

Wykład 1

Wybrane problemy algorytmiki

mgr Agnieszka Zbrzezny

IPI PAN

- 1 “Jewels of stringology” World Scientific, 2002, W. Rytter, M.Crochemorer
- 2 “Text algorithms Oxford University Press 1994”, W. Rytter, M. Crochemore

Słowa Fibonacciego są słowami nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$ zdefiniowanymi rekurencyjnie jako:

$$Fib_n = \begin{cases} Fib_0 & = a \\ Fib_1 & = ab \\ Fib_{n+2} & = Fib_{n+1} Fib_n \end{cases}$$

Słowa Fibbonacciego

Początkowe słowa Fibbonacciego:

$$Fib_0 = a$$

$$Fib_1 = ab$$

$$Fib_2 = aba$$

$$Fib_3 = abaab$$

$$Fib_4 = abaababa$$

$$Fib_5 = abaababaabaab$$

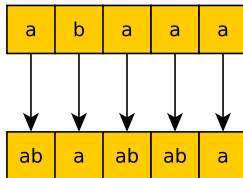
$$Fib_6 = abaababaabaababaababa$$

$$Fib_7 = abaababaabaababaababaabaababaabaab$$

Jeśli $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$ jest morfizmem takim, że $h(a)$ zaczyna się od litery a , to $h^\infty(a)$ jest nieskończonym słowem, którego prefiksami są wszystkie słowa postaci $h^n(a)$. Piszemy wtedy również $h^\infty(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} h^n(a)$.

Słowa Fibbonacciego

$h : a \rightarrow ab, b \rightarrow a:$



Własności słów Fibbonacciego:

Po obcięciu dwóch ostatnich liter każde skończone słowo Fibbonacciego jest palindromem (jest symetryczne).

abaababaabaababaababaabaababaaba	ab
----------------------------------	----

Własności słów Fibonacciego:

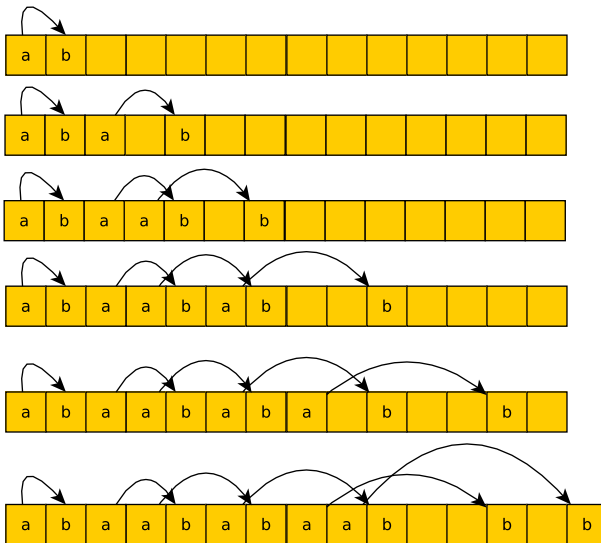
Dwa kolejne skończone słowa Fibonacciego są przemienne
 $Fib_n Fib_{n-1} = Fib_{n-1} Fib_n$ z dokładnością do zamiany dwóch ostatnich liter.

abaababaabaab	babaababaabaababaaba	ba
abaababaabaababaababa	abaababaabaab	ab

Algorytm generowania słów Fibonacciego:

Algorytm ten polega na wstawieniu w pierwsze wolne miejsce a , po czym wstawieniu b w odległości 1 dla pierwszego a , 2 dla drugiego a , ..., n dla n -tego a .

Algorytm generowania słów Fibonacciego:



Nim jest to stara chińska gra (nazywana tam Jianshizi, czyli 'gra w zabieranie kamieni') dla dwóch osób z użyciem 15 do 60 pionków.

Zasady

Pionki dzieli się na kupki dowolnej, parami różnej wielkości. Kupek powinno być co najmniej trzy, i powinny zawierać co najmniej 4 pionki; w każdej kupce powinna być inna liczba pionków. Następnie gracze zabierają na zmianę dowolną, niezerową ilość pionów. W jednym ruchu wolno zbierać tylko z jednej kupki. W zależności od wersji, przegrywa lub wygrywa gracz, który zabiera ostatni pionek.

