

Zadania z rachunku prawdopodobieństwa I* - 1

1. Grupę n dzieci ustawiono w sposób losowy w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - a) Jacek i Agatka stoją koło siebie,
 - b) Jacek, Placek i Agatka stoją koło siebie.
2. Ze zbioru n elementowego losujemy ze zwracaniem r elementów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś element się powtórzył?
3. Siedmiu pasażerów przydzielono losowo do trzech wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
 - i) wszyscy trafili do jednego wagonu,
 - ii) w każdym wagonie znalazło się przynajmniej dwóch z tych pasażerów?
4. Z klasy liczącej 11 chłopców i 13 dziewczynek wylosowano czteroosobową delegację. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w skład delegacji wchodzi więcej chłopców niż dziewczynek.
5. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w brydża gracz N otrzymał
 - a) wszystkie karty różnej wartości;
 - b) dokładnie dwa piki;
 - c) co najmniej dwa piki;
 - d) dwa piki, 3 kiery, 4 kara, 4 trefle;
 - e) układ 4432;
 - f) układ 4441.
6. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grze w pokera talią 24 kartową gracz otrzyma z ręki
 - a) parę
 - b) dwie pary
 - c) straighta
 - d) trójkę
 - e) fulla
 - f) karete
 - g) kolor
 - h) pokera.
7. 10 jednakowych ciastek rozdzielono między czwórkę dzieci w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, iż
 - a) Jacek otrzymał dokładnie 1 ciastko
 - b) Jacek otrzymał co najmniej 1 ciastko
 - c) każde z dzieci otrzymało co najmniej 1 ciastko

8. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w lotto spośród 49 liczb wylosowana będzie szóstka nie zawierająca dwu kolejnych liczb.
9. a) Ile różnych słów (niekoniecznie sensownych) można utworzyć permutując litery słowa MATEMATYKA?
b) Jeśli wybierzemy losowo któreś z tych słów jakie jest prawdopodobieństwo tego, że litery T nie stoją obok siebie?
10. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi jest losowany jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.
11. W szafie znajduje się n par butów, na chybił trafił wybieramy z nich k butów przy czym $k \leq n$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - a) wśród wylosowanych butów jest co najmniej jedna para,
 - b) wśród wylosowanych butów jest dokładnie jedna para.
12. a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przy losowym umieszczeniu N listów w N zaadresowanych kopertach żaden list nie trafi do właściwego adresata?
b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dokładnie k listów trafi do właściwych adresatów?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 2

(zadania gwiazdkowe do oddania 6 marca)

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest zbiorem przeliczalnym i $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Udowodnij, że istnieją liczby $p_\omega \geq 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ takie, że $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$.
2. Rzucamy monetą dopóki nie wypadną dwa orły pod rząd. Znaleźć prawdopodobieństwo, że rzucimy dokładnie k razy.
3. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono w sposób losowy na płaszczyznę z zaznaczonymi liniami równoległymi. Odległość między sąsiednimi liniami wynosi $d > l$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie którąś z linii.
- 4* Wielokąt wypukły o średnicy mniejszej niż d rzucono na płaszczyznę poliniowaną jak w poprzednim zadaniu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wielokąt przetnie którąś z linii. Co się dzieje, gdy wielokąt nie jest wypukły?
5. Na kiju długości l wybrano na chybił trafił 2 punkty i w tych punktach przełamano kij. Oblicz prawdopodobieństwo, że z otrzymanych 3 kawałków można zbudować trójkąt.
- 6* Udowodnij, że każde σ -ciało albo ma 2^k elementów dla pewnego k naturalnego albo ma moc przynajmniej continuum.
- 7* Wykaż, że liczba σ -ciał podzbiorów zbioru $\{1, \dots, n\}$ jest równa $\frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}$.
8. Opisz wszystkie przestrzenie probabilistyczne z przeliczalnym zbiorem zdarzeń elementarnych Ω .
9. Udowodnij następujące tożsamości

$$(\limsup A_n)' = \liminf(A_n'), \quad (\liminf A_n)' = \limsup(A_n'),$$

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n, \quad \limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n,$$

$$\limsup A_n \cap \liminf B_n \subset \limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n,$$

$$\text{jeśli } A_n \nearrow A \text{ lub } A_n \searrow A, \text{ to } A = \limsup A_n = \liminf A_n.$$
10. Wykaż, że jeśli $A_n = (-\infty, x_n)$ oraz $x = \limsup x_n$ to $\limsup A_n = (-\infty, x)$ lub $(-\infty, x]$ oraz oba te przypadki mogą zajść.
- 11* Udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń probabilistycznych
 - a) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$
 - b*) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$ dla m nieparzystych
 - c*) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \geq \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$ dla m parzystych.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 3

