Kombinatorycznie o tożsamościach kombinatorycznych

Beata Bogdańska, Szczecin

Odczyt zawiera propozycję dydaktyczną usystematyzowanej i samowystarczalnej prezentacji tematu: **Tożsamości dotyczące symbolu dwumiennego**.

1. Oznaczenia i fakty podstawowe

Symbolem $\langle \boldsymbol{n} \rangle$ oznaczamy zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$. Przez $\mathcal{F}(k, n)$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji $\langle \boldsymbol{k} \rangle \longrightarrow \langle \boldsymbol{n} \rangle$. ***Moc*** (= ilość elementów) zbioru skończonego X oznaczamy symbolem $|X|$. W szczególności $|\mathcal{F}(k, n)| = n^k$. Dla danego zbioru X, symbolem $\mathcal{P}(X)$ oznaczamy ***zbiór potęgowy*** zbioru X, czyli rodzinę wszystkich (łącznie z pustym i całym X) podzbiorów zbioru X, a symbolem $\mathcal{P}_k(X)$, rodzinę wszystkich podzbiorów k-elementowych zbioru X.

Pierwszym twierdzeniem z kombinatoryki, z jakim powinien zapoznać się każdy studiujący, jest twierdzenie o mocy zbioru potęgowego $\mathcal{P}(X)$ danego zbioru skończonego:

TWIERDZENIE 1 *Jeżeli zbiór X jest zbiorem skończonym i ma n elementów, to zbiór $\mathcal{P}(X)$ ma 2^n elementów.*

Dowód. Każdy podzbiór $A \subseteq X$ utożsamiamy (wzajemnie jednoznacznie) z funkcją $\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ określoną następująco

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad x \in A, \\ 0, & \text{gdy} \quad x \notin A. \end{cases}$$

(Funkcja χ_A nazywa się ***funkcją charakterystyczną*** zbioru A). Wszystkich takich funkcji jest dokładnie $|\mathcal{F}_(n, 2)|$, czyli 2^n,. ▶

OZNACZENIE. Moc zbioru $\mathcal{P}_k(\langle \boldsymbol{n} \rangle)$ (wszystkich) k-elementowych podzbiorów zbioru $\langle \boldsymbol{n} \rangle$ (lub **dowolnego** zbioru n-elementowego) oznaczamy:

$$|\mathcal{P}_k(\langle \boldsymbol{n} \rangle)| = \binom{n}{k}.$$

Czytamy: *en po ka*. Nazywamy zaś ***symbolem*** lub ***współczynnikiem dwumiennym***.

Jasne, że $\binom{n}{k} = 0,$ gdy $k > n$ ale $\binom{n}{0} = 1.$ Wnioskiem z **T1** jest następująca równość:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n. \tag{1}$$

Symbol dwumienny pojawia się w matematyce szkolnej przy okazji dowodu ***twierdzenia o dwumianie***, czyli równości:

$$(\alpha + \beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k \tag{2}$$

dla dowolnych liczb $\alpha,\ \beta$ i $n \in \mathbb{N}.$ Każdy, moim zdaniem, powinien tak długo oglądać tę równość, aż dojrzy jej ”nieuchronność”. Zwykły dowód indukcyjny równości (2) pokazujemy uczniowi dopiero dużo później. Również sugestia dowodu równości (1) przez podstawienie $\alpha = \beta = 1$ w równości (2), jest mało pouczająca.

2. Interpretacje symbolu dwumiennego

Warto mieć przed oczyma **rozmaite interpretacje** symbolu dwumiennego. Najprostszej interpretacji dostarczają tak zwane ciągi binarne:

Definicja* 1** Ciąg skończony $(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_n)$ nazywa się ***ciągiem binarnym, gdy jego wyrazy są elementami pewnego zbioru dwuelementowego, zazwyczaj $\{0,\, 1\}$ (choć zbiór $\{\star,\, \bullet\}$ jest gorszy tylko z powodów leksykograficznych).

Udowodnimy teraz twierdzenie, które opisuje sześć typów zbiorów skończonych, których moc dana jest w postaci $\binom{s}{t}$.

TWIERDZENIE 2 *Niech $k,\, n$ będą liczbami naturalnymi. Wówczas:*

1. Niech $\mathcal{B}(n,\, k)$ będzie zbiorem wszystkich ciągów binarnych długości $n,$ w których na k miejscach występuje $1,$ a na pozostałych $n-k$ miejscach występuje $0.$ Wtedy

$$|\mathcal{B}(n,\, k)| = \binom{n}{k}. \tag{3}$$

2. *Niech $\mathcal{R}\,(k,\, n) \subseteq \mathcal{F}(k,\, n)$ będzie zbiorem wszystkich funkcji* ***ściśle rosnących****. Wtedy*

$$|\mathcal{R}\,(k,\, n)| = \binom{n}{k}, \tag{4}$$

3. *Niech $\mathcal{R}'\,(k,\, n) \subseteq \mathcal{F}(k,\, n)$ będzie zbiorem wszystkich funkcji* ***niemalejących****. Wtedy*

$$|\mathcal{R}'\,(k,\, n)| = \binom{n+k-1}{k}, \tag{5}$$

4. *Niech $\mathcal{D}\,(k,\,n)$ będzie zbiorem wszystkich* ***najkrótszych*** *dróg kratowych łączących punkt $A = (0,\,0)$ z punktem $Z = (n,\,k)$. Wtedy*

$$|\mathcal{D}\,(k,\,n)| = \binom{n+k}{k}, \tag{6}$$

5. *Niech $\mathcal{T}\,(k,\,n)$ będzie zbiorem wszystkich rozwiązań w liczbach* ***całkowitych nieujemnych*** *równania $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$. Wtedy*

$$|\mathcal{T}\,(k,\,n)| = \binom{n+k-1}{k-1}, \tag{7}$$

6. *Niech $\mathcal{T}'\,(k,\,n)$ będzie zbiorem wszystkich rozwiązań w liczbach* ***naturalnych*** *równania $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$. Wtedy*

$$|\mathcal{T}'\,(k,\,n)| = \binom{n-1}{k-1}. \tag{8}$$

D o w ó d. **1.** Wypiszmy wszystkie elementy zbioru $\langle \boldsymbol{n} \rangle$, a pod spodem ciąg binarny:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{array}$$

Ciąg binarny "wybiera" ze zbioru $\{1,\,2,\,3,\,\ldots\,,n\}$ te elementy, pod którymi stoi 1. W ten sposób zbudowaliśmy bijekcję między zbiorem $\mathcal{B}(n,\,k)$ a zbiorem $\mathcal{P}_k(\langle \boldsymbol{n} \rangle)$.