Odmiana gry Nim: Wythoff (wythoff):

Zasady

piony dzielimy na dwie różnoliczne kupki, bierzemy co najmniej 1 pion z 1 kupki; można brać pionów z obu kupek w jednym ruchu, ale bierzemy wówczas tę samą ilość pionów z jednej i drugiej kupki

Gra Wythoffa

poz a	poz b	Δ
1	2	1
3	5	2
4	7	3
6	10	4
8	13	5
9	15	6

$$x_1, x_2, x_1 \leq x_2,$$

Strategia przegrywająca: $(x_1, x_2) \iff \exists i(x_1 = a_i, x_2 = b_i)$

System liczbowy Fibbonacciego

System Fibbonacciego to binarny, pozycyjny system liczbowy, w którym poszczególnym pozycjom odpowiadają kolejne liczby Fibbonacciego. Pierwsza kolumna tabeli jest ciągiem Fibbonacciego.

System liczbowy Fibbonacciego

	1	2	3	5	8
0	0				
1	1				
2	0	1			
3	0	0	1		
4	1	0	1		
5	0	0	0	1	
6	1	0	0	1	
7	0	1	0	1	
8	0	0	0	0	1
9	1	0	0	0	1
10	0	1	0	0	1
11	0	0	1	0	1
12	1	0	1	0	1

Słowo Thue-Morse'a

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----

0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$2_{10} = 10_2$ liczba jedynek = 1, $1\%2 = 1$

$3_{10} = 11_2$ liczba jedynek = 2, $2\%2 = 0$

$4_{10} = 100_2$ liczba jedynek = 1, $1\%2 = 1$

...

$14_{10} = 1110_2$ liczba jedynek = 3, $3\%2 = 1$

$15_{10} = 1111_2$ liczba jedynek = 4, $4\%2 = 0$

Nieskończone słowo Thue-Morse'a

Nieskończone słowo Thue-Morse'a, które pojawiło się w pracy matematycznej około 100 lat temu i służyło do dowodu tego, że jest nieskończenie wiele tekstów nie zawierających powtórzeń.

$$\tau_{\text{inf}} = 01101001100101101001011 \dots$$

Skończone słowa Thue-Morse'a

Słowo Thue-Morse'amożemy też zdefiniować za pomocą morfizmu:

$$\tau : 0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 10$$

$$\tau_0 = 0$$

$$\tau_1 = 01$$

$$\tau_2 = 0110$$

$$\tau_3 = 01101001$$

$\tau_n = \tau_{n-1} \overline{\tau_{n-1}}$, gdzie $\overline{\tau}$ generuje słowo powstałe z negacji symboli słowa τ .

Założmy, że $a_1, a_2, a_3 \dots \otimes b_1, b_2, b_3 = a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \dots$

$$\tau = \lim \tau_n$$

$$\tau = \tau \otimes \overline{\tau}$$

Skończone słowa Thue-Morse'a

0

0	1
---	---

0	1	1	0
---	---	---	---

0	1	1	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Kwadrat magiczny

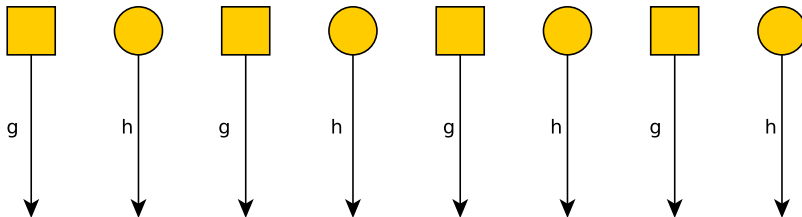
16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

$\overline{K} = 221121221221121122 \dots$ słowo Kolakoskiego, samogenerujące się słowo.

Słowo $\overline{K}$ spełnia równanie $r(\overline{K}) = \overline{K}$, gdzie $r(x)$ oznacza ciąg długości kolejnych bloków (maksymalnych spójnych fragmentów zawierających takie same litery), np. $r(1133322) = 232$.

Słowo Kolakoskiego

Dla morfizmu: $h : 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 11$ i $g : 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 22$:



Słowo Kolakoskiego

