

Procesy Stochastyczne II

spisał: Marcin Pękalski

16 listopada 2006

Poniższe notatki powstały na podstawie wykładów z Procesów Stochastycznych II, prowadzonych w semestrach zimowych 2003/04 i 2006/07 i zostały spisane przez pana Marcina Pękalskiego oraz przejrane przeze mnie.

Z góry przepraszam za wszystkie nieścisłości i omyłki mogące pojawić się w tekście i jednocześnie zwracam się z prośbą do czytelników, którzy zauważyli błędy lub mają jakieś inne uwagi na temat notatek o kontakt mailowy `rlatala@mimuw.edu.pl` z podaniem wersji notatek (daty) do której chcą się ustosunkować.

Rafał Latała

Problem:

Jak zdefiniować $\int_0^t f(s) dW_s$ lub ogólniej $\int_0^t X_s dW_s$ bądź $\int_0^t X_s dY_s$ gdzie $f(s)$ „porządkna” funkcja, a X_s, Y_s „porządkne” procesy stochastyczne?

1 Całka Riemana-Stieltjesa

Definicja 1.1.

Jeśli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, to liczbę

$$\text{Wah}_{[a,b]}(f) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{a=t_0 < \dots < t_n=b} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

nazywamy *wahaniami funkcji f w przedziale $[a, b]$* . Mówimy, że f jest *funkcją o wahaniiu skończonym na $[a, b]$* , jeśli $\text{Wah}_{[a,b]}(f) < \infty$.

Oczywiście $0 \leq \text{Wah}_{[a,b]}(f) \leq \infty$. Wahanie jest addytywną funkcją przedziału tzn. $\text{Wah}_{[a,c]}(f) = \text{Wah}_{[a,b]}(f) + \text{Wah}_{[b,c]}(f)$, gdy $a < b < c$.

Przykład 1.2.

- f Lipschitzowska
 - f monotoniczna
 - $f = g - h$ g, h monotoniczne
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet f \text{ Lipschitzowska} \\ \bullet f \text{ monotoniczna} \\ \bullet f = g - h \text{ } g, h \text{ monotoniczne} \end{matrix}} \right\} \Rightarrow f \text{ ma wahanie sk. na każdym skończonym przedziale.}$$

(ZAD)

Twierdzenie 1.3.

Jeśli f ma wahanie skończone na $[0, T]$ to istnieją funkcje niemalejące f_1, f_2 takie, że $f_1(0) = f_2(0) = 0$ oraz $f(t) = f(0) + f_1(t) - f_2(t)$. Co więcej f ma w każdym punkcie granice jednostronne. Ponadto

- i) jeśli f jest ciągła to f_1, f_2 można wybrać ciągłe,
- ii) jeśli f jest *cadlag*¹ to f_1, f_2 można wybrać *cadlag*.

Definicja 1.4.

$\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ jest *podziałem* $[0, T]$ jeśli $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = T$,
 $\text{diam}(\Pi) := \max_i |t_{i+1} - t_i|$.

Π' jest *podpodziałem* Π (ozn. $\Pi' \prec \Pi$) jeśli wszystkie punkty Π są punktami Π' .

¹cadlag - prawostronnie ciągła z lewostronnymi granicami

$\Pi^n = \{t_0^n, \dots, t_{k_n}^n\}$ jest *normalnym ciągiem podziałów* jeśli $\text{diam}(\Pi^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ oraz $\Pi^{n+1} \prec \Pi^n$.

Definicja 1.5.

Niech $f, g: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Powiemy że $\int g df$ istnieje jeśli dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $\Pi^n = \{t_0^n, \dots, t_{k_n}^n\}$ oraz punktów $s_0^n, \dots, s_{k_n-1}^n$ takich, że $t_j^k \leq s_j^k \leq t_{j+1}^k$ istnieje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} h(s_j^k) [f(t_j^k) - f(t_{j-1}^k)].$$

Granice tę oznaczamy $\int_0^T h(t) df(t)$ i nazywamy *całką Riemanna-Stieltjesa*.

Twierdzenie 1.6.

Jeżeli h ciągła, a f ma wahanie skończone, to $\int_0^T h df$ istnieje.

Dowód.

Tak jak dla całki Riemanna.

□

Uwaga 1.7. • W przypadku $f(t) = t$ jest to zwykła całka Riemanna.

- Jeśli $f \in C^1$, to $f(t_{j+1}^n) - f(t_j^n) = f'(\Theta_j^n)$ dla pewnego $t_j^{n+1} \leq \Theta_j^n \leq t_j^n$.

Stąd możemy udowodnić, że

$$\int_0^T h(t) df(t) = \int_0^T h(t) f'(t) dt.$$

Uogólnienie

f - cadlag o wahanu ograniczonym o rozkładzie $f(t) = f(0) + f_1(t) - f_2(t)$, f_1, f_2 - cadlag niemalejące. Istnieją miary borelowskie μ_1, μ_2 na $[0, T]$ takie, że $\mu_i[0, t] = f_i(t)$.

Wówczas

$$\int h(t) df(t) := \int_0^T h(t) \mu_1(dt) - \int_0^T h(t) \mu_2(dt)$$

$h: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ borelowska, ograniczona (jest to *całka Lebesgue'a-Stieltjesa*).

Uwaga 1.8.

Jeśli h jest ciągła na $[0, T]$, to całka Lebesgue'a-Stieltjesa jest równa całce Riemanna-Stieltjesa.

(ZAD)

Uwaga 1.9.

Jeśli f - cadlag taka, że $\int h df$ istnieje dla wszystkich $h \in C([0, T])$, to f ma wahanie skończone.

