

Wybrane problemy algorytmiki

Robert Kłopotek

18.03.2013

1 Ciągi de Bruijna

- Alfabet binarny $\Sigma = \{0, 1\}$, Σ^n - zbiór wszystkich słów n literowych
- Jakie jest najkrótsze słowo zawierające Σ^n ? długość $\geq 2^n + n - 1$
- Najkrótsze słowo cykliczne zawierające Σ^n ? długość $\geq 2^n$

Przykład: $n=3$ - 0001011|00 - dopisywanie symboli na końcu, uliniowanie cyklu

Ciąg, który realizuje tę własność nazywamy cyklicznym ciągiem de Bruijna rzędu n (skrót dBn), po uliniowaniu nazywamy ciągiem de Bruijna.

2 Twierdzenie

Istnieje ciąg de Bruijna rzędu n , dla $n \geq 1$ (nawet wykładniczo wiele).

Wszystkich ciągów dBn jest $N = 2^n$. Ciągów binarnych jest 2^N , Wszystkich ciągów jest $\sqrt{2^N}$.

3 Algorytm zachłanny generacji dBn

3.1 Prefer zero

Jeśli możemy to dodajemy na końcu 0. Startujemy z ciągu samych jedynek. Ciągi n bitowe, liczby binarne $\leq 2^n - 1$

- $x \rightarrow 2x \bmod 2^n$ dopisując 0
- $x \rightarrow 2x + 1 \bmod 2^n$ dopisując 1

Potrzebujemy pamięci wykładniczej.

Przykład dla $n=4$	1	1	1	1															
		1	1	1	0														
			1	1	0	0													
			1	1	0	0	0												
				1	0	0	0	0											
					0	0	0	0	1										
						0	0	0	1	0									
							0	0	1	0	0								
								0	1	0	0	1							
									0	1	0	1	1						
										0	0	1	1	0					
											0	1	1	0	1				
												1	1	0	1	0			
													1	0	1	0	1		
														0	1	0	1	1	
															1	0	1	1	1
																1	1	1	1

Otrzymujemy ciąg: 0000100110101111

3.2 Prefer opposite

Startujemy z ciągu samych zer. Jeśli możemy to dodajemy na końcu bit przeciwny. Po generacji na końcu ustawimy 1 aby uzyskać 1^n .

	0	0	0	0															
		0	0	0	1														
			0	0	1	0													
				0	1	0	1												
				0	1	0	1	0											
					1	0	1	0	0										
Przykład dla n=4							1	0	0	1									
							1	0	0	1	1								
								0	0	1	1	1							
								0	0	1	1	1	0						
													0	1					
													0	1	1				
													0	1	1	1			

Otrzymujemy ciąg: 000010100110111|1

4 Grafy de Bruijna rzędu n (ozn. G_n)

Graf G_n ma Σ^{n-1} wierzchołków (patrz rysunek). Ciąg de Bruijna odpowiada cyklowi Eulera w grafie G_n . Krawędzie odpowiadają słowom długości n . Po wyrzuceniu krawędzi przejścia "0" dostajemy skierowane drzewo rozpinające do wierzchołka 1^{n-1} .

5 Algorytm generacji cyklu w grafie de Bruijna

Graf de Bruijna G_n jest silnie spójny, stopień wychodzący i wchodzący jest równy.

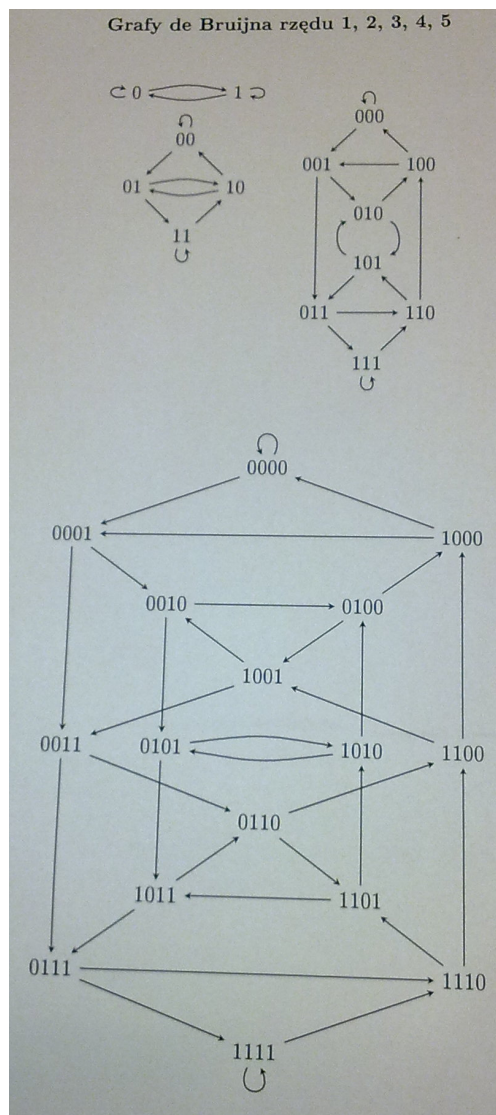
1. Wybieramy dowolny wierzchołek
2. Generujemy drzewo rozpinające do tego wierzchołka np. DFS lub BFS
3. Mamy priorytety krawędzi.
4. Idziemy najpierw krawędziami nie będącymi w drzewie rozpinającym.