2. Jeżeli $f : \langle \boldsymbol{k} \rangle \longrightarrow \langle \boldsymbol{n} \rangle$ jest funkcją (ściśle) rosnącą, to zbiór

$$f(\langle \boldsymbol{k} \rangle) := \{f(1),\, f(2),\, \ldots\,, f(k)\},$$

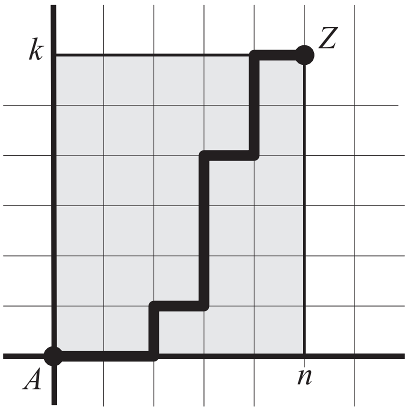
wartości funkcji f jest k-elementowym podzbiorem zbioru $\langle \boldsymbol{n} \rangle$. Odwrotnie, każdy k-elementowy podzbiór $\{x_1,\, x_2,\, \ldots\,, x_k\}$ zbioru $\langle \boldsymbol{n} \rangle$, którego elementy ustawiliśmy w ciąg rosnący $x_1 < x_2 < \ \ldots\ < x_k$, wyznacza dokładnie jedną funkcję rosnącą $f : \langle \boldsymbol{k} \rangle \longrightarrow \langle \boldsymbol{n} \rangle$ (wzorem $f(i) = x_i$). Stąd widać, że liczba $|\mathcal{R}(k,\,n)|$ równa jest ilości k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego.

3. Jeżeli $f : \langle \boldsymbol{k} \rangle \longrightarrow \langle \boldsymbol{n} \rangle$ jest funkcją niemalejącą, to funkcja $g : \langle \boldsymbol{k} \rangle \longrightarrow \langle \boldsymbol{n+k-1} \rangle$ dana wzorem

$$g(i) = f(i) + i - 1$$

jest, jak łatwo sprawdzić, funkcją ściśle rosnącą. Czytelnik zechce sprawdzić, że w ten sposób określona została bijekcja między zbiorami $\mathcal{R}'\,(k,\,n)$ i $\mathcal{R}\,(k,\,n+k-1)$. Stąd, na mocy równości (4), dostajemy równość (5).

4. ***Drogą kratową*** nazywamy tu łamaną o wierzchołkach w punktach kratowych i każdym boku będącym odcinkiem jednostkowym równoległym do osi odciętych lub do osi rzędnych.



Rys. 1

Jasne, że najkrótszymi są te drogi kratowe, które prowadzą tylko ”w prawo” i/lub ”w górę”. Będziemy nazywać takie drogi EN-drogami.

Dowolnej (najkrótszej) drodze kratowej odpowiada wzajemnie jednoznacznie ciąg binarny długości $n+k$ o wyrazach $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{N}$, w którym litera $\boldsymbol{E}$ występuje n razy, a litera $\boldsymbol{N}$ występuje k razy. (Tu, $\boldsymbol{E}$ oznacza elementarny ruch ”na wschód”, a $\boldsymbol{N}$ – elementarny ruch ”na północ”.) Na przykład, drodze na rysunku obok, odpowiada ciąg binarny $(\boldsymbol{E\,E\,N\,E\,N\,N\,N\,E\,N\,N\,E})$. Wiemy, zob. **T2.1**, że ciągów binarnych spełniających powyższe warunki jest dokładnie $\binom{n+k}{k}$.

5. Każdemu rozwiązaniu $(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k)$ w liczbach nieujemnych całkowitych równania $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ przyporządkujemy (wzajemnie jednoznacznie czyli bijektywnie) ciąg binarny

$$(\underbrace{\bigstar \ldots \bigstar}_{a_1} \lozenge \underbrace{\bigstar \ldots \bigstar}_{a_2} \lozenge \underbrace{\bigstar \ldots \bigstar}_{a_3} \lozenge \underbrace{\bigstar \ldots \bigstar}_{a_4} \lozenge \quad \ldots \quad \lozenge \underbrace{\bigstar \ldots \bigstar}_{a_k}),$$

w którym **rombiki**, w ilości $k-1$, oddzielają kolejne grupy **gwiazdek**. W i-tej grupie występuje a_i **gwiazdek**. Jeżeli $a_i = 0$ to, oczywiście, odpowiednie **rombiki** stoją obok siebie. **Gwiazdek** jest n. Na przykład, elementowi $(0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 7)$ zbioru $\mathcal{T}(5,\, 8)$ odpowiada ciąg binarny

$$(\lozenge \bigstar \lozenge \lozenge \lozenge \bigstar \bigstar \bigstar \bigstar \bigstar \bigstar \bigstar).$$

Z istnienia opisanej bijekcji wynika, że liczba $|\mathcal{T}\,(k,\, n)|$ równa jest liczbie *gwiazdkowo-rombikowych* ciągów binarnych długości $n+k-1$ zawierających dokładnie $k-1$ **rombików**. Stąd, na mocy **T2.1**, równość (7).