Problem

Jeśli f jest ciągła na $[0, T]$ i wahanie f jest skończone, to

$$\sum_{i=0}^{k_n} |f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)|^{1+\delta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

o ile $\delta > 0$, $\Pi^n = \{t_0^n, \dots, t_{k_n}^n\}$ podziały $[0, T]$ takie, że $\text{diam}(\Pi^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Dla procesu Wienera

$$\sum_{i=1}^n |\mathbb{W}(t_{i+1}^n) - \mathbb{W}(t_i^n)|^2 \xrightarrow{p.n.} T \quad \text{jeśli} \quad \sum \text{diam}(\Pi^n) < \infty,$$

czyli prawie wszystkie trajektorie $\mathbb{W}$ mają wahanie nieskończone.

Wniosek 1.10.

Dla zdefiniowania $\int f d\mathbb{W}$ trzeba wymyśleć inną definicję.

2 Całka Paleya-Wienera

W tym rozdziale pokażemy jak można całkować względem procesu Wienera funkcje deterministyczne.

Dla funkcji prostej

$$h = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{(t_{i-1}, t_i]}, \quad 0 = t_0 < t_1 \leq \dots < t_k = T, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

określamy

$$I(h) = \int_0^T h(t) d\mathbb{W}_t := \sum_{i=1}^k a_i (\mathbb{W}(t_i) - \mathbb{W}(t_{i-1})).$$

Własności.

- $\mathbb{E}(\int_0^T h(t) d\mathbb{W}_t) = 0$
- $\mathbb{E}(\int_0^T h(t) d\mathbb{W}_t)^2 = \text{Var}(\sum a_i(\mathbb{W}(t_i) - \mathbb{W}(t_{i-1}))) = \sum a_i^2 \text{Var}(\mathbb{W}(t_i) - \mathbb{W}(t_{i-1})) = \sum a_i^2(t_i - t_{i-1}) = \int_0^T h^2(t) dt$
- $I(ah_1 + bh_2) = aI(h_1) + bI(h_2)$

Mamy więc izometrię $L^2([0, T]) \supset E_1 \xrightarrow{I} L^2(\Omega)$. Izometria ta rozszerza się jednoznacznie do $\overline{E_1} = L^2([0, T])$.

Definicja 2.1.

Rozszerzenie powyższej izometrii do $L^2([0, T])$ nazywamy całką Paleya-Wienera h i oznaczamy $\int_0^T h(t) d\mathbb{W}_t$.

Własności $I(h) = \int_0^T h(t) d\mathbb{W}_t$:

1. $\mathbb{E}I(h) = 0$,
2. $\mathbb{E}I(h)^2 = \int_0^T h^2 dt$,
3. $I(h)$ ma rozkład normalny $N(0, \int h^2 dt)$.

ZAD 2.2.

Jeżeli $h \in C^1([0, T])$, to $\int_0^T h(t) d\mathbb{W}_t = h(T)\mathbb{W}_T - \int_0^T h'(t)\mathbb{W}_t dt$.

ZAD 2.3.

Jeżeli $h \in L^2([0, 1])$, to $\forall_{t < T} \int_0^T \mathbb{1}_{[0, t]}(s)h(s) d\mathbb{W}_s = \int_0^t h(s) d\mathbb{W}_s$ p.w.

ZAD 2.4.

$\|\int_0^T h d\mathbb{W}_t\|_{L^p} = (\mathbb{E}|g|^p)^{\frac{1}{p}} (\int_0^T h^2 dt)^{1/2}$, dla $h \in L^2([0, T])$, czyli $I(h) = \int_0^T h d\mathbb{W}_t$ jest po unormowaniu izometrycznym włożeniem $L^2([0, T])$ w $L^p(\Omega)$.

3 Izometryczna całka stochastyczna

Od tego momentu zakładamy, że $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest zupełną przestrzenią probabilistyczną (tzn. $\mathbb{P}(A) = 0, B \subset A \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 0$), zaś $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ zupełną filtracją (tzn. $\forall_t \mathcal{F}_t$ zupełne), oraz $0 < T \leq \infty$. Dodatkowo kładziemy $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t)$.

Martyngały ciągłe, całkowane z kwadratem

Definicja 3.1.

Przez $\mathcal{M}_T^{2,c}$ oznaczamy przestrzeń martyngałów względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ o trajektoriach ciągłych takich, że $\sup_{t \leq T} \mathbb{E} M_t^2 < \infty$.

Uwaga 3.2. 1. $M \in \mathcal{M}_T^{2,c} \Rightarrow M^2$ podmartyngał, $\sup_{t \leq T} \mathbb{E} M_t^2 = \mathbb{E} M_T^2$.

2. $M \in \mathcal{M}_T^{2,c} \Rightarrow \mathbb{E} \sup_{t \leq T} M_t^2 \stackrel{\text{nier. Dooba}}{\leq} 4 \sup_{t \leq T} \mathbb{E} M_t^2 < \infty$.

3. Dla $T = \infty$, $\mathcal{M}_\infty^{2,c}$ można utożsamić z martyngałami ciągłymi na $[0, \infty)$ takimi, że $\sup_{t < \infty} \mathbb{E} M_t^2 < \infty$.

Istotnie $(M_t)_{t \geq 0}$ j.w., $\mathbb{E} \sup_{t \leq T} M_t^2 < \infty \Rightarrow M_t$ zbieżny w $L^2(\Omega)$ oraz p.n., $M_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$, wtedy $M_t = \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_t)$ p.n., czyli faktycznie otrzymujemy martyngał $(M_t)_{0 \leq t \leq \infty}$.

Uwaga 3.3.