Dowód poprawności (idea) - przez zaprzeczenie: Załóżmy, że nie odwiedziliśmy wszystkich krawędzi. Dla każdego wierzchołka stopień wychodzący i wchodzący jest równy. Jeśli doszliśmy do końca (korzenia drzewa rozpinającego) to algorytm zużył krawędzie którymi wszedł. Podobnie ich sąsiedzi zużyli krawędzie wychodzące czyli również musieli zużyć wszystkie wchodzące i tak dalej dla każdego wierzchołka. Stąd algorytm przeszedł raz po każdej krawędzi.

6 Ćwiczenia

Graf G_{n+1} jest grafem krawędziowym grafu G_n . Cykl Hamiltona w grafie G_{n+1} odpowiada cyklowi Eulera w grafie G_n .

Grafy de Bruijna rzędu 1, 2, 3, 4, 5



Генерация αB_m .

Алгоритм работы, реализованный на листе с 16 ячейками.

$$m = 4,$$

1 1 1 1

параметры инициализации

сигнал n-элементов

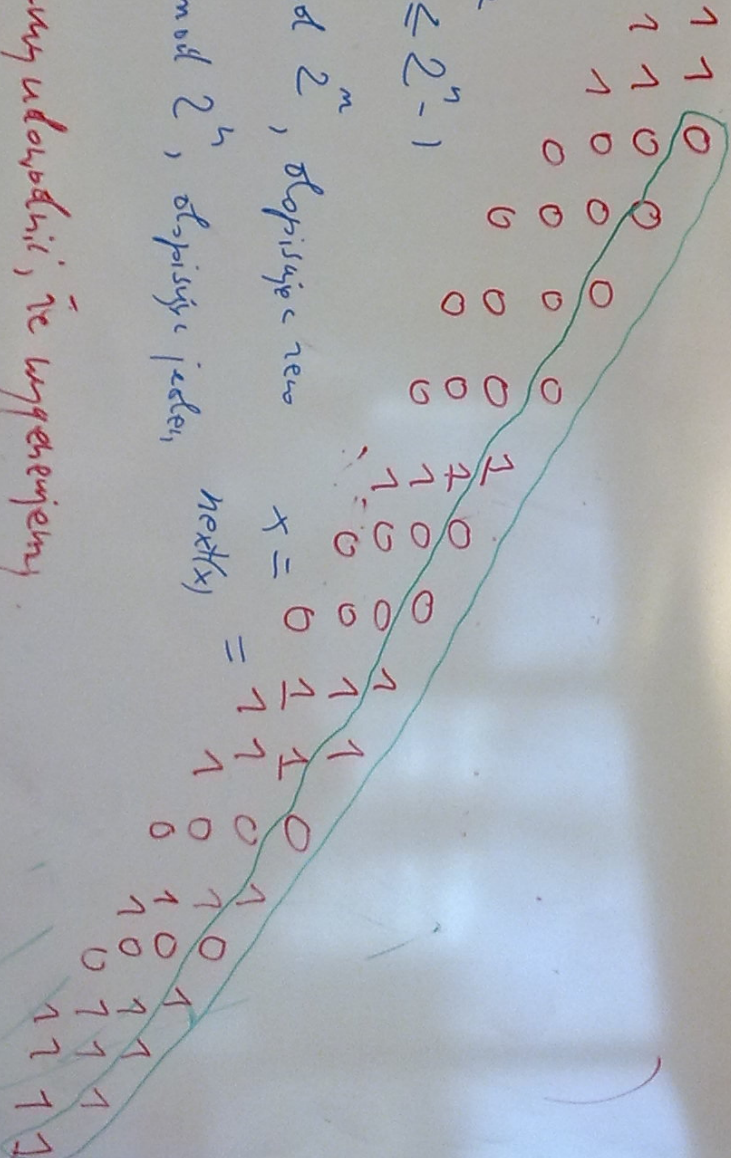
линейный бинарный $\leq 2^n - 1$

next

$$x \rightarrow 2x \bmod 2^m, \text{ дописываем нули}$$

$$x \xrightarrow{\text{next}} 2x+1 \bmod 2^m, \text{ дописываем единицу}$$

Результат: Массив из 16 элементов, 16 выводов 2^m цифр.