6. Każdemu elementowi $(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k) \in \mathcal{T}'\,(k,\, n)$ przyporządkujmy (bijektywnie) rozwiązanie $(a_1 - 1,\, a_2 - 1,\, \ldots,\, a_k - 1)$ równania

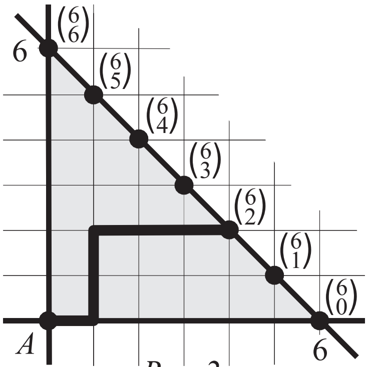
$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n - k$$

w liczbach całkowitych nieujemnych. To przyporządkowanie jest bijekcją zbioru $\mathcal{T}'\,(k,\, n)$ na zbiór $\mathcal{T}\,(k,\, n-k)$. Stąd

$$|\mathcal{T}'\,(k,\, n)| = |\mathcal{T}\,(k,\, n-k)| = \binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

To kończy dowód twierdzenia. ▶

W dalszym ciągu będziemy wykorzystywać wniosek z części **4.** powyższego twierdzenia:



Rys. 2

WNIOSEK. *Dróg idących w prawo i w górę po liniach całkowitoliczbowej siatki łączących węzeł* $(0, 0)$ *z jakimś węzłem leżącym na prostej o równaniu* $x + y = n$, *gdzie* $n \in \mathbb{N}$, *jest dokładnie* 2^n.

Dowód. Na rysunku obok widzimy przypadek $n = 6$. Zgodnie z **T2.4**, dróg (w prawo i/lub w górę) zaczynających się w $A = (0, 0)$ a kończących w węźle $(n - j, j)$ jest dokłądnie $\binom{n}{j}$. Zatem wszystkich rozważanych dróg jest 2^n, patrz równość (1). Na rysunku, przy każdym węźle leżącym na prostej $x + y = n$, zaznaczyliśmy ilość dróg kończących się w tym węźle. ▶

3. Ile to naprawdę jest $\binom{n}{k}$?

Istnieje – moim zdaniem **niedobry** – zwyczaj, zgodnie z którym równość

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \tag{9}$$

jest **skrótem** lub **definicją**. W rzeczywistości jest to **twierdzenie**:

TWIERDZENIE 3 *Dane są liczby* $0 \leq k \leq n$. *Wówczas, zachodzi równość* (9). (Pamiętamy o **umowie**: $0! = 1$.)

Dowód. Ciągów różnowartościowych długości k o wyrazach należących do zbioru $\langle \boldsymbol{n} \rangle$ jest $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. To jest jasne, bo pierwszy wyraz można wybrać na n sposobów, drugi na $n - 1$ sposobów itd., zaś k-ty wyraz na $n - k + 1$ sposobów. Ponieważ elementy dowolnego zbioru k-elementowego mogą być ustawione na $k!$ sposobów w ciąg różnowartościowy, więc widzimy, że

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}. \tag{10}$$

Stąd, domnażając licznik i mianownik przez $(n - k)!$, dostajemy równość (9). ▶

4. Podstawowe własności współczynników dwumiennych

Najważniejsze własności współczynników dwumiennych dane są przez tożsamość symetrii (11), tożsamość Pascala (12) i tożsamość pochłaniania (13).

ZADANIE 1 Udowodnić prawdziwość następującej ***tożsamości symetrii***:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \tag{11}$$

dla dowolnych $0 \leq k \leq n$.

Rozwiązanie. Dowód z wykorzystaniem równości (9) lub (10) jest mało pouczający. Staramy się więc przekonać ucznia, aby ”za równością” (11) dostrzegał **bijekcję**

$$\mathcal{P}_k(\langle \boldsymbol{n} \rangle) \ni A \longleftrightarrow A^c \in \mathcal{P}(\langle \boldsymbol{n-k} \rangle)$$

albo bijekcję polegającą na zamianie zer na jedynki i odwrotnie w ciągach binarnych, albo bijekcję (między drogami kratowymi) zadaną przez odbicie w dwusiecznej pierwszej ćwiartki. ⧫

Podobnie ma się sprawa z równością konstytuującą trójkąt Pascala:

ZADANIE 2 Udowodnić, że zachodzi następująca ***tożsamość Pascala***

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}, \tag{12}$$

dla dowolnych liczb całkowitych $0 \le k \le n$.

Rozwiązanie. Sposób 1. Tożsamość Pascala bardzo łatwo wywnioskować z (9) (lub (10)). Proponujemy jednak uczniom rozumowanie ”uczciwe”. Rozważmy mianowicie dowolny $(n+1)$-elementowy zbiór X i **ustalmy** jeden jego element a. Wówczas, $(k+1)$-elementowe podzbiory zbioru X są **jednego z dwóch typów**: do pierwszego typu należą takie, które zawierają element a, a do drugiego takie, które elementu a nie zawierają. Zbiorów pierwszego typu jest tyle samo, co k-elementowych podzbiorów zbioru $X \setminus \{a\}$, czyli $\binom{n}{k}$, a zbiory drugiego typu stanowią rodzinę $(k+1)$-elementowych podzbiorów zbioru $X \setminus \{a\}$, jest ich więc $\binom{n}{k+1}$. Stąd równość (12).

Sposób 2. Można też rozumować następująco: Zbiór wszystkich najkrótszych dróg kratowych łączących $(0,\,0)$ z $(n-k,\,k+1)$ jest sumą dwóch rozłącznych podzbiorów: 1) zbioru dróg przechodzących przez punkt $(n-k,\,k)$, (tych jest $\binom{n}{k}$) i 2) zbioru dróg przechodzących przez punkt $(n-k-1,\,k+1)$ (tych jest $\binom{n}{k+1}$). Wszystkich rozważanych dróg jest $\binom{n+1}{k+1}$, stąd równość (12) ⧫

ZADANIE 3 Udowodnić następujące ***tożsamości pochłaniania***:

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}, \tag{13}$$

$$k(k-1) \cdot \binom{n}{k} = n(n-1) \cdot \binom{n-2}{k-2}, \tag{14}$$

$$k^2 \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1} + n(n-1) \cdot \binom{n-2}{k-2}. \tag{15}$$

Rozwiązanie. Obie strony równości (13) interpretujemy jako ilość możliwych wyborów k-elementowych zespołów z liderem. Każdy taki zespół możemy utworzyć w następujący sposób: najpierw wybrać k osób spośród n osób, a następnie spośród nich lidera albo najpierw wybrać lidera spośród n osób, a następnie spośród $n-1$ osób wybrać zespół $k-1$ osób. Postępowanie pierwszego typu daje nam $k \cdot \binom{n}{k}$ sposobów, a postępowanie drugiego typu daje nam $n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ sposobów. Sposób liczenia nie jest istotny więc mamy równość.