W czasie całego wykładu nie będziemy odróżniać procesów nieodróżnialnych (czyli $\mathbb{P}(\forall_t X_t = Y_t) = 1$).

Fakt 3.4.

$\mathcal{M}_t^{2,c}$ jest przestrzenią Hilberta² z iloczynem skalarnym

$$(M, N) = (M, N)_T = \mathbb{E} M_T N_T,$$

$$\|M\|_T = \sqrt{\mathbb{E} M_T^2} = \|M_T\|_{L^2(\Omega)},$$

²czyli zupełną przestrzenią euklidesową

$\mathcal{M}_T^{2,c}$ zanurza się izometrycznie w $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dowód.

Oczywiście $M_T^{2,c}$ jest przestrzenią liniową i (M, N) jest iloczynem skalarnym, bo $(N, N) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}N_T^2 = 0 \Rightarrow N_T = 0$ p.n. $\Rightarrow \forall_t N_t = 0$ p.n. $\Rightarrow \mathbb{P}(N_t = 0 \forall_t) = 1$.

Przypomnienie

X_t, Y_t ciągłe, X_t modyfikacją Y_t (tzn. $X_t = Y_t$ p.n.) $\Rightarrow X_t$ i Y_t nieodróżnialne $\mathbb{P}(\forall_t X_t = Y_t) = 1$.

Wracamy do dowodu. Trzeba pokazać tylko zupełność. Załóżmy, że $M_t^{(n)} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ spełnia warunek Cauchy'ego, czyli $M \in \mathcal{M}^{2,c}$

$$\|M^{(n)} - M^{(m)}\|_T^2 = \mathbb{E}(M_T^{(n)} - M_T^{(m)})^2 \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0.$$

Wówczas $M_T^{(n)}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, czyli $M_T^{(n)} \rightarrow M_T$ w $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.

Możemy położyć $M_t := \mathbb{E}(M_T | \mathcal{F}_t)$, ale czy M_t jest ciągły? Na mocy nierówności Dooba,

$$\mathbb{E} \sup_{t \leq T} (M_T^{(n)} - M_t^{(m)})^2 \leq 4 \sup_{t \leq T} \mathbb{E} \|M_t^{(n)} - M_t^{(m)}\|^2 \rightarrow 0.$$

Stąd możemy wybrać podciąg n_k taki, że

$$\forall l > k \quad \mathbb{E} \sup_{t \leq T} (M_t^{(n_k)} - M_t^{(n_l)})^2 \leq 8^{-k}.$$

Wówczas

$$\mathbb{P}(\sup_{t \leq T} |M_t^{(n_k)} - M_t^{(n_{k+1})}| \geq 2^{-k}) \leq 2^{-k}.$$

Zatem, jeśli

$$A_k := \{\sup_{t \leq T} |M_t^{(n_k)} - M_t^{(n_{k+1})}| \geq 2^{-k}\},$$

to $\sum_k \mathbb{P}(A_k) < \infty$, czyli

$$\mathbb{P}(\limsup A_k) = 0.$$

Jeśli $\omega \notin \limsup A_k$, to $\omega \notin A_k$ dla $k \geq k_0(\omega)$, czyli $\sup_{t \leq T} |M_t^{(n_k)} - M_t^{(n_{k+1})}| \leq 2^{-k}$ dla $k \geq k_0(\omega)$. Zatem $(M_t^{(n_k)})_{0 \leq t \leq T}$ jest zbieżny jednostajnie na $[0, T]$ do $\tilde{M}_t$, a ponieważ są to funkcje ciągłe na $[0, T]$, to $\tilde{M}_t$ jest ciągły. Ponieważ $M_T^{(n_k)} \rightarrow$

M_T w L^2 więc również w L^1 , czyli $M_t^{(n_k)} = \mathbb{E}(M_T^{(n_k)}|\mathcal{F}_t) \rightarrow \mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_t)$ w L^1 , a że $M_t^{(n_k)} \rightarrow \tilde{M}_t$, więc $\tilde{M}_t = \mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_t) = M_t$ czyli M_t jest martyngałem ciągłym.

□

Procesy elementarne

Definicja 3.5.

Powiemy, że proces $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ należy do $\mathcal{E}$ - rodziny *procesów elementarnych* (*elementarnych procesów prognozowalnych*), jeśli X jest postaci

$$X_t = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^n \xi_{k-1} \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t),$$

gdzie $0 = t_0 \leq \dots \leq t_m < T$, ξ_k - zmienna losowa ograniczona $\mathcal{F}_{t_k}$ mierzalna.

Oczywiście $\mathcal{E}$ jest przestrzenią liniową.

Definicja 3.6.

Dla $X \in \mathcal{E}$ definiujemy proces

$$I(X) = \int X d\mathbb{W},$$

$$I(X) = (I(X)_t)_{t \leq T} = \left(\int_0^t X_s d\mathbb{W}_s \right)_{t \leq T}$$

wzorem

$$I(X)_t := \sum_{k=1}^m \xi_{k-1} (\mathbb{W}_{t_k \wedge t} - \mathbb{W}_{t_{k-1} \wedge t}).$$

Uwaga 3.7.

Definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od reprezentacji $X \in \mathcal{E}$.

Fakt 3.8.

Jeśli $X \in \mathcal{E}$, to $I(X) \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, $I(X)_0 = 0$ oraz

$$\|I(X)\|_T^2 = \mathbb{E} \left(\int_0^T X_s d\mathbb{W}_s \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^T X_s^2 ds.$$

Dowód.