Alportin Prefer-opposite

Ergebnis

priority ma depisane

phe iwnepo bitu

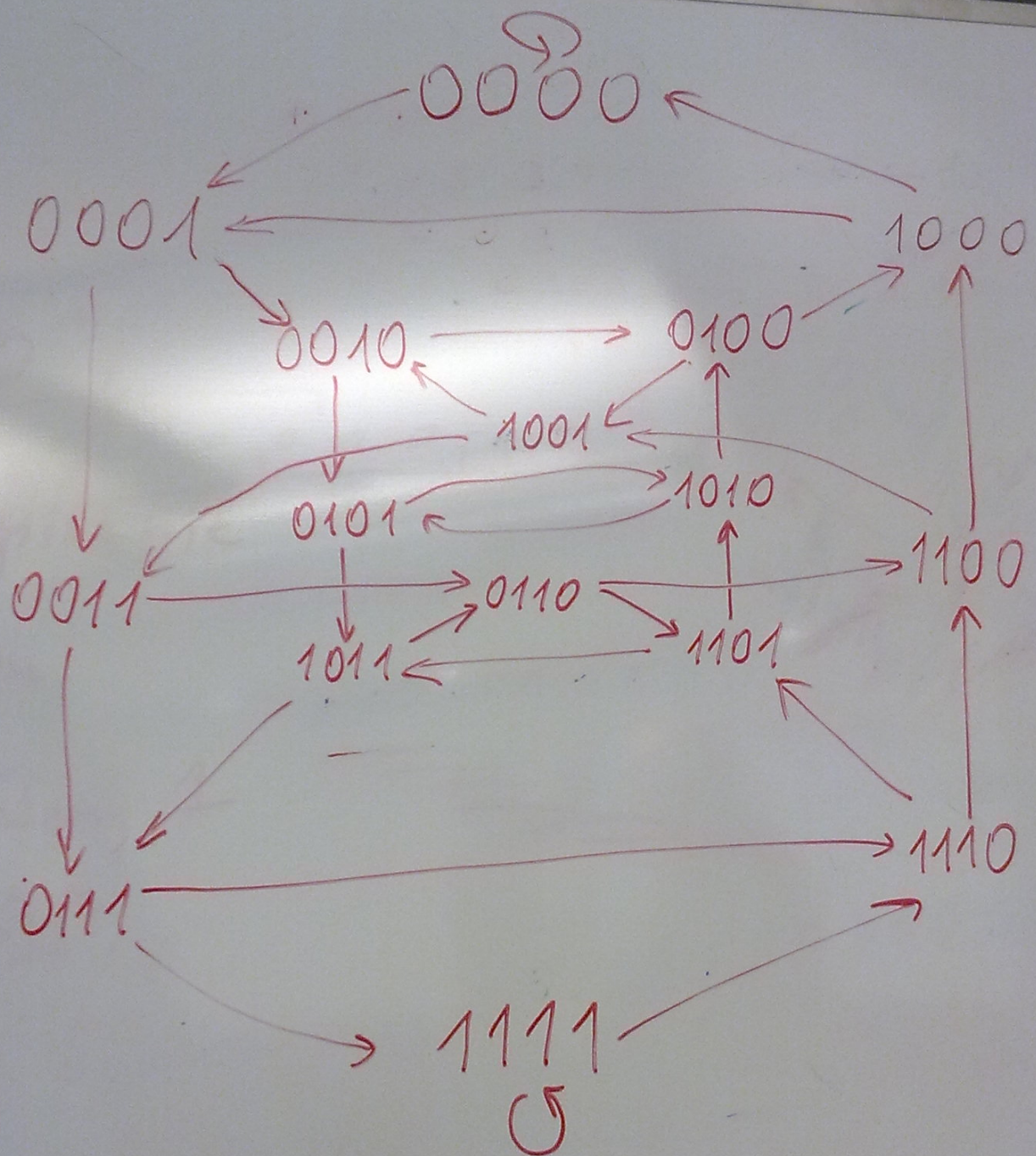
na hoicu wstawmy 1
ieby wysbac' 1^m

ieby wysłać 1^m.