Obie strony równości (14) interpretujemy jako ilość możliwych wyborów k-elementowych zespołów z dowódcą i, różnym od niego, jego zastępcą.

Równość (15) jest sumą (13) i (14). Ma również następującą interpretację kombinatoryczną: oznacza ilość możliwych wyborów k-elementowych zespołów z dowódcą i zastępcą dowódcy, przy czym dowódca może być swoim zastępcą. ♦

ZADANIE 4 Udowodnić, wskazując odpowiednią interpretację kombinatoryczną, że

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}, \tag{16}$$

dla wszystkich całkowitych $0 \le k \le m \le n$.

Rozwiązanie. Rozważmy zbiór n-osobowy. Obie strony równości (16) oznaczają ilość wszystkich, wybranych z tego zbioru, m-osobowych "zespołów" z k-osobowym "zarządem". Przy czym, liczba z lewej strony oznacza ilość wyborów k-osobowych zarządów w każdym z, uprzednio wybranych, m-osobowych zespołów. Liczba z prawej strony oznacza ilość możliwych "dokooptowań" $m-k$ członków zespołu, do uprzednio wybranych k-osobowych zarządów. ♦

ZADANIE 5 Udowodnić, wskazując odpowiednią interpretację kombinatoryczną, że

$$n^2 = \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2}, \tag{17}$$

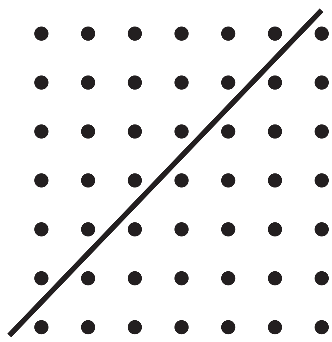
dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Rozwiązanie. Jasne, że

$$\mathcal{F}(2, n) = \mathcal{R}(2, n) \sqcup \mathcal{M}'(2, n),$$

gdzie przez $\mathcal{M}'(k, n)$ oznaczyliśmy zbiór wszystkich funkcji nierosnących ze zbioru $\langle \boldsymbol{k} \rangle$ do zbioru $\langle \boldsymbol{n} \rangle$. Czytelnik z łatwością wskaże bijekcję $\mathcal{R}'(k, n) \longleftrightarrow \mathcal{M}'(k, n)$. Stąd

$$n^2 = |\mathcal{F}(2, n)| = |\mathcal{R}(2, n)| + |\mathcal{R}'(2, n)| = \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2},$$



na mocy równości (4) i (5). "Kamyczkowy" dowód można zobaczyć na rysunku. Zachęcamy do dostatecznie wnikliwego wpatrywania się w ten rysunek.

6. Sumy o wyrazach dodatnich

Pokażemy teraz parę zadań z sumami zawierającymi współczynniki dwumienne.

ZADANIE 6 Uzasadnić, że

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}. \tag{18}$$

R o z w i ą z a n i e. Łatwo to udowodnić korzystając z tożsamości pochłaniania (13) i równości (1). Jeżeli jednak, patrz dowód tożsamości pochłaniania (13), uświadomimy sobie, że k-ty składnik sumy oznacza ilość k-osobowych zespołów z liderem, to całą sumę z lewej strony możemy zinterpretować jako ilość wszystkich możliwych zespołów z liderem wybranych z grupy n osób. Zinterpretowanie prawej strony równości (18) w ten sam sposób jest natychmiastowe. Tym razem, najpierw wybieramy (na n sposobów) lidera, a potem spośród pozostałych $(n-1)$ osób dobieramy resztę zespołu (na 2^{n-1} sposobów). ♦

Z A D A N I E 7 Udowodnić, że dla dowolnych liczb naturalnych n, m i k zachodzi tak zwana ***tożsamość Cauchy'ego***:

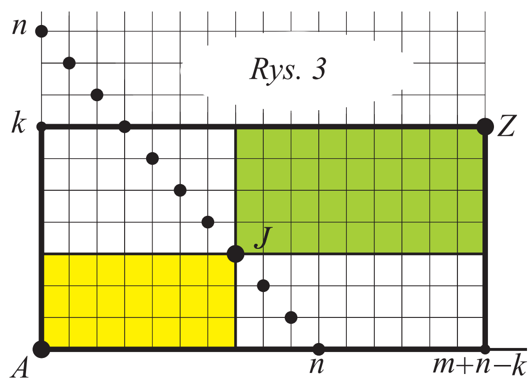
$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}=\binom{n+m}{k}. \tag{19}$$

R o z w i ą z a n i e. Pokażemy dwa sposoby rozumowania. Nie są one w jakiś zasadniczy sposób różne, drugi można też uznać za ilustrację geometryczną pierwszego.

S p o s ó b 1. Wyobraźmy sobie, że pewna grupa uczniów składa się n chłopców i m dziewcząt. Na ile sposobów możemy z tej grupy wybrać zespół liczący k osób? Z jednej strony, możemy to zrobić na $\binom{n+m}{k}$ sposobów. Z drugiej strony, każdy z zespołów jest jednego z następujących typów: w składzie zespołu nie ma chłopców, w składzie zespołu jest dokładnie 1 chłopiec, jest dokładnie 2 chłopców itd., w składzie zespołu jest k chłopców. Ilość zespołów wszystkich typów jest równa

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\cdots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}=\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}.$$

S p o s ó b 2. Prawa strona równości (19) oznacza, patrz **T2.4**, ilość wszystkich najkrótszych dróg kratowych łączących punkt $A=(0,0)$ z punktem $Z=(m+n-k,k)$. Każda rozważana droga **musi** przejść przez jeden i tylko jeden punkt kratowy leżący na prostej o równaniu $x+y=n$. Składnik $\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$ sumy z lewej strony równości (19) oznacza ilość tych z rozważanych dróg, które przechodzą przez punkt $J=(n-j,j)$. Czynnik $\binom{n}{j}$ oznacza ilość dróg między A a J, a czynnik $\binom{m}{k-j}$, ilość dróg między J a Z. Jasne, że w ten sposób nasze zadanie zostało rozwiązane. ♦