Oczywiście $I(X)_0 = 0$, $t \rightarrow I(X)_t$ jest ciągłe i $I(X)_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Jeżeli $t_j \leq t \leq t_{j+1}$, to

$$I(X)_t = \xi_0(\mathbb{W}_{t_1} - \mathbb{W}_{t_0}) + \xi_1(\mathbb{W}_{t_2} - \mathbb{W}_{t_1}) + \dots + \xi_j(\mathbb{W}_t - \mathbb{W}_{t_j})$$

jest $\mathcal{F}_t$ mierzalna.

Sprawdzimy teraz, że $I(X)$ jest martyngałem, czyli dla $s < t \leq T$ mamy $\mathbb{E}(I(X)_t | \mathcal{F}_s) = I(X)_s$. Wystarczy pokazać to dla $t_j \leq s < t \leq t_{j+1}$, ale wtedy

$$\mathbb{E}(I(X)_t - I(X)_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\xi_j(\mathbb{W}_t - \mathbb{W}_s) | \mathcal{F}_s) = \xi_j \mathbb{E}(\mathbb{W}_t - \mathbb{W}_s | \mathcal{F}_s) = 0$$

(pamiętamy, że ξ_j jest $F_{t_j} \subset F_s$ mierzalne). By zakończyć dowód liczymy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}I(X)_T^2 &= \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\xi_{k-1}^2(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 + 2 \sum_{j < k} \mathbb{E}\xi_{k-1}\xi_{j-1}(\mathbb{W}_{t_k} - \mathbb{W}_{t_{k-1}})(\mathbb{W}_{t_j} - \mathbb{W}_{t_{j-1}}) \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Ponadto

$$I_1 = \sum_k \mathbb{E}(\xi_{k-1}^2 \mathbb{E}[\overbrace{(\mathbb{W}_{t_k} - \mathbb{W}_{t_{k-1}})^2}^{\text{niezależne}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}]) = \sum_k \mathbb{E}\xi_{k-1}^2(t_k - t_{k-1}) = \mathbb{E} \int_0^T X_s^2 ds$$

oraz

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \sum_{j < k} \mathbb{E}(\xi_{k-1}\xi_{j-1} \mathbb{E}[(\mathbb{W}_{t_k} - \mathbb{W}_{t_{k-1}})(\mathbb{W}_{t_j} - \mathbb{W}_{t_{j-1}}) | \mathcal{F}_{t_{k-1}}]) \\ &= 2 \sum_{j < k} \mathbb{E}(\xi_{k-1}\xi_{j-1}(\mathbb{W}_{t_j} - \mathbb{W}_{t_{j-1}}) \mathbb{E}(\mathbb{W}_{t_k} - \mathbb{W}_{t_{k-1}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}})) = 0, \end{aligned}$$

bo $\mathbb{E}(\mathbb{W}_{t_k} - \mathbb{W}_{t_{k-1}}) = 0$.

□

Zdefiniowaliśmy zatem

$$L^2([0, T] \times \Omega, B([0, T]) \otimes F, \lambda \otimes \mathbb{P}) \hookrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{I} M_T^{2,c}$$

Przekształcenie liniowe I jest izometrią, czyli rozszerza się do $\overline{\mathcal{E}}$. Zatem $I : \overline{\mathcal{E}} \rightarrow M_T^{2,c}$ izometria oraz dla $X \in \overline{\mathcal{E}}$ otrzymujemy $I(X)_t \stackrel{\text{ozn.}}{=} \int_0^t X_s d\mathbb{W}_s$ - dobrze określony ciągły martyngał.

Procesy prognozowalne

Pytanie: co to jest $\bar{\mathcal{E}}$, czyli jakie procesy możemy całkować?

Definicja 3.9.

σ ciało zbiorów prognozowalnych $\mathcal{P}$, to σ ciało podzbiorów $[0, T) \times \Omega$ generowane przez zbiory postaci $\{0\} \times A$, $(s, t] \times A$, $s < t < T$, $A \in \mathcal{F}_s$.

Proces $X = (X_t)_{0 \leq t < T}$ jest *prognozowalny*, jeśli traktowany jako funkcja $X : [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalny względem $\mathcal{P}$.

Z definicji natychmiast wynika, że $X_t(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{1}_{(u, v]}(t)$ jest prognozowalny jeśli $A \in \mathcal{F}_u$ oraz $u \leq v < T$

Ponieważ każdą ograniczoną zmienną ξ , $\mathcal{F}_u$ -mierzalną można aproksymować jednostajnie przez $\sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{F}_u$, więc proces $\xi(\omega) \mathbb{1}_{(u, v]}(t)$ jest prognozowalny dla ξ zmiennej $\mathcal{F}_u$ -mierzalnej, ograniczonej. Stąd jest on także prognozowalny dla dowolnej zmiennej ξ nieujemnej $\mathcal{F}_u$ -mierzalnej, a zatem dla dowolnej $\mathcal{F}_u$ -mierzalnej zmiennej ξ .

Zatem dowolny proces $Y \in \mathcal{E}$ jest prognozowalny, czyli

$$\mathcal{E} \subset L^2([0, T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P}),$$

stąd

$$\bar{\mathcal{E}} \subset L^2([0, T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P}),$$

czyli $X \in \bar{\mathcal{E}} \Rightarrow X$ prognozowalne. Zachodzi również odwrotne zawieranie, to znaczy

Fakt 3.10.

$$\bar{\mathcal{E}} = L^2([0, T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P}).$$

Dowód.

Przypadek I: $T < \infty$.

Najpierw pokażemy, że jeśli $\Gamma \in \mathcal{P}$, to $\mathbb{1}_\Gamma \in \bar{\mathcal{E}}$.