(zadania gwiazdkowe do oddania 13 marca)

1. Udowodnij, że wzór $\rho(A, B) := \mathbb{P}(A \Delta B)$ zadaje pseudometrykę na $\mathcal{F}$ spełniającą warunek trójkąta.
- 2* Załóżmy, że koła rozłączne $B(x_i, r_i)$ są zawarte w pewnym prostokącie oraz pokrywają ten prostokąt z dokładnością do zbioru miary 0. Wykaż, że $\sum_i r_i = \infty$.
- 3* Udowodnij, że nie istnieje prawdopodobieństwo określone na wszystkich podzbiorach $\mathbb{Z}_+$ takie, że dla wszystkich k , $P(A_k) = 1/k$, gdzie A_k jest zbiorem liczb podzielnych przez k .
4. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy, jeśli wiadomo, że
 - a) mamy co najmniej jednego asa
 - b) mamy asa czarnego koloru
 - c) mamy asa pik
 - d) pierwszą wylosowaną kartą jest as
 - e) pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as
 - f) pierwszą wylosowaną kartą jest as pik.
5. Z odcinka $[0, 1]$ wylosowano na chybił trafił dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
 - a) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$;
 - b) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$, jeśli wiadomo, że mniejsza z liczb jest większa niż $1/4$;
 - c) większa z liczb jest mniejsza niż $1/2$, jeśli wiadomo, że któraś z liczb jest większa niż $1/4$.
6. (schemat urnowy Polya) Urna zawiera b kul białych i c kul czarnych. Wykonujemy kolejno następujące doświadczenie: losujemy z urny kulę, a następnie wkładamy ją z powrotem do urny, a wraz z nią dokładamy do urny a kul tego samego koloru. Udowodnij, że prawdopodobieństwo wylosowania w n -tym losowaniu kuli białej jest równe $\frac{b}{b+c}$.
7. Test na rzadką chorobę, którą dotkniętą jest jedna osoba na 5 tysięcy, daje fałszywą pozytywną odpowiedź u osoby zdrowej w 2% przypadków, a u osoby chorej zawsze daje pozytywny wynik. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba u której test przyniósł wynik pozytywny jest faktycznie chora?
8. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma n dzieci jest równe

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n & n = 1, 2, \dots \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} & n = 0 \end{cases}$$

Zakładając, że wszystkie 2^n rozkładów płci dzieci w rodzinie o n dzieciach jest równoprawdopodobne oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana rodzina ma

- a) co najmniej jedną córkę
- b) dokładnie jedną córkę?
- c) Losowo wybrana rodzina ma przynajmniej jedną córkę, jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona jedynaczką?

9. Dwaj gracze grają w orła i reszkę monetą symetryczną. Jeśli wypadnie orzeł gracz A płaci B 1 zł., jeśli reszka to B płaci A 1 zł. Gra się kończy, gdy któryś z graczy zostanie bez pieniędzy. Na początku gry gracz A ma a zł., a B b zł.
- a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że grę wygra gracz A.
 - b) Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, jeśli moneta jest sfalszowana tzn. orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \neq 1/2$?
10. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeśli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dylektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, ale również nie-dyslektyk może popełnić więcej niż 5 błędów z prawdopodobieństwem $1/10$. Jasio popełnił w teście 6 błędów - jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest dyslektykiem? Jak jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście popełni co najmniej 6 błędów?
11. W Małej Większej są dwie szkoły podstawowe. Przeprowadzone pod koniec roku szkolnego egzaminy wykazały, że większy procent dziewczynek w szkole nr 1 potrafi rozłożyć liczbę 2012 na czynniki pierwsze niż w szkole nr 2, podobnie większy procent chłopców z jedynki potrafi to zrobić niż w dwójce. Czy znaczy to, że "statystyczne dziecko" ze szkoły nr 1 lepiej wypadło w rozkładaniu 2012 od "statystycznego dziecka" ze szkoły nr 2?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 4

(zadania gwiazdkowe do oddania 20 marca)

