

Zadania ze Wstępu do Procesów Stochastycznych - 1

W zadaniach poniżej $(N_t)_{t \geq 0}$ oznacza proces Poissona z parametrem λ .

1. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Poissona są niemalejące, przyjmują wartości całkowite nieujemne, mają wszystkie skoki równe 1 oraz dążą do nieskończoności.

2. Wykaż, że moment pierwszego skoku w procesie Poissona

$$\tau_1 := \inf\{t: N_t > 0\}$$

jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ .

3. Niech

$$\tau_k := \inf\{t: N_t = k\} \tag{1}$$

będzie momentem k -tego skoku w procesie Poissona. Wykaż, że odstęp między skokami

$$\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \dots$$

są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ .

4. Udowodnij, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ p.n.
5. Niech $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ będą niezależnymi procesami Poissona. Wykaż, że $N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ jest procesem Poissona.
6. Niech $T > 0$. Wykaż, że $(N_{t+T} - N_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Poissona z parametrem λ .
7. Niech τ_k będzie zdefiniowane wzorem (1) Oblicz
 - i) $\mathbf{E}(N_5 | N_3 = 4)$,
 - ii) $\mathbf{E}(N_3 | N_5 = 4)$,
 - iii) $\mathbf{E}\tau_6$,
 - iv) $\mathbf{E}(\tau_6 | N_3 = 4)$.
8. Niech τ_k będzie zdefiniowane wzorem (1) oraz $t > 0$. Znajdź
 - i) warunkowy rozkład zmiennej τ_1 pod warunkiem $N_t = 1$,
 - ii) warunkowy rozkład wektora (τ_1, τ_2) pod warunkiem $N_t = 2$,
 - iii) warunkowy rozkład wektora $(\tau_1, \dots, \tau_k)$ pod warunkiem $N_t = k$.
9. Niech $T > 0$, θ ma rozkład Poissona z parametrem λ oraz $\xi_1, \xi_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0, T]$, niezależnymi od θ . Wykaż, że proces $(X_t)_{t \in [0, T]}$ zadany wzorem

$$X_t := \sum_{j=1}^{\theta} \mathbf{1}_{[0, t]}(\xi_j)$$

jest procesem Poissona z parametrem λ .

10. Proces N_t mierzący liczbę zamówień w pewnym sklepie internetowym do chwili t ma rozkład Poissona z parametrem λ . Załóżmy, że każdy z zamawiających z prawdopodobieństwem p płaci z góry, a z prawdopodobieństwem $1 - p$ przy odbiorze towaru (i nie ma zależności między sposobami płatności różnych klientów). Niech $N_t^{(1)}$ (odp. $N_t^{(2)}$) oznacza liczbę zamówień do chwili t opłaconych z góry (odp. przy odbiorze towaru). Wykaż, że $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ są niezależnymi procesami Poissona z parametrami odpowiednio $p\lambda$ i $(1 - p)\lambda$.

Zadania ze Wstępu do Procesów Stochastycznych - 2

W zadaniach poniżej $(W_t)_{t \geq 0}$ oznacza jednowymiarowy proces Wienera.

1. Znajdź rozkład zmiennej $5W_1 - W_3 + 2W_7$.
2. Dla jakich parametrów a i b , zmienne $aW_1 - W_2$ oraz $W_3 + bW_5$ są niezależne?
3. Znajdź rozkład wektora losowego $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n})$ dla $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$.
4. Oblicz $\mathbf{E}(W_5^2 | W_2)$ oraz $\mathbf{E}(W_2^2 | W_5)$.
5. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera:
 - a) $X_t = -W_t$ (odbicie),
 - b) $Y_t = c^{-1/2}W_{ct}, c > 0$ (przeskalowanie czasu),
 - c) $Z_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu),
 - d) $U_t = W_{T+t} - W_T, T \geq 0$,
 - e) $V_t = W_t$ dla $t \leq T$, $V_t = 2W_T - W_t$ dla $t > T$, gdzie $T \geq 0$.
6. Wykaż, że proces

$$B_t := (1+t)W_{t/(1+t)} - tW_1, \quad t \in [0, \infty)$$

jest procesem Wienera.

(Uwaga: powyższy wzór pokazuje jak na podstawie procesu Wienera na $[0, 1]$ zbudować proces Wienera na $[0, \infty)$).

7. Udowodnij, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n..
8. Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$ oraz $\|\pi_n\| := \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę π_n . Udowodnij, że

$$S_n := \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \rightarrow b - a \quad \text{w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ przy } n \rightarrow \infty,$$

jeśli $\|\pi_n\| \rightarrow 0$ oraz $S_n \rightarrow b - a$ p.n., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

9. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.