Niech $\mathcal{A} := \{\Gamma \in \mathcal{P}, \mathbb{1}_\Gamma \in \bar{\mathcal{E}}\}$ oraz

$$\mathcal{B} := \{\{0\} \times A, A \in \mathcal{F}_0, (u, v] \times A : u < v < T, A \in \mathcal{F}_u\}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{B}$ jest π -układem, ponadto $\Gamma \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathbb{1}_\Gamma \in \mathcal{E} \subset \bar{\mathcal{E}}$, a zatem $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Co więcej $\mathcal{A}$ jest λ -układem dla $T < \infty$, bo

- i) $\Gamma = [0, T) \times \Omega \in \mathcal{A}$, czyli $\mathbb{1}_\Gamma = 1 \in \bar{\mathcal{E}}$, gdyż biorąc ciąg $T_n \nearrow T$, otrzymujemy $\mathcal{E} \ni \mathbb{1}_{\{0\} \times \Omega} + \mathbb{1}_{[0, T_n] \times \Omega} = \mathbb{1}_{[0, T_n] \times \Omega} \xrightarrow{L^2} \mathbb{1}_{[0, T) \times \Omega} \in \bar{\mathcal{E}}$.
- ii) $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{A}$, $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, $\mathbb{1}_{\Gamma_2 \setminus \Gamma_1} = \mathbb{1}_{\Gamma_2} - \mathbb{1}_{\Gamma_1} \in \bar{\mathcal{E}}$ z liniowości $\bar{\mathcal{E}}$, czyli $\Gamma_2 \setminus \Gamma_1 \in \mathcal{A}$.
- iii) $\Gamma_n \in \mathcal{A}$ wstępujący, wówczas $\mathbb{1}_{\bigcup \Gamma_n} = L^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\Gamma_n} \in \bar{\mathcal{E}}$, czyli $\bigcup \Gamma_n \in \mathcal{A}$.

Zatem dla $T < \infty$, z twierdzenia o π - λ systemach $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{P}$.

Dalej, jeśli $\Gamma_i \in \mathcal{P}$, $a_i \in \mathbb{R}$, to $\sum a_i \mathbb{1}_{\Gamma_i} \in \bar{\mathcal{E}}$ (z liniowości). Ponadto funkcje proste $\sum a_i \mathbb{1}_{\Gamma_i}$ są gęste w $L^2([0, T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P})$, czyli $\bar{\mathcal{E}} = L^2([0, T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P})$.

Przypadek II: $T = \infty$.

Niech $X \in L^2([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P})$ oraz $X_t^{(n)}(\omega) := X_t(\omega) \mathbb{1}_{[0, n) \times \Omega}(t, \omega)$. Wówczas $X^{(n)}$ prognozowalne, należące do $L^2([0, n) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P})$, zatem $X^{(n)} \in \bar{\mathcal{E}}$ na mocy przypadku I.

Ponadto $X^{(n)} \rightarrow X$ w $L^2([0, \infty) \times \Omega, \lambda \otimes \mathbb{P})$ (tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej), czyli $X \in \bar{\mathcal{E}}$.

□

$$M \in \mathcal{M}^{2,c}$$

Oznaczenie 3.11.

$$\mathcal{L}_T^2 := L^2([0, T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P})$$

Wniosek 3.12.

$X \in \mathcal{L}_T^2 \Rightarrow I(X) = \int X d\mathbb{W} \in M_T^{2,c}$ jest dobrze zdefiniowanym $cM \in \mathcal{M}^{2,c}$ łągłym martyngałem.

Fakt 3.13.

$X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ proces adaptowany, lewostronnie ciągły $\Rightarrow X$ prognozowalny.

Dowód.

$$\left. \begin{aligned} T < \infty \quad X_t^{(n)} &= X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{2^n-1} X_{\frac{k-1}{2^n}T} \mathbb{1}_{(\frac{k-1}{2^n}T, \frac{k}{2^n}T]} \\ T = \infty \quad X_t^{(n)} &= X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{n2^n} X_{\frac{k-1}{2^n}} \mathbb{1}_{(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \end{aligned} \right\} \text{ prognozowalne}$$

$X_t^{(n)} \rightarrow X_t$ punktowo z lewostronnej ciągłości, a granica ciągu funkcji mierzalnych jest mierzalna.

□

Uwaga 3.14.i) X prognozowalny $\Rightarrow X$ progresywnie mierzalny.ii) X progresywnie mierzalny $\nRightarrow X$ prognozowalny. Można jednak pokazać, że jeśli X progresywnie mierzalny, całkowalny z kwadratem, to istnieje Y prognozowalny taki, że $Y = X \lambda \otimes \mathbb{P}$ p.n. Czyli jeśli X jest progresywnie mierzalny i
$$\mathbb{E} \int_0^T X_s^2 ds < \infty, \text{ to } \int X d\mathbb{W} \text{ ma sens.}$$

$$M \in \mathcal{M}^{2,c}$$

Fakt 3.15.

Jeśli $X \in \mathcal{L}_T^2$, to dla dowolnego $t < T$, $\mathbb{1}_{[0,t]}X \in \mathcal{L}_T^2$ i $\int_0^T \mathbb{1}_{[0,t]}(s)X_s d\mathbb{W}_s = \int_0^t X_s d\mathbb{W}_s$. Ponadto $\mathbb{E}(\int_0^t X d\mathbb{W})^2 = \mathbb{E} \int_0^t X_s^2 ds$.

Dowód.

Oczywiście $(s, \omega) \rightarrow \mathbb{1}_{[0,t]}(s)$ jest prognozowalny, stąd proces $\mathbb{1}_{[0,t]}X M \in \mathcal{M}^{2,c}$ jest prognozowalny jako iloczyn prognozowalnych, zatem $\mathbb{1}_{[0,t]}X \in \mathcal{L}_T^2$.