1. Załóżmy, że μ_1 i μ_2 są miarami probabilistycznymi oraz $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ dla $A \in \mathcal{A}$.
 - i) Wykaż, że jeśli $\mathcal{A}$ jest π -układem, to $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ dla $A \in \sigma(\mathcal{A})$.
 - ii) Podaj przykład pokazujący, że teza i) nie musi być prawdziwa, gdy usuniemy założenie o tym, że $\mathcal{A}$ jest π -układem.
2. Dla $A \in \mathcal{F}$ zdefiniujmy $A^1 = A$ i $A^{-1} = A'$. Wykaż, że
 - i) dla dowolnego ciągu znaków $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy zdarzenia $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_n}$ są niezależne,
 - ii) zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu znaków $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ zachodzi

$$\mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap A_n^{\varepsilon_n}) = \mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1}) \cdots \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}).$$

3. Na n kartkach zapisano n różnych liczb rzeczywistych, następnie kartki włożono do pudełka, wymieszano i losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k oznacza zdarzenie, że k -ta z wylosowanych liczb jest większa od wszystkich poprzednich. Wykaż, że $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$ oraz zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ są niezależne.
4. Rzucono n kostkami do gry. Określmy zdarzenia A_k - na k -tej kostce wypadła szóstka, $1 \leq k \leq n$ oraz A_{n+1} - suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 6. Wykaż, że dowolne n spośród zdarzeń $A_1, \dots, A_{n+1}$ jest niezależnych, ale łącznie zdarzenia $A_1, \dots, A_{n+1}$ nie są niezależne.
5. Udowodnij, że w definicji niezależności n zdarzeń każde z $2^n - n - 1$ równań jest niezbędne (tzn. jeśli odrzucimy jedno z równań to istnieją zdarzenia zależne spełniające wszystkie pozostałe równania).
6. Wyznacz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego.
7. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w schemacie Bernoulliego w n próbach i prawdopodobieństwu sukcesu w pojedynczej próbie równym p będzie parzysta liczba sukcesów.
8. Dwaj gracze rzucają symetryczną monetą n razy, jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymają tę samą liczbę orłów?
9. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że
 - a) w 10 rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek
 - b) w 9 następnych rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek.

10. Rzucamy kostką do momentu aż wypadnie piątka lub po raz trzeci szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucimy dokładnie n razy.
- 11* Niech X_n oznacza najdłuższą serię orłów w n rzutach monetą symetryczną. Wykaż, że
- a) $\mathbb{P}(X_n \leq a \log_2 n) \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$ dla $a < 1$,
 - b) $\mathbb{P}(X_n \leq a \log_2 n) \rightarrow 1$ przy $n \rightarrow \infty$ dla $a > 1$.
12. Wykaż (używając metod probabilistycznych), że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich n, m oraz $p, q \in [0, 1]$ takich, że $p + q = 1$ zachodzi nierówność $(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geq 1$.
- 13* Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą symetryczną. Przez A_n oznaczmy zdarzenie, że w pierwszych n rzutach wypadło tyle samo orłów, co reszek. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń $A_1, A_2, \dots$. Ile wynosi to prawdopodobieństwo, jeśli moneta nie jest symetryczna?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 5

(zadania gwiazdkowe do oddania 27 marca)

1. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 w ciągu niezależnych rzutów monetą wystąpi każdy skończony ciąg złożony z orłów i reszek.
2. Zdarzenia $A_1, A_2, \dots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(A_n) < 1$ dla wszystkich n . Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
 - i) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie przynajmniej jedno ze zdarzeń A_n ,
 - ii) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele zdarzeń A_n .
- 3* Załóżmy, że X, Y zmienne losowe takie, że X jest $\sigma(Y)$ -mierzalne, tzn. $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$. Udowodnij, że istnieje funkcja mierzalna $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $X = \varphi(Y)$.
4. Zmienna losowa X ma ciągłą, ściśle rosnącą dystrybuantę F . Znajdź rozkład zmiennej $F(X)$. Czy odpowiedź się zmieni, jeśli nie założymy ścisłej monotoniczności F ? A w przypadku nieciągłej dystrybuanty?
5. Niech $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ będzie prawostronnie ciągłą niemalejącą funkcją taką, że $F(\infty) = 1$ oraz $F(-\infty) = 0$. Na odcinku $[0, 1]$ z miarą Lebesgue'a skonstruuj zmienną losową, która ma dystrybuantę F .
6. Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{7} + 2t & \text{dla } 0 \leq t < \frac{1}{14} \\ \frac{2}{7} + t & \text{dla } \frac{1}{14} \leq t < \frac{3}{7} \\ 1 & \text{dla } t \geq \frac{3}{7}. \end{cases}$$

Oblicz $\mathbb{P}(X \geq \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(0 < X < \frac{3}{7})$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(\frac{1}{14} \leq X \leq \frac{3}{7})$.

7. Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } 0 \leq t < 2 \\ 1 & \text{dla } t \geq 2. \end{cases}$$

Znajdź dystrybuantę zmiennych $\min(1, X)$ i $\max(X, X^2)$.

8. a) Dla $t \in [0, 1]$ i $n = 1, 2, \dots$ niech $X_n(t)$ oznacza n -tą cyfrę rozwinięcia dwójkowego liczby t (w przypadku dwu rozwinięć wybieramy to ze skończoną liczbą 1). Udowodnij, że $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi na $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), |\cdot|)$.
b) Pokaż, że funkcje Rademachera $r_n(x) = \text{sgn}(\sin(2^n \pi x))$ są niezależnymi zmiennymi losowymi na $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), |\cdot|)$.

9. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ (zob. zad. 5.). Dla skończonych podzbiorów A liczb całkowitych dodatnich zdefiniujemy funkcje Walsha

$$w_A = \begin{cases} \prod_{i \in A} \varepsilon_i & \text{jeśli } A \neq \emptyset \\ 1 & \text{jeśli } A = \emptyset \end{cases}$$

- a) znajdź rozkład w_A
b) wykaż, że w_A, w_B są niezależne gdy $A \neq B$. Czy w_A, w_B, w_C muszą być niezależne dla różnych indeksów A, B, C ?
- 10* Czy na odcinku $[0, 1]$ istnieją dwie niestałe funkcje ciągłe, będące niezależnymi zmiennymi losowymi względem miary Lebesgue'a? Czy odpowiedź się zmieni, jeśli będziemy chcieli dodatkowo by obie funkcje miały ciągłe pochodne?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 6

(zadania gwiazdkowe do oddania 3 kwietnia)

1. Podaj przykład zmiennej o rozkładzie dyskretnym, której dystrybuenta jest ściśle rosnąca.
2. Zmienna losowa X ma gęstość $cx^2 I_{[0,5]}(x)$. Znajdź liczbę c oraz dystrybuentę zmiennej X .
- 3* Niech X będzie nieujemną „niestarzejącą się zmienną losową”, tzn.

$$\forall_{t,s>0} \mathbb{P}(X > s+t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

(zakładamy, że $\mathbb{P}(X > t) > 0$ dla wszystkich t). Udowodnij, że X ma rozkład wykładniczy.

4. Podaj przykład zmiennej X o ciągłej dystrybuancie, która nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości).
5. Załóżmy, że dystrybuenta F zmiennej losowej X jest ciągła i kawałkami klasy C^1 . Wykaż, że X ma rozkład ciągły (z gęstością $g = F'$).
6. Znajdź rozkład zmiennej $aX + b$ oraz e^{-X} , gdy X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ .
7. Znajdź rozkłady zmiennych $bX + c$, e^X i X^2 , gdy X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.
8. Wykaż, że zmienne $X_1, \dots, X_n$ o rozkładzie dyskretnym są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{P}(X_1 = u_1, \dots, X_n = u_n) = \mathbb{P}(X_1 = u_1)\mathbb{P}(X_2 = u_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = u_n)$ dla dowolnych $u_1, \dots, u_n$.
9. Wykaż, że zmienne rzeczywiste $X_1, \dots, X_n$ o rozkładzie ciągłym z gęstościami odpowiednio $g_1, \dots, g_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektor losowy $X = (X_1, \dots, X_n)$ ma gęstość g_X daną wzorem $g_X(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1)g_2(x_2) \cdots g_n(x_n)$.
10. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym z parametrami odpowiednio p i r . Oblicz $\mathbb{P}(X < Y)$.
11. Rozwiąż zadanie j.w., ale w przypadku gdy X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrami λ i μ .
12. Niech $X_i^{(j)}$, $1 \leq i \leq n_j, j = 1, 2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, a f_j funkcjami mierzalnymi na $\mathbb{R}^{n_j}$. Czy zmienne $f_j(X_1^{(j)}, \dots, X_{n_j}^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots$ muszą być niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

13. Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F . Dla $\omega \in \Omega$ niech $X_1^*(\omega), \dots, X_n^*(\omega)$ będzie ustawieniem $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ w porządku niemalejącym $X_1^*(\omega) \leq X_2^*(\omega) \leq \dots \leq X_n^*(\omega)$ (czyli w szczególności $X_1^* = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, $X_n^* = \max\{X_1, \dots, X_n\}$). Znajdź dystrybuantę X_k^* dla $k = 1, \dots, n$ (X_k^* nazywamy k -tą statystyką porządkową ciągu $X_1, \dots, X_n$).
- 14* Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych rzeczywistych zmiennych losowych. Określmy
- $$Y := \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n, \quad Z := \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n.$$
- Udowodnij, że Y i Z są zdegenerowanymi zmiennymi losowymi, tzn. istnieją $c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ takie, że $\mathbb{P}(Y = c) = \mathbb{P}(Z = d) = 1$.
15. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym dystrybuenta X jest ciągła. Wykaż, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.
16. Zmienna X jest niezależna od samej siebie. Wykaż, że istnieje liczba c taka, że $\mathbb{P}(X = c) = 1$.
17. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznacz rozkłady zmiennych $\lfloor X \rfloor$ oraz $\{X\}$. Czy zmienne te są niezależne?
18. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Znajdź łączny rozkład wektora losowego $(X + Y, X - Y)$. Co można powiedzieć o jego współrzędnych?
- 19* Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ będą niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi Bernoulliego, tzn. $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Jaki rozkład ma zmienna $X = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \varepsilon_i$?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 7

(zadania gwiazdkowe do oddania 10 kwietnia)

1. Roztrzępana sekretarka umieściła w sposób losowy N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwej koperty. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję X .
2. W Beer City jest 50 pubów. W każdy weekend klub miłośników piwa odwiedza 3 losowo wybrane puby. Zakładając, że cotygodniowe wybory są dokonywane niezależnie oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby lokali odwiedzonych przynajmniej raz w ciągu 10 kolejnych weekendów.
3. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy z urny bez zwracania n kul ($n \leq N$) i definiujemy zmienną losową X jako liczbę wylosowanych kul białych. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję X .
4. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu geometrycznego z parametrem p .
5. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$.
- 6* Rzucamy monetą dopóki liczba wyrzuconych orłów nie będzie równa liczbie wyrzuconych reszek. Niech R oznacza liczbę wykonanych rzutów. Znajdź rozkład i wartość oczekiwaną R .
7. Zmienna X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - i) Oblicz $\mathbb{E}|X|^p$ dla $p \in \mathbb{R}$. Ile wynosi ta liczba dla p naturalnych parzystych, a ile dla nieparzystych?
 - ii) Oblicz $\mathbb{E} \exp(\lambda X)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$. Jak się zmieni odpowiedź, gdy X ma rozkład $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$?
8. Udowodnij, że dla dowolnej rzeczywistej zmiennej losowej X ,

$$\mathbb{E}|X|^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(|X| \geq t) dt.$$

9. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \dots, a_n$,

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right)^4 \leq 3 \left(\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right)^2 \right)^2,$$

gdzie $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Wykaż, że stałą 3 nie można poprawić.

10* Niech $S = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$, gdzie (ε_i) są takie jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} e^{\lambda S} \leq e^{\frac{1}{2} \lambda^2 \mathbb{E} S^2}$$

i wywnioskuj stąd, że dla $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|S| \geq t(\mathbb{E} S^2)^{1/2}) \leq 2e^{-t^2/2}.$$

11* Niech S będzie jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że dla dowolnego $p > 0$ istnieje liczba $C_p < \infty$ zależna tylko od p taka, że

$$(\mathbb{E}|S|^p)^{1/p} \leq C_p (\mathbb{E}|S|^2)^{1/2}$$

12. Rzeczywista zmienna losowa X spełnia $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Udowodnij, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^p \mathbb{P}(|X| \geq t) = 0.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 8

(zadania gwiazdkowe do oddania 17 kwietnia)

1* Udowodnij, że dla $\lambda \in (0, 1)$ i dowolnej nieujemnej zmiennej losowej X ,

$$\mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}X) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}X^2}.$$

2* Wykaż, że jeśli zdarzenia A_i są parami niezależne oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty$, to $\mathbb{P}(\limsup A_i) = 1$.

3. Mówimy, że zmienna losowa X jest *symetryczna*, jeśli zmienne X i $-X$ mają ten sam rozkład. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

- i) X jest symetryczna,
- ii) X ma ten sam rozkład, co εX , gdzie ε jest niezależne od X i $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$,
- iii) $\mathbb{E}f(X) = 0$ dla dowolnej nieparzystej, ograniczonej borelowskiej funkcji f .

4. Wykaż, że jeśli X_i są niezależne oraz X_i ma rozkład $\Gamma(\alpha_i, \beta)$, to $\sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład $\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta)$.

5. Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$ wykaż, że zmienna $\sum_{i=1}^n X_i^2$ ma rozkład $\Gamma(n/2, 2)$ (rozkład ten nazywamy też rozkładem *chi kwadrat o n stopniach swobody* $\chi^2(n)$).

6. Zmienne $X_1, X_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ są niezależne, przy czym X_i mają rozkład wykładniczy z parametrem λ , a $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Znajdź rozkład $\varepsilon_i X_i$, $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$ oraz $\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2$.

7. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$. Jaki rozkład mają zmienne $X + Y$ oraz $X^2 + Y^2$?

8. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ i μ , znajdź rozkład zmiennej X/Y .

9* Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ . Zdefiniujmy

$$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^k X_i, \quad k = 1, 2, \dots$$

oraz dla $t > 0$,

$$N_t := \sup\{n : S_n \leq t\}.$$

Wykaż, że N_t ma rozkład Poissona z parametrem λt .

10. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Cauchy'ego z parametrami h_1 i h_2 . Udowodnij, że $X + Y$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $h_1 + h_2$ (inaczej jeśli X, Y niezależne o standardowym rozkładzie Cauchy'ego, to $h_1 X + h_2 Y \sim (h_1 + h_2)X$).
11. $X_0, X_1, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybucją. Niech $N = \inf\{n : X_n > X_0\}$. Znajdź rozkład N i oblicz $\mathbb{E}N$.
- 12* Udowodnij, że dla $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ zmienna losowa $S_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varepsilon_n$ ma ciągłą dystrybucję, ale nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości) ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi takimi, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$).

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 9

(zadania gwiazdkowe do oddania 15 maja)

1. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Bernoulliego $\text{Bin}(n, p)$, Y ma rozkład Bernoulliego $\text{Bin}(m, p)$. Oblicz $\mathbb{E}(X + Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X|X + Y)$.
2. Rzucono kostką najpierw raz, a następnie tyle razy ile oczek wypadło w pierwszym rzucie. Oblicz wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek oraz liczby wyrzuconych trójek.
3. W woreczku znajduje się pewna liczba monet, z których p procent jest sfalszowana, z orłem po obu stronach. Powtarzamy n razy następujące doświadczenie - wyciągamy z woreczka monetę i ją rzucamy, a następnie zwracamy do woreczka. Niech O oznacza liczbę wyrzuconych orłów, zaś F liczbę wylosowań sfalszowanych monet. Wykaż, że $\mathbb{E}(F|O) = \frac{2p}{100+p}O$. Ile wynosi $\mathbb{E}(O|F)$?
4. Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ , niech $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
 - a) Oblicz $\mathbb{E}(S_n|X_1)$, $\mathbb{E}(S_n^2|X_1)$.
 - b) Dla $n \geq k$ wyznacz $\mathbb{E}(S_n|S_k)$, $\mathbb{E}(S_n^2|S_k)$ oraz $\mathbb{E}(e^{-S_n}|S_k)$.
5. Znajdź przykład zmiennych losowych X, Y , które nie są niezależne, ale $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}X$.
6. Załóżmy, że zmienne X, Y przyjmują wartości naturalne oraz

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \begin{cases} \frac{1}{l2^l} & \text{dla } 1 \leq k \leq l \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Oblicz $\mathbb{E}(X|Y)$.

7. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y)$. Niech f będzie funkcją borelowską taką, że $\mathbb{E}|f(X)| < \infty$. Wykaż, że $\mathbb{E}(f(X)|Y) = h(Y)$ p.n., gdzie

$$h(y) = \begin{cases} \frac{\int f(x)g(x, y)dx}{\int g(x, y)dx} & \text{jeśli } \int g(x, y)dx > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

8. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{2}e^{-x(y+1)} & \text{jeśli } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wyznacz $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(Y^2|X^2)$ oraz $\mathbb{P}(Y > 1|X^3 + 1)$.

