = X \times S^2$ gibt es das Hopfsche Geradenbundel H, das zur Klebefunktion z^{-1} gehort (E ist hier das triviale Vektorraum-Bundel mit Faser C). Daher wird jedes Bundel uber P tensoriert mit einer negativen Potenz von H durch eine polynomiale Klebefunktion

$$p(x,z)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x) z^k \in \mathrm{End}(E_x)$$

gegeben. Aus dem obigen Polynom p gewinnt man die Matrix

$$L^n(p)=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ -z & 1 & & \\ & -z & 1 & \\ & & \cdots & \\ & & -z & 1 \end{pmatrix}.$$

$L^n(p)$ ist von der Form $az+b$—wo a, b Endomorphismen von $(n+1)E = E\oplus\cdots\oplus E$ sind—und ist eine Klebefunktion fur $(n+1)E$. Da die Matrix $L^n(p)$ gleich $(1+N_1)(p\oplus 1\oplus\cdots\oplus 1)(1+N_2)$ ist, wo N_1, N_2 nilpotent sind, stellt sich die Klebefunktion $L^n(p)$ als homotop zur Klebefunktion $p\oplus 1\oplus\cdots\oplus 1$ von $(n+1)E$ heraus. Es ist daher

$$(E,p)\oplus n\cdot {\pi_1}^* E \cong ((n+1)E, L^n(p)).$$

Damit ist man auf die Untersuchung linearer Klebefunktionen $p(z)=az+b$ fur ein Vektorraum-Bundel E uber X gekommen ($a,b\in \mathrm{End}(E)$). Nunmehr sind

$$Q^0=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}(az+b)^{-1}a\,dz$$

und

$$Q^\infty=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}a(az+b)^{-1}dz$$

Endomorphismen, ja sogar Projektionsoperatoren von E, die mit a und b vertraglich sind: $aQ^0=Q^\infty a$, $bQ^0=Q^\infty b$. Setzt man ${E_+}^i = Q^i E$ und ${E_-}^i=(1-Q^i)E$, wobei $i=0,\infty$, dann ist

$$p=p_+\oplus p_-\colon {E_+}^0\oplus {E_-}^0\to {E_+}^\infty\oplus {E_-}^\infty,$$

mit $p_+=a_+z+b_+$ und $p_-=a_-z+b_-$, wobei

$$p_+(x,z)\colon {E_+}^0(x,z)\to {E_+}^\infty(x,z)$$

fur alle $(x,z) \in P^\infty$, und $p_-(x,z)$ fur alle $(x,z) \in P^0$ ein Isomorphismus ist, insbesondere sind a_+ und b_- Isomorphismen. Die Klebefunktion p ist homotop zur Klebefunktion $a_+z \oplus b_-$. Daraus folgt dann leicht, dass

$$(E,p) \simeq ({E_+}^0, z) \oplus ({E_-}^0, 1) \simeq {\pi_1}^* {E_+}^0 \otimes H^{-1} \oplus {\pi_1}^* {E_-}^0.$$

Aus den bisherigen Uberlegungen kann man zusammenfassend schliessen, dass es zu jedem Bundel F uber $X \times S^2$ eine naturliche Zahl n gibt, so dass

$$F \otimes H^{-n} \oplus {\pi_1}^* E_1 \cong {\pi_1}^* E_2 \otimes H^{-1} \oplus {\pi_1}^* E_3$$

ist, wo E_1, E_2, E_3 Bundel uber X sind. Aus der Homotopie von Klebefunktionen

$$\begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

folgt $H^{-2} \oplus 1 = 2H^{-1}$. Rechnet man nunmehr in $K(P)$, dem Ring der "virtuellen" Vektorraum-Bundel uber X, dann ist also $([H]-1)^2 = ([H]^{-1}-1)^2 = 0$ und jedes Element $\xi \in K(P)$ lasst sich damit in der Form

$$\xi = {\pi_1}^* \xi_1 + {\pi_2}^* \xi_2 \cdot ([H]-1)$$

schreiben, wo ξ_1, $\xi_2 \in K(X)$. In der Tat sind ξ_1, ξ_2 eindeutig bestimmt, wie die Verfasser durch genaue Verfolgung der angegebenen Konstruktionen nachweisen und $K(P) = K(X \times S^2)$ ist also freier $K(X)$-Modul mit 1 und $[H]-1$ als Erzeugenden. Die Ringstruktur von $K(X \times S^2)$ wird durch die Relation $([H]-1)^2 = 0$ bestimmt. Dies ist der Bottsche Periodizitatssatz.

Die Verfasser fuhren ihren Beweis fur den allgemeineren Fall durch, dass statt $X \times S^2$ ein S^2-Bundel Y uber X mit C^* als Strukturgruppe genommen wird. Es ist dann wieder $K(Y)$ ein freier $K(X)$-Modul mit 1 und $[H]-1$ als Erzeugenden. Die Ringstruktur von $K(Y)$ wird durch die Relation $([H]-1)([L][H]-1) = 0$ gegeben, wo L das Vektorraum-Bundel der Faserdimension 1 ist, das zum C^*-Prinzipalbundel assoziiert ist. (Die Faser Y_x ist die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von L_x.)

Die Arbeit ist in sich abgeschlossen und bringt auch eine sehr nutzliche schnelle Einfuhrung in die Theorie der Vektorraum-Bundel und ihrer grundlegenden Homotopie-Eigenschaften. Der neue Beweis des Periodizitatssatzes entwickelte sich aus den Untersuchungen uber elliptische Operatoren mit Randwertbedingungen [vgl. M. F. Atiyah und I. M. Singer, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 422–433; MR

28#626; Verfasser, Differential analysis (Bombay Colloq., 1964), pp. 175–186, Oxford Univ. Press, London, 1964]. *F. Hirzebruch*