Jeśli $X \in \mathcal{E}$, $X = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum \xi_k \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}$, to $X \mathbb{1}_{[0,t]} = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum \xi_k \mathbb{1}_{(t_{k-1} \wedge t, t_k \wedge t]}$ $\in \mathcal{E}$ oraz $\int_0^T \mathbb{1}_{[0,t]}(s)X_s d\mathbb{W}_s = \sum \xi_k (\mathbb{W}_{t_k \wedge t} - \mathbb{W}_{t_{k-1} \wedge t}) = \int_0^t X_s d\mathbb{W}_s$.

Dla $X \in \mathcal{L}_T^2$ weźmy $X^{(n)} \in \mathcal{E}$ takie, że $X^{(n)} \rightarrow X$ w $\mathcal{L}_T^2$. Wówczas oczywiście również $X^{(n)} \mathbb{1}_{[0,t]} \rightarrow X \mathbb{1}_{[0,t]}$ w $\mathcal{L}_T^2$. Stąd

$$\int_0^T X_s \mathbb{1}_{[0,t]}(s) d\mathbb{W}_s \leftarrow \int_0^T X_s^{(n)} \mathbb{1}_{[0,t]}(s) d\mathbb{W}_s = \lim \int_0^t X_s^{(n)} d\mathbb{W}_s \rightarrow \int_0^t X_s d\mathbb{W}_s$$

□

Twierdzenie 3.16. (o zatrzymaniu całki stochastycznej)

Niech $X \in \mathcal{L}_T^2$ oraz τ będzie momentem zatrzymania. Wówczas $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X \in \mathcal{L}_T^2$ oraz

$$\forall t \leq T \quad \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) d\mathbb{W}_s = \int_0^{t \wedge \tau} X_s d\mathbb{W}_s. \quad (3.17)$$

Dowód.

Zauważmy, że biorąc $\tau \wedge T$ zamiast T możemy zakładać, że $\tau \leq T$ p.n.

Proces $\mathbb{1}_{[0,\tau]}(t)$ jest lewostronnie ciągły i adaptowalny ($\{\tau \geq t\} = \bigcap_n \{\tau \geq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$) a zatem jest prognozowalny, czyli $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X$ jest prognozowalny (iloczyn funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną). Stąd $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X \in \mathcal{L}_T^2$.

Wzór (3.17) udowodnimy w trzech krokach.

Krok 1. $X \in \mathcal{E}$, τ przyjmuje skończenie wiele wartości.

Ewentualnie powiększając ciąg t_i możemy zakładać, że $X = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}$ oraz τ przyjmuje wartości $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq T$. Mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{[0,\tau]}(t) &= \sum_{k=1}^m \mathbb{1}_{\{\tau=t_k\}} \mathbb{1}_{[0,t_k]}(t) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{1}_{\{\tau=t_k\}} \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t) \right) + \mathbb{1}_{\{\tau=t_m\}} \mathbb{1}_{\{0\}} \\ &= \mathbb{1}_\Omega \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \mathbb{1}_{\{\tau=t_k\}} \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t) \\ &= \mathbb{1}_\Omega \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{1}_{\{\tau > t_j\}} \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t), \end{aligned}$$

zatem

$$\mathbb{1}_{[0,\tau]}(t)X = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j \mathbb{1}_{\{\tau > t_j\}} \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t),$$

czyli $\mathbb{1}_{[0,\tau]}(t)X \in \mathcal{E}$. Liczymy

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s)X_s d\mathbb{W}_s &= \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j \mathbb{1}_{\{\tau > t_j\}} (\mathbb{W}_{t_{j+1} \wedge t} - \mathbb{W}_{t_j \wedge t}) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m-1} \xi_j \mathbb{1}_{\{\tau=t_k\}} (\mathbb{W}_{t_{j+1} \wedge t} - \mathbb{W}_{t_j \wedge t}) \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbb{1}_{\{\tau=t_k\}} \sum_{j=0}^{k-1} \xi_j (\mathbb{W}_{t_{j+1} \wedge t} - \mathbb{W}_{t_j \wedge t}) \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbb{1}_{\tau=t_k} \int_0^{t \wedge t_k} X_s d\mathbb{W}_s = \int_0^{t \wedge \tau} X_s d\mathbb{W}_s. \end{aligned}$$

Krok 2. τ dowolne oraz $X \in \mathcal{E}$.

Weźmy ciąg momentów zatrzymania τ_n przyjmujących skończenie wiele wartości taki, że $\tau_n \searrow \tau$. Na mocy kroku 1, para (τ_n, X) spełnia (3.17). Z ciągłości trajektorii całki stochastycznej, $\int_0^{t \wedge \tau_n} X_s d\mathbb{W}_s \rightarrow \int_0^{t \wedge \tau} X_s d\mathbb{W}_s$ p.n. Mamy

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}(s) X_s d\mathbb{W}_s - \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau]}(s) X_s d\mathbb{W}_s \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{(\tau, \tau_n]}(s) X_s d\mathbb{W}_s \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^t \overbrace{\mathbb{1}_{(\tau, \tau_n]}(s) X_s^2}^{\text{punktowo} \rightarrow 0} ds \xrightarrow{tw. Lebesgue'a} 0. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} & \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X d\mathbb{W} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau]} X d\mathbb{W} \\ & \parallel \\ & \int_0^{t \wedge \tau_n} X d\mathbb{W} \xrightarrow{p.n.} \int_0^{t \wedge \tau} X d\mathbb{W}, \end{aligned}$$

czyli spełnione jest (3.17).

Krok 3. τ oraz $X \in \mathcal{L}_T^2$ dowolne.