Z A D A N I E 8 Udowodnić następujące ***twierdzenie o haku***: *Dla dowolnych liczb naturalnych $k\le n$ zachodzi równość*

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}. \tag{20}$$

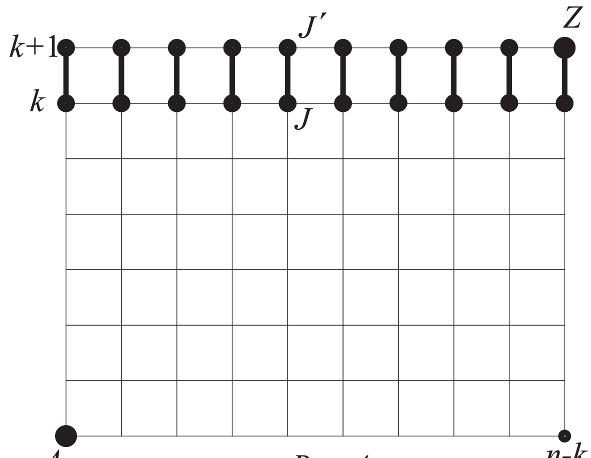
Przykładowy ”hak” w trójkącie Pascala pokazujemy poniżej:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad \boxed{1} \\
1 \quad 3 \quad \boxed{3} \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad \boxed{6} \quad 4 \quad \mathbf{1} \\
1 \quad 5 \quad \boxed{10} \quad \mathbf{10} \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad \boxed{\mathbf{15}} \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad \mathbf{7} \quad \boxed{21} \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
\mathbf{1} \quad 8 \quad 28 \quad \boxed{56} \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}
$$

Rozwiązanie. Dowód przez indukcję jest prostym wykorzystaniem tożsamości Pascala (12). Nie będziemy się nim zajmować. Wskażemy za to trzy ciekawsze rozumowania.

Sposób 1. (Pierwsze rozumowanie kombinatoryczne) Prawa strona naszej tożsamości oznacza ilość wszystkich $(k+1)$-elementowych podzbiorów zbioru $(n+1)$-elementowego. Wybierając $(k+1)$-elementowe podzbiory zbioru $\langle \boldsymbol{n+1} \rangle$ możemy najpierw wybierać element **największy** (”dowódcę”), a następnie k-elementowy podzbiór (”drużynę”). Jasne, że w ten sposób dostaniemy lewą stronę tożsamości.

Sposób 2. (Drugie rozumowanie kombinatoryczne) Pokażemy teraz **interpretację geometryczną**: Zbiór wszystkich EN-dróg kratowych łączących punkt $A = (0, 0)$ z punktem $Z = (n-k, k+1)$ rozkłada się na sumę (rozłączną) zbiorów $\mathcal{A}_j$, $j = 0, 1, \dots, n-k$, gdzie $\mathcal{A}_j$ oznacza zbiór tych spośród rozważanych dróg, które ”przechodzą” przez odcinek $\overline{JJ'}$ o końcach (j, k), $(j, k+1)$, i następnie (nie mając już innego wyboru) prowadzą cały czas na wschód aż do punktu Z. Wiemy doskonale, że $|\mathcal{A}_j| = \binom{k+j}{k}$. Patrz rysunek! To kończy rozumowanie.



Rys. 4

Sposób 3. (Trzecie rozumowanie kombinatoryczne) Innej interpretacji równości (20) dostarcza twierdzenie **2.5**. Z udowodnionej tam równości (7) wnioskujemy, że

$$\binom{n}{k} = |\mathcal{T}(k+1,\, n-k)|. \tag{21}$$

Wobec tego ”hakowa” równość (20) ma postać:

$$|\mathcal{T}(k+1,\, 0)| + |\mathcal{T}(k+1,\, 1)| + \dots + |\mathcal{T}(k+1,\, n-k)| = |\mathcal{T}(k+2,\, n-k)|,$$

a ta równość jest łatwa do udowodnienia: zbiór $\mathcal{T}(k+2,\, n-k)$ wszystkich rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} + x_{k+2} = n - k$$

może być rozbity na rozłączne podzbiory

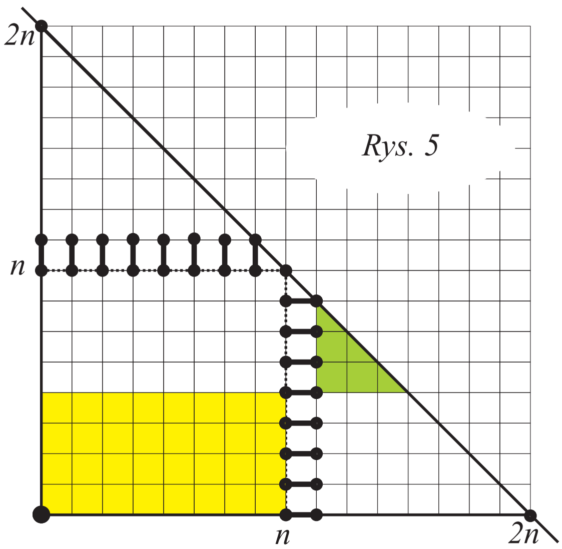
$$\mathcal{A}_i = \{(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k+1},\, x_{k+2}) :\, x_{k+2} = i\},$$

gdzie $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-k$. Jasne, że $|\mathcal{A}_i| = |\mathcal{T}(k+1,\, n-k-i)|$. ⧫

Ciekawe zadanie znaleźć można w **[3]**, zadanie 7.2. Porównaj też **[4]**, strona 247. Zadanie to w pozostawia W. Guzicki w [5] do samodzielnego rozwiązania czytelnikowi.