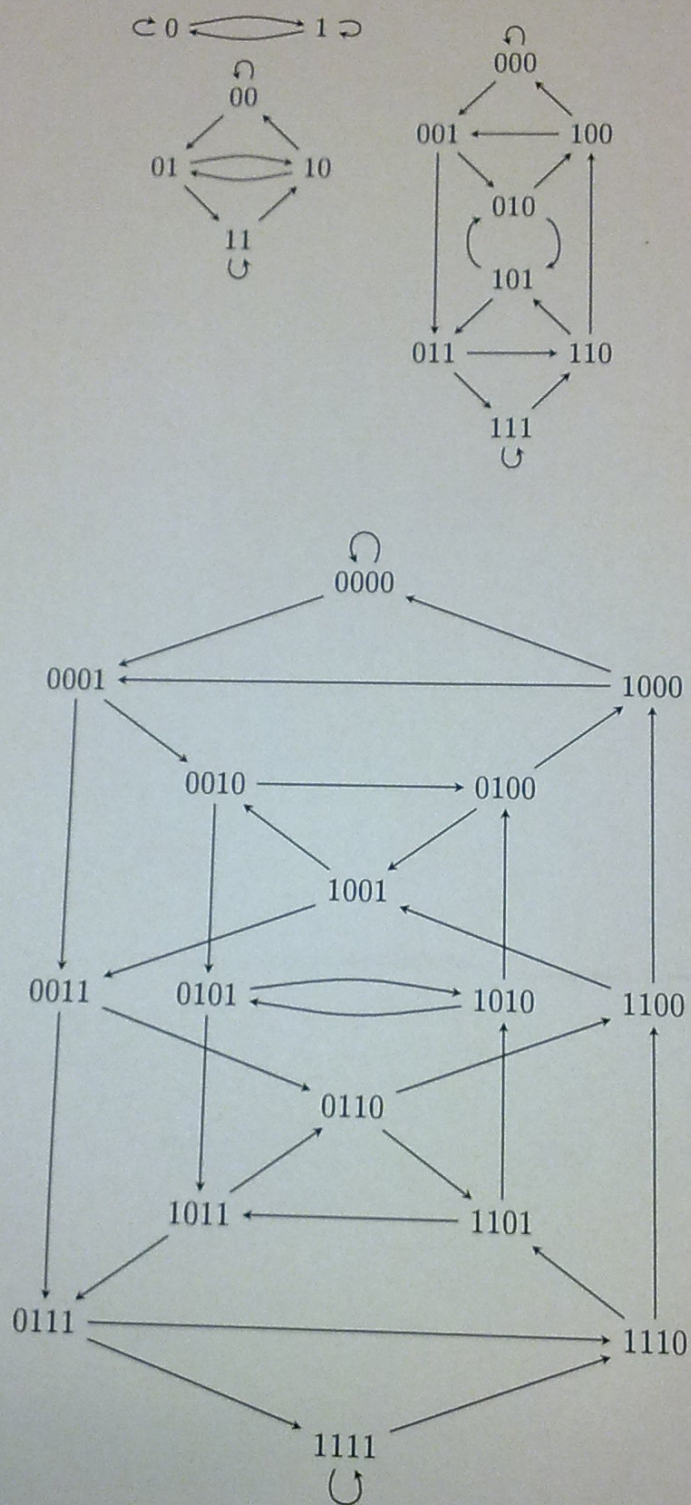
[illegible]