Weźmy $X^{(n)} \in \mathcal{E}$ takie, że $X^{(n)} \rightarrow X$ w $\mathcal{L}_T^2$. Z kroku 2, para $(\tau, X^{(n)})$ spełnia (3.17). Mamy

$$\mathbb{E} \left(\int_0^{t \wedge \tau} (X_s - X_s^{(n)}) d\mathbb{W}_s \right)^2 \leq \mathbb{E} \left(\int_0^T (X - X^{(n)}) d\mathbb{W} \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^T (X - X_s^{(n)})^2 ds \rightarrow 0,$$

pierwsza nierówność to *optional sampling* dla podmatryngału $(\int_0^t (X - X^{(n)}) du)^2$.

Ponadto

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau]}(s) (X_s - X_s^{(n)}) d\mathbb{W}_s \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau]}(s) (X_s - X_s^{(n)})^2 ds \\ & \leq \mathbb{E} \int_0^T (X_s - X_s^{(n)})^2 ds \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{array}{ccc} \int_0^{t \wedge \tau} X_s^{(n)} d\mathbb{W}_s & = & \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau]} X_s^{(n)} d\mathbb{W}_s \\ \downarrow L^2(\Omega) & & \downarrow L^2(\Omega) \\ \int_0^{t \wedge \tau} X_s d\mathbb{W}_s & & \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau]} X_s d\mathbb{W}_s, \end{array}$$

czyli (3.17) spełnione jest i w tym przypadku.

□

Wniosek 3.18.

$M := (\int X d\mathbb{W})^2 - \int X^2 ds$ jest martyngałem.

Dla $X \equiv 1$ otrzymujemy znany fakt, że $W_t^2 - t$ jest martyngałem.

Dowód wniosku oparty jest na następującym prostym fakcie.

Fakt 3.19.

Założmy, że M jest adaptowalnym, prawostronnie ciągłym procesem takim, że $M_0 = 0$ i dla wszystkich t , $\mathbb{E}|M_t| < \infty$. Wówczas M jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{E}M_\tau = 0$ dla wszystkich ograniczonych momentów zatrzymania τ .

Dowód.

$\Rightarrow$: Z tw. Dooba $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0 = 0$

$\Leftarrow$: Musimy pokazać, że dla $s < t$, $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ p.n., czyli $\mathbb{E}M_t \mathbb{1}_A = \mathbb{E}M_s \mathbb{1}_A$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}_s$. Określmy

$$\tau := \begin{cases} s & \text{dla } w \in A \\ t & \text{dla } w \notin A. \end{cases}$$

Jak łatwo sprawdzić τ jest momentem zatrzymania, stąd

$$0 = \mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_s \mathbb{1}_A + \mathbb{E}M_t \mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{E}M_s \mathbb{1}_A - \mathbb{E}M_t \mathbb{1}_A,$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że

$$\mathbb{E}M_t \mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{E}M_t - \mathbb{E}M_t \mathbb{1}_A = 0 - \mathbb{E}M_t \mathbb{1}_A.$$

□

Dowód wniosku.

Jak wiemy $\int X d\mathbb{W} \in M_T^{2,c}$, czyli M jest ciągły, adaptowalny i całkowalny oraz $M_0 = 0$. Dla ograniczonego momentu zatrzymania $\tau \leq T$ otrzymujemy na mocy twierdzenia o zatrzymaniu całki stochastycznej

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^\tau X d\mathbb{W} \right)^2 &= \mathbb{E} \left(\int_0^T \mathbb{1}_{[0,\tau]} X d\mathbb{W} \right)^2 \stackrel{\text{izom. z } L_T^2 \text{ w } M_T^{2,c}}{=} \mathbb{E} \int_0^T \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) X_s^2 ds \\ &= \mathbb{E} \int_0^\tau X_s^2 ds. \end{aligned}$$

Zatem

$$\mathbb{E} M_\tau = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X d\mathbb{W} \right)^2 - \int_0^T X_s^2 ds \right] = 0.$$

□

Uogólnienie definicji całki stochastycznej

Definicja 3.20.

Λ_T^2 - procesy $(X_t)_{t < T}$ prognozowalne takie, że $\forall_{t < T} \int_0^t X_s^2 ds < \infty$ p.n.

Zatem proces prognozowalny $X \in \Lambda_T^2 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\forall_{t < T} \int_0^t X_s^2 ds < \infty) = 1$. Λ_T^2 jest przestrzenią liniową, ale nie Hilberta. Na Λ_T^2 można wprowadzić metrykę przestrzeni Frecheta generowaną przez ciąg metryk euklidesowych.

Oznaczenie 3.21.

Jeśli $X = (X_t)_{t \in I}$ jest procesem stochastycznym, a τ momentem zatrzymania, to $X^\tau = (X_t^\tau)_{t \in I}$ jest procesem zdefiniowanym wzorem

$$X_t^\tau := X_{t \wedge \tau}.$$

Lemat 3.22.

Dla $X \in \Lambda_T^2$ określmy

$$\tau_n := \inf \left\{ t : \int_0^t X_s^2 ds \geq n \right\} \wedge T \quad n = 1, 2, \dots$$

Wówczas (τ_n) jest rosnącym ciągiem momentów zatrzymania, $\tau_n \nearrow T$ p.n. Ponadto dla wszystkich n , $\mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X \in \mathcal{L}_T^2$.

Dowód.

τ_n jest momentem zatrzymania jako moment dojścia przez adaptowalny proces ciągły $\int_0^t X_s^2 ds$ do zbioru domkniętego $[n, \infty)$. Z założenia o skończoności $\int X_s^2 ds$ wynika, że $\tau_n \nearrow T$ p.n.