Z A D A N I E 9 Udowodnić tożsamość

$$2^n\binom{n}{0} + 2^{n-1}\binom{n+1}{1} + 2^{n-2}\binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{2n}{n} = 2^{2n} \qquad (22)$$



Rys. 5

Rozwiązanie. Wiemy, że 2^{2n} oznacza ilość wszystkich EN-dróg łączących węzeł początkowy $(0,\, 0)$ z którymś z węzłów leżących na prostej o równaniu $x + y = 2n$. Ogół tych wszystkich dróg rozbijemy na rozłączne zbiory

$$\mathcal{A}_0,\, \mathcal{A}_1,\, \ldots,\, \mathcal{A}_{n-1},\, \mathcal{C},\, \mathcal{B}_0,\, \mathcal{B}_1,\, \ldots,\, \mathcal{B}_{n-1},$$

gdzie $\mathcal{A}_j$ składa się ze wszystkich dróg, których **częścią** jest odcinek o końcach $(n,\, j)$, $(n+1,\, j)$, zbiór $\mathcal{C}$ składa się ze wszystkich dróg o **końcach** $(0,\, 0)$ i $(n,\, n)$, a zbiór $\mathcal{B}_j$ składa się ze wszystkich dróg, których **częścią** jest odcinek o końcach $(j,\, n)$, $(j,\, n+1)$. Zobacz rysunek obok. Z twierdzenia **T2.4** i wniosku z niego wiemy, że $|\mathcal{C}| = \binom{2n}{n}$, oraz

$$|\mathcal{A}_j| = |\mathcal{B}_j| = \binom{n+j}{j} \cdot 2^{n-j-1}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} 2^{2n} &= 2|\mathcal{A}_0| + 2|\mathcal{A}_1| + \ldots + 2|\mathcal{A}_{n-1}| + |\mathcal{C}| = \\ &= 2^n\binom{n}{0} + 2^{n-1}\binom{n+1}{1} + \ldots + 2\binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

To kończy rozwiązanie. ⧫

7. Sumy naprzemienne

A jeżeli odróżniamy parzyste od nieparzystego, to co?

Z A D A N I E 10 Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ \ldots\ + (-1)^n\binom{n}{n} = 0. \tag{23}$$

R o z w i ą z a n i e. S p o s ó b 1. Równość tę otrzymujemy natychmiast, podstawiając $\alpha = 1,\ \beta = -1$ w tożsamości (2). Spróbujmy jednak przydać jej znaczenie kombinatoryczne. Zauważmy w tym celu, że można ją zapisać w postaci:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots\,, \tag{24}$$

co oznacza, że rodzina $\mathcal{P}_{ev}(\langle \boldsymbol{n} \rangle)$ podzbiorów zbioru $\langle \boldsymbol{n} \rangle$ mających **parzystą** ilość elementów jest **równoliczna** z rodziną $\mathcal{P}_{odd}(\langle \boldsymbol{n} \rangle)$ podzbiorów zbioru $\langle \boldsymbol{n} \rangle$ mających **nieparzystą** ilość elementów. Aby udowodnić, że to jest prawda, rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}_{ev}(\langle \boldsymbol{n} \rangle) \longrightarrow \mathcal{P}_{odd}(\langle \boldsymbol{n} \rangle)$ daną przez:

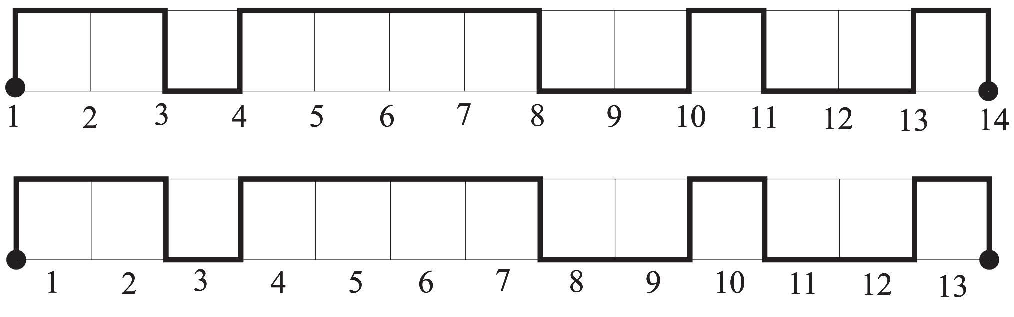
$$f(A) = \begin{cases} A \setminus \{1\}, & \text{gdy } 1 \in A, \\ A \cup \{1\}, & \text{gdy } 1 \notin A. \end{cases}$$

Chwila zastanowienia wystarcza dla sprawdzenia, że funkcja f przeprowadza bijektywnie rodzinę $\mathcal{P}_{ev}(\langle \boldsymbol{n} \rangle)$ na rodzinę $\mathcal{P}_{odd}(\langle \boldsymbol{n} \rangle)$.

U w a g a. Prostszą bijekcję $\mathcal{P}_{ev}(\langle \boldsymbol{n} \rangle) \longrightarrow \mathcal{P}_{odd}(\langle \boldsymbol{n} \rangle)$ można wskazać w przypadku, gdy n jest liczbą nieparzystą. Mianowicie, w takim przypadku: **dopełnienie** zbioru $A \subseteq \langle \boldsymbol{n} \rangle$ mającego parzystą ilość elementów ma nieparzystą ilość elementów i odwrotnie. Wobec tego $A \longmapsto A^c$ jest żądaną bijekcją.

S p o s ó b 2. (Patrz [8]) Policzymy na dwa sposoby ile jest NES-dróg prowadzących od punktu 1 do punktu $n,$ w takiej "kratce" jak na rysunku.

Rys. 6



Pierwszy sposób (*"liczenie pionowe"*) polega na patrzeniu na "szczebelki" pionowe. Ponieważ "wejście" drogi na poziom wyższy jest "kasowane" przez ponowne "zejście" na dół, więc widzimy, że każda NES-droga wyznaczona jest jednoznacznie przez parzystoelementowy podzbiór n-elementowego zbioru szczebelków. Zatem, łącznie dróg takich jest

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$$

Drugi sposób (*”liczenie poziome”*) polega na patrzeniu na odcinki poziome dróg na poziomie dolnym. Zauważamy, że każdą NES-drogę jednoznacznie wyznacza dowolnie wybrany podzbiór (również pusty!) $(n-1)$-elementowego zbioru jednostkowych odcinków poziomych z poziomu dolnego. Badanych dróg jest więc tyle samo co podzbiorów zbioru $(n-1)$-elementowego. Stąd równość

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}. \tag{25}$$

Porównując to z równością (1), dostajemy równość (24). ⧫

Sumę (23) można domnażać przez mianowniki występujących tam symboli Newtona:

Z A D A N I E 11 Udowodnić, wskazując odpowiednią interpretację kombinatoryczną:

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \dots + (-1)^{n-1} n \binom{n}{n} = 0 \quad \text{dla } n > 1. \tag{26}$$

R o z w i ą z a n i e. Pamiętamy, że $k\binom{n}{k}$ wyraża ilość k-elementowych zespołów z liderem, wybranych spośród danych n osób. Równość (26) może więc być zapisana następująco: $|\mathcal{P}| = |\mathcal{N}|$, gdzie

$$\mathcal{P} = \{(Z,\, l) :\ Z \subseteq \langle \boldsymbol{n} \rangle,\, l \in Z,\, |Z| \equiv 0 \pmod 2\},$$
$$\mathcal{N} = \{(Z,\, l) :\ Z \subseteq \langle \boldsymbol{n} \rangle,\, l \in Z,\, |Z| \equiv 1 \pmod 2\}.$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy wskazać bijekcję między zbiorami $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$. Oto ona:

$$f((Z,\, l)) = \begin{cases} (Z \setminus \{1\},\, l), & \text{gdy } 1 \in Z \text{ i } l \neq 1, \\ (Z \cup \{1\},\, l), & \text{gdy } 1 \notin Z, \\ (Z \setminus \{2\},\, 1), & \text{gdy } l = 1 \text{ i } 2 \in Z, \\ (Z \cup \{2\},\, 1), & \text{gdy } l = 1 \text{ i } 2 \notin Z. \end{cases}$$

Sprawdzenie, że w ten sposób rzeczywiście zdefiniowaliśmy bijekcję $f : \mathcal{P} \longleftrightarrow \mathcal{N}$ pozostawiamy Czytelnikowi. ⧫

Oto nasze ostatnie zadanie z sumami naprzemiennymi:

Z A D A N I E 12 Niech $c,\, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $0 \leq c < d$. Udowodnić, że

$$\sum_{k=0}^{c+1} (-1)^k \binom{d}{k} \binom{d+c-k}{c+1-k} = 0. \tag{27}$$

Rozwiązanie. Niech danych będzie d dziewcząt i c chłopców. Tworzymy spośród nich zespoły $(c+1)$-osobowe z wyróżnioną grupą "liderów", być może pustą, ale składającą się wyłącznie z dziewcząt. Zespołów mających k liderów, $k \le c+1$, jest, oczywiście,

$$\binom{d}{k} \cdot \binom{d+c-k}{c+1-k}.$$

Wobec tego równość (27) oznacza, że ilość zespołów z "parzystą" grupą liderów równa jest ilości zespołów z "nieparzystą" grupą liderów. Aby się przekonać, że to jest prawda, oznaczmy przez Z_n ilość zespołów ($(c+1)$-osobowych), w których jest n dziewcząt. W każdym z takich Z_n zespołów możemy na $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$ sposobów wybrać parzystą grupę dowódców i na $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$ sposobów nieparzystą grupę liderów, zobacz (24) i (25). Ostatecznie, widzimy, że "parzystoliderowych" zespołów jest

$$\sum_{n=1}^{c+1} 2^{n-1} Z_n$$

i tyleż jest zespołów "nieparzystoliderowych". ♦

8. Jedna nierówność

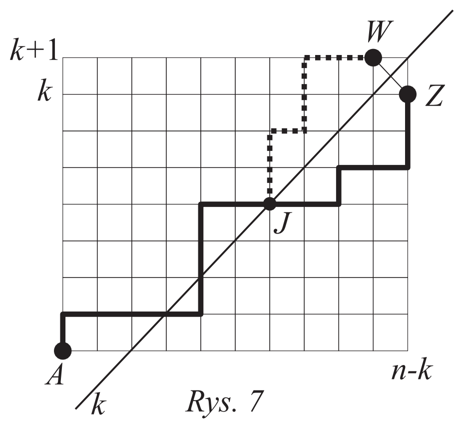
Jeżeli istnieje **funkcja różnowartościowa** (***injekcja***)

$$f : X \longrightarrow Y$$

ze zbioru skończonego X do zbioru skończonego Y, to $|X| \le |Y|$. To oczywiste spostrzeżenie może służyć do kombinatorycznego uzasadniania nierówności.

ZADANIE 13 Udowodnić, że dla każdego $n \ge 2$ ciąg $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{s-1}, \binom{n}{s}$, gdzie $s = \lfloor n/2 \rfloor$ jest ciągiem ściśle rosnącym.

Rozwiązanie. Wykorzystujący (9) lub (10) dowód "rachunkowy" jest natychmiastowy. Warto się jednak zapoznać z dowodem za pomocą EN-dróg, ponieważ wykorzystuje on ***zasadę odbicia***, która przydaje się i w innych sytuacjach.



Rys. 7

Załóżmy, że $0 \le k < \lfloor n/2 \rfloor$. Mamy uzasadnić, że

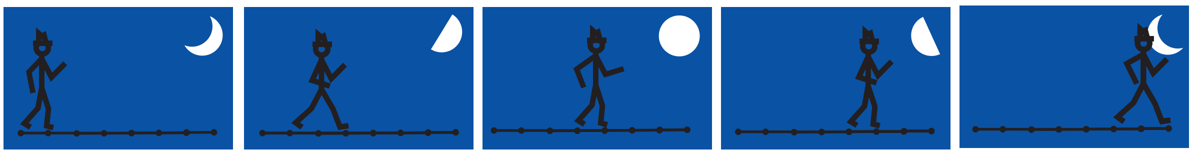
$$\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}.$$

Skonstruujemy **injekcję**

$$f : \mathcal{D}(A, Z) \longrightarrow \mathcal{D}(A, W)$$

zbioru $\mathcal{D}(A, Z)$ EN-dróg łączących punkt A z punktem Z w zbiór $\mathcal{D}(A, W)$ EN-dróg łączących punkt A z punktem W. Istnienie takiej injekcji, na mocy uczynionej wyżej uwagi, wystarczy , bo $|\mathcal{D}(A, Z)| = \binom{n}{k}$ oraz $|\mathcal{D}(A, W)| = \binom{n}{k+1}$. Aby określić tę injekcję rozważmy symetralną p odcinka $\overline{WZ}$. Założenie $k < \lfloor n/2 \rfloor$ implikuje, że punkty A i Z leżą po różnych stronach tej symetralnej. Wobec tego, każda droga łącząca punkty A i Z "przebija" prostą p. Dla danej EN-drogi $d \in \mathcal{D}(A, Z)$ oznaczmy przez J ostatni jej punkt wspólny z prostą p. Niech d_{AJ} będzie fragmentem drogi d między punktami A i J, d_{JZ} będzie fragmentem drogi d między punktami J i Z. Niech d' będzie odbiciem d_{JZ} w prostej p. Kładziemy $f(d) = d_{AJ} \cup d'$. Sprawdzenie, że tak określona funkcja f jest funkcją różnowartościową, jest natychmiastowe. ⧫