9. Zmienne X i Y są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Oblicz $\mathbb{E}(X^3|X+Y)$ oraz $\mathbb{E}(\max(X, Y)|\min(X, Y))$.
10. Niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Oblicz $\mathbb{P}(X \in B|X+Y)$ oraz $\mathbb{E}(\sin X|X+Y)$.
11. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, zaś Y jest zmienną losową taką, że jeśli $X = x$, to Y ma rozkład wykładniczy z parametrem x .
a) Wyznacz rozkład Y .
b) Oblicz $\mathbb{P}(X > r|Y)$.
- 12* Zmienne $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne, całkowalne i mają jednakowy rozkład. Oblicz $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2 + \dots + X_n)$.
13. Dane jest σ -ciało $\mathcal{G}$ oraz zmienne losowe X i Y takie, że zmienna X jest mierzalna względem $\mathcal{G}$, a Y jest niezależna od $\mathcal{G}$. Wykaż, że dla dowolnej funkcji borelowskiej h takiej, że $\mathbb{E}|h(X, Y)| < \infty$,

$$\mathbb{E}(h(X, Y)|\mathcal{G}) = H(X) \quad \text{p.n.},$$

gdzie $H(x) = \mathbb{E}h(x, Y)$.

14. Niech $\mathbb{P}$ będzie miarą probabilistyczną na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ z gęstością $f(x, y)$ względem miary Lebesgue'a (czyli $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x, y) dx dy$). Niech $\mathcal{G} = \{A \times \mathbb{R} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Znajdź regularny rozkład warunkowy $\mathbb{P}$ względem $\mathcal{G}$.
15. Niech π będzie regularnym rozkładem warunkowym $\mathbb{P}$ względem $\mathcal{G}$. Wykaż, że dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej X ,

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega) = \int_{\omega} X(\omega') \pi(d\omega', \omega) \quad \text{p.n.}$$

- 16* Załóżmy, że X jest nieujemną zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wykaż, że dla dowolnego σ -ciała $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$,
a) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t|\mathcal{G}) dt$ p.n.
b) $\mathbb{P}(X > t|\mathcal{G}) \leq t^{-k} \mathbb{E}(X^k|\mathcal{G})$ p.n.
- 17* Załóżmy, że X jest całkowalną zmienną losową, zaś σ -ciało $\mathcal{G}_2$ jest niezależne od X i σ -ciała $\mathcal{G}_1$. Udowodnij, że

$$\mathbb{E}(X|\sigma(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1) \quad \text{p.n..}$$

18. Zmienne losowe X , Y i Z są niezależne, przy czym X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$, Y jest nieujemną zmienną ograniczoną oraz $\mathbb{P}(Z = \pm 1) = 1/2$. Oblicz $\mathbb{E}(e^{XY}|Y)$ oraz $\mathbb{E}(e^{XY}|YZ)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 10

(zadania gwiazdkowe do oddania 22 maja)

1. Udowodnij, że $\lim_{p \rightarrow \infty} \|X\|_p = \|X\|_\infty := \text{esssup}|X|$.
2. Udowodnij, że funkcja $f(r) := r \ln \mathbb{E}|X|^{1/r}$ jest wypukła dla $r \in (0, \infty)$.
- 3* Zmienna losowa X spełnia $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ dla pewnego $p > 0$. Wykaż, że

$$\lim_{p \rightarrow 0+} (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} = \|X\|_0 := \exp(\mathbb{E} \ln |X|)$$

(przyjmujemy, że $e^{-\infty} = 0$).

4. Dla $p < 0$ określmy podobnie jak dla $p > 0$, $\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$ używając dodatkowej konwencji $\infty^\alpha = 0$ dla $\alpha < 0$. Wykaż, że

$$\|X\|_q \leq \|X\|_p \quad \text{dla} \quad -\infty < q \leq p \leq \infty.$$

5. Dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ określmy

$$L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \{X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \text{mierzalne}\}.$$

Dla $X, Y \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ niech

$$d(X, Y) := \mathbb{E} \min(1, |X - Y|).$$

Wykaż, że zbieżność w metryce d jest równoważna zbieżności według prawdopodobieństwa.

6. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych X_n zbiega do X według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego jego podciągu da się wybrać podciąg zbieżny do X prawie na pewno.
- 7* Wykaż, że zbieżność prawie wszędzie jest niemetryzowalna, tzn. nie istnieje metryka na $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, która metryzowałaby zbieżność prawie na pewno.
8. Udowodnij, że dla dowolnych zmiennych losowych X_n, Y_n, X, Y
 - a) jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ to $\mathbb{P}(X = Y) = 1$
 - b) jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ to $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - Y_n| > \varepsilon) = 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$
9. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, to $aX_n + bY_n \xrightarrow{\mathbb{P}} aX + bY$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b .
10. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ oraz F jest funkcją ciągłą, to $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X, Y)$.

11. Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{P}(|X_i| < 1) = 1$. Wykaż, że ciąg $R_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ zbiega do 0 p.n..
12. Zmienne $(X_n)_{n \geq 1}$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład Poissona ze średnią $1/n$. Zbadaj zbieżność ciągu X_n
 - i) według prawdopodobieństwa;
 - ii) prawie na pewno;
 - iii) w L^2 i $L^{3/2}$.
13. Liczby $p, q > 0$ spełniają warunek $1/p + 1/q = 1$. Wykaż, że jeśli X_n zbiega do X w L^p oraz Y_n zbiega do Y w L^q (zakładamy, że $X \in L^p$ oraz $Y \in L^q$), to $X_n Y_n$ zbiega do XY w L^1 .
14. Zmienne X_n i Y_n są zbieżne p.n. do zmiennych X i Y odpowiednio. Wykaż, że jeśli dla każdego n , zmienna X_n ma ten sam rozkład co zmienna Y_n , to zmienne X i Y mają jednakowy rozkład.
15. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem zmiennych niezależnych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X| < \infty$. Wykaż, że $\frac{1}{n} \max_{i \leq n} |X_i| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
16. Wykaż, że jeśli zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne oraz mają jednakowy rozkład taki, że $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$, to

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}X_1 \quad \text{wg prawdopodobieństwa.}$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa * - 11

(zadania gwiazdkowe do oddania 5 czerwca)

1. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ takie, że X_n ma rozkład jednostajny na $[-n, n]$. Wyznacz wszystkie liczby p dla których szereg $\sum_{n \geq 1} \frac{X_n}{n^p}$ jest zbieżny prawie na pewno.
2. Załóżmy, że $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ oraz $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ dla $n = 1, 2, \dots$. Wykaż, że $\sum_{n \geq 1} X_n$ jest zbieżny p.n. oraz $\sum_{n \geq 1} \text{Var}(X_n) = \infty$.
3. Udowodnij, że dla ciągu nieujemnych zmiennych losowych X_i , $\sum_{i=1}^{\infty} X_i < \infty$ p.n. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \frac{X_i}{1+X_i} < \infty$.
4. Zmienne X_i oraz ε_i są niezależne przy czym $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i X_i$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 < \infty$ p.n..
- 5* Z poprzedniego zadania wynika, że $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varepsilon_n$ jest zbieżny p.w. Czy S ma rozkład ciągły?
6. Zdarzenia $A_1, A_2, \dots$ są niezależne oraz $p_n = P(A_n)$, $N_n = \sum_{i=1}^n I_{A_i}$, $n = 1, 2, \dots$. Udowodnij, że

$$\frac{N_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} \rightarrow 0$$

wg prawdopodobieństwa.

- 7* Funkcja rzeczywista f jest ciągła na $[0, 1]^2$. Dla $x, y \in [0, 1]$ określmy

$$B_{f,n}(x, y) = \sum_{k,l=0}^n f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) \binom{n}{k} \binom{n}{l} x^k (1-x)^{n-k} y^l (1-y)^{n-l}.$$

Udowodnij, że $B_{f,n}(x, y)$ zbiega jednostajnie do $f(x, y)$ na $[0, 1]^2$.

8. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem λ . Pokaż, że ciągi zmiennych losowych

$$a) \frac{X_1 X_2 + X_2 X_3 + \dots + X_n X_{n+1}}{n}, \quad b) \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}$$

są zbieżne prawie na pewno i wyznacz ich granice.

9. Dany jest ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem 2019. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych

$$\frac{X_1 X_2 X_3 + X_2 X_3 X_4 + \dots + X_n X_{n+1} X_{n+2}}{n}$$

jest zbieżny prawie na pewno i znajdź jego granicę.

10. Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $(1/n, 1]$. Udowodnij, że ciąg średnich

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

jest zbieżny prawie na pewno i oblicz jego granicę.

11. Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Czy ciąg $M_n = (X_1 X_2 \dots X_n)^{1/n}$ jest zbieżny p.n.? Jeśli tak, to do jakiej granicy?
12. Wykaż, że dla dowolnego ciągu $(X_n)_{n \geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ ciąg średnich

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}X_1 \quad \text{w } L^1 \text{ przy } n \rightarrow \infty.$$

13. Załóżmy, że zmienna N_n ma rozkład Poissona z parametrem n . Wykaż, że $N_n/n \rightarrow 1$ w L^1 przy $n \rightarrow \infty$.
14. Oblicz granice

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \dots dx_n,$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \dots \int_0^1 \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} dx_1 \dots dx_n,$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n,$ gdzie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą,
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{n}{n + x_1 + \dots + x_n} e^{-(x_1 + \dots + x_n)} dx_1 \dots dx_n.$