600010001115

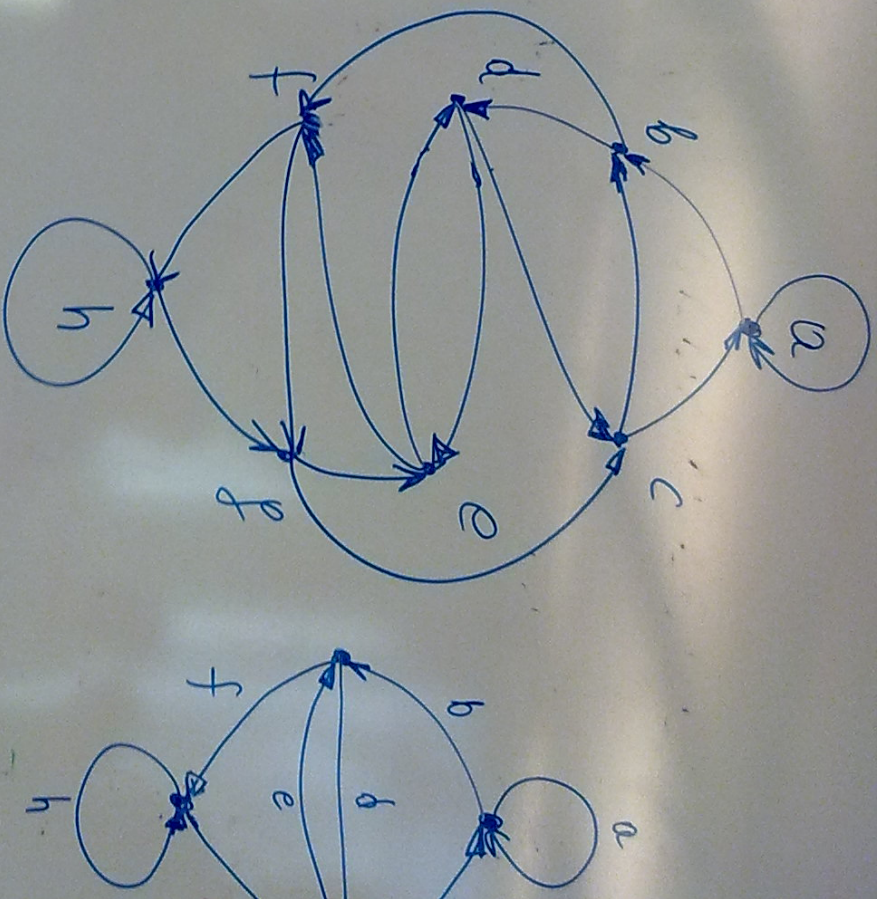
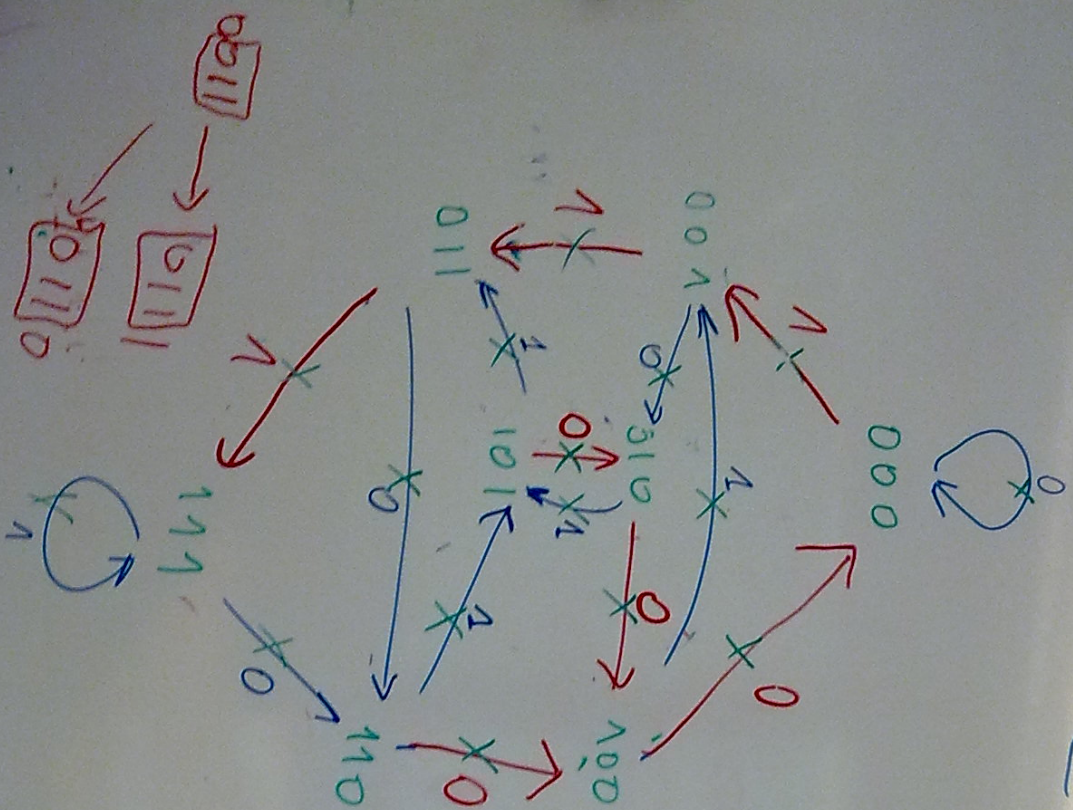
↑ go ulinienia
dokładamy jedną jedynkę



Grafy de Bruijna rzędu 1, 2, 3, 4, 5



auf die Bräijns malle n
 $n = 4$, wieviele $NT = \sum_{i=1}^{n-1}$



$a = 0000$
 $b = 001$
 $c = 100$
 $d = 010$

$e = 101$
 $f = 011$
 $g = 110$
 $h = 111$