9. Związek z ciągiem Fibonacci'ego



Rys. 8

Przypomnijmy, że (klasyczny) ***ciąg Fibonacci'ego*** (f_n) zadany jest przez ***warunki początkowe*** $f_1 = 1,\ f_2 = 1$ i ***równanie rekurencyjne***:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \tag{28}$$

dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$.

TWIERDZENIE 4 Liczba $f_n,\ n \geq 1$ oznacza, na ile sposobów piechur startujący z punktu 1 osi liczbowej może dotrzeć do punktu n tej osi, jeżeli potrafi stawiać kroki długości 1 i/lub 2 (do przodu).

Dowód. Oznaczmy ilość tych sposobów przez p_n. Jasne jest, że $p_1 = 1$ (bo piechur po prostu nic nie robi, a "nicnierobić" można na jeden tylko sposób). Podobnie jest jasne, że $p_2 = 1$ (piechur wykonuje jeden krok długości 1). Natomiast do punktu 3 może dojść na dwa sposoby: albo robiąc jeden krok długości 2, albo robiąc dwa kroki długości 1. Zatem $p_3 = 2$. Rozważmy teraz dowolną liczbę $n \geq 3$. Istnieją dwa różne typy marszrut piechura od punktu 1 do punktu n: do pierwszego typu należą te marszruty, w czasie których nadepnął on na liczbę $n-1$, a do drugiego pozostałe. Pierwszych marszrut jest tyle na ile sposobów mógł on dotrzeć do punktu $n-1$ (potem robi on już tylko oczywisty i jednoznaczny krok długości 1 i kończy drogę w punkcie n), czyli p_{n-1}. W czasie wykonywania marszrut drugiego typu piechur musi nadepnąć na liczbę $n-2$ a następnie wykonać krok długości 2. Ostatecznie dostajemy

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}.$$

Wobec tego, ponieważ ciągi (p_n) i (f_n) spełniają te same warunki początkowe i to samo równanie rekurencyjne, pokrywają się *in extenso*. ▶

Opisaną przez to twierdzenie interpretację wyrazów ciągu Fibonacci'ego nazywamy ***interpretacją piechura***, zobacz rysunek 8.

Dzięki tej interpretacji z łatwością rozwiążemy ostatnie zadanie:

ZADANIE 14 Udowodnić tożsamość

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots = f_{n+1}, \tag{29}$$

gdzie f_{n+1} oznacza $(n+1)k$-szy wyraz ciągu Fibonacci'ego.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $\mathcal{M}_k$ zbiór tych marszrut od punktu 1 do punktu $n+1$, w czasie których piechur wykonuje dokładnie k **kroków długich** (kroków długości 2). Wtedy, zbiór wszystkich możliwych marszrut rozkłada się na sumę podzbiorów rozłącznych

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \sqcup \mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2 \sqcup \ldots . \tag{30}$$

Sekunda zastanowienia wystarcza do następującej konkluzji:

$$|\mathcal{M}_k| = \binom{n-k}{k}.$$

Ta równość, twierdzenie **T4** i równość (30) pozwalają zakończyć rozwiązanie. ⧫

10. Zadania do samodzielnego rozwiązania

ZADANIE 15 Udowodnić, przydając interpretację kombinatoryczną:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\cdot 2^{n-2}.$$

ZADANIE 16 Nie korzystając z (15), wyznaczyć wartość sumy $\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k}$. Wymyślić odpowiednią interpretację kombinatoryczną.

ZADANIE 17 Udowodnić, przydając interpretację kombinatoryczną:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k = 3^n.$$

Wskazówka. Iloczyn $\binom{n}{k} \cdot 2^k$ oznacza ilość wszystkich takich par (A, B), że $A \subseteq B \subseteq \langle \boldsymbol{n} \rangle$ i $|B| = k$. A co może oznaczać 3^n?

Z A D A N I E 18 Uzasadnić, przydając interpretację kombinatoryczną:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Z A D A N I E 19 Udowodnić, że

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = \binom{n}{k} \cdot 2^k.$$

Z A D A N I E 20 Udowodnić, że

$$1^2\binom{n}{1}^2 + 2^2\binom{n}{2}^2 + 3^2\binom{n}{3}^2 + \ldots + n^2\binom{n}{n}^2 = n^2\binom{2n-2}{n-1}.$$

Z A D A N I E 21 Udowodnić, że zachodzą równości:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{m} 2^k\binom{n}{k}\binom{m}{k} \quad \text{dla } m,\, n \geq 0.$$

Z A D A N I E 22 Udowodnić, że

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{n-1}{k}.$$

Literatura

[1] B. Bogdańska, A. Neugebauer – ***Matematyka Olimpijska. Kombinatoryka*** – volumina.pl Szczecin 2010.

[2] V. Bryant – ***Aspekty kombinatoryki*** – Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.

[3] M. Bryński – ***Zadania z olimpiad matematycznych, tom 7*** – Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1995.

[4] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik – ***Matematyka konkretna*** – PWN, Warszawa 2006.

[5] W. Guzicki – ***Kącik olimpijski*** – ”Delta” 1995

[6] A. Neugebauer – ***Matematyka Olimpijska. Algebra i Teoria Liczb*** – volumina.pl Szczecin 2010.

[7] N. J. Wilenkin - ***Kombinatoryka*** - Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1972.

[8] M. Zakrzewski – ***Kombinatoryka a liczby zespolone*** – ”Matematyka” LXII, 6 (2009).

[9] M. Zakrzewski, T. Żak – ***Kombinatoryka – prawdopodobieństwo i zdrowy rozsądek*** – *Quadrivium*, Wrocław 1998.