Proces $\mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X$ jest prognozowalny jako iloczyn procesów prognozowalnych, ponadto

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}(s) X_s^{(n)} ds \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^{\tau_n} X_s^2 ds \leq n < \infty.$$

□

Założmy, że mamy dany ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ p.n. taki, że $\mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X \in \mathcal{L}_T^2$ dla wszystkich n . Niech $M_n(t) := \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X d\mathbb{W}$.

Lemat 3.23.

Jeśli $m \geq n$, to $M_m(t) = M_n(t)$ dla $t \leq \tau_n$. Procesy $M_m^{\tau_n}$ i M_n są nierozróżnialne, czyli $\mathbb{P}(\forall_t M_m(t \wedge \tau_n) = M_n(t)) = 1$.

Dowód.

Na mocy twierdzenia o zatrzymaniu całki stochastycznej,

$$M_m(\tau_n \wedge t) = \int_0^{\tau_n \wedge t} \mathbb{1}_{[0, \tau_m]} X d\mathbb{W} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \mathbb{1}_{[0, \tau_m]} X d\mathbb{W} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X d\mathbb{W} = M_n(t).$$

Druga część lematu wynika z ciągłości.

□

Definicja 3.24.

Całką stochastyczną $\int X d\mathbb{W}$ dla $X \in \Lambda_T^2$ oznaczamy taki (dokładnie jeden modulo nierozróżnialne) proces $(M_t) = (\int_0^t X d\mathbb{W})_{t < T}$, że $M_t^{\tau_n} = \int_0^{t \wedge \tau_n} X d\mathbb{W} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X d\mathbb{W}$ dla $n = 1, 2, \dots$ (wcześniejsza izometryczna definicja całki stochastycznej).

Fakt 3.25.

Ta definicja jest poprawna, jednoznaczna, a proces M jest ciągły.

Dowód.

Na mocy Lematu 3.23 dla każdego $m > n$ istnieje zbiór $N_{n,m}$ taki, że $\mathbb{P}(N_{n,m}) = 0$ oraz dla $\omega \notin N_{n,m}$ zachodzi $M_n(t, \omega) = M_m(t \wedge \tau_n(\omega), \omega)$ dla wszystkich $t < T$. Niech $N := \bigcup_{m > n} N_{n,m}$, wówczas $\mathbb{P}(N) = 0$ oraz dla $\omega \notin N$, $t \leq \tau_n(\omega)$ ciąg $(M_m(t, \omega))_{m \geq n}$ jest stały. Zatem możemy (i musimy) położyć $M(t, \omega) := M_n(t, \omega)$ dla $t \leq \tau_n(\omega)$.

□

Fakt 3.26.

Definicja $\int X d\mathbb{W}$ nie zależy od wyboru τ_n dla $X \in \Lambda_T^2$. Dokładniej, jeśli $\tau_n, \bar{\tau}_n$ - momenty zatrzymania, $\tau_n \nearrow T, \bar{\tau}_n \nearrow T$, $\mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X \in \mathcal{L}_T^2$ i $\mathbb{1}_{[0, \bar{\tau}_n]} X \in \mathcal{L}_T^2$ oraz $M, \bar{M}$ zdefiniowane za pomocą $\tau_n, \bar{\tau}_n$ odpowiednio, to procesy M i $\bar{M}$ są nierozróżnialne.

Dowód.

Mamy

$$M_{t \wedge \tau_n} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X d\mathbb{W}, \quad \bar{M}_{t \wedge \bar{\tau}_n} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \bar{\tau}_n]} X d\mathbb{W}.$$

Na mocy twierdzenia o zatrzymaniu całki stochastycznej,

$$M_{t \wedge \tau_n \wedge \bar{\tau}_n} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \mathbb{1}_{[0, \bar{\tau}_n]} X d\mathbb{W} = \bar{M}_{t \wedge \tau_n \wedge \bar{\tau}_n}.$$

Ponadto $\tau_n, \bar{\tau}_n \nearrow T$ więc $t \wedge \tau_n \wedge \bar{\tau}_n = t$ dla $n \geq n(\omega)$ i stąd $M_t = \bar{M}_t$ p.n., a że są to procesy ciągłe, to są nierozróżnialne.

□

Definicja 3.27.

Jeżeli dla procesu adaptowalnego $M = (M_t)_{t < T}$, istnieje ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ taki, że M^{τ_n} jest martyngałem, to M nazywamy *martyngałem lokalnym*. Jeśli dodatkowo $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, to mówimy, że M jest *ciągłym martyngałem lokalnym całkownym z kwadratem*. Klasę takich procesów oznaczamy $\mathcal{M}_{T,loc}^{2,c}$ ($\mathcal{M}_{loc}^{2,c}$ jeśli wartość T jest jasna z kontekstu).

Fakt 3.28.

Założmy, że $M = \int X d\mathbb{W}$ dla $X \in \Lambda_T^2$. Wówczas

- i) M jest procesem ciągłym, $M_0 = 0$;
- ii) $M \in \mathcal{M}_{T,loc}^{2,c}$;
- iii) Przekształcenie $X \rightarrow \int X d\mathbb{W}$ jest liniowe.

Dowód.

Punkty i), ii) wynikają z definicji. By udowodnić iii) weźmy $X, Y \in \Lambda_T^2$. Istnieją wówczas momenty zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ i $\bar{\tau}_n \nearrow T$ takie, że $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}_T^2$ oraz $\mathbb{1}_{[0,\bar{\tau}_n]}Y \in \mathcal{L}_T^2$. Przyjmując $\sigma_n := \bar{\tau}_n \wedge \tau_n \nearrow T$ otrzymujemy $\mathbb{1}_{[0,\sigma_n]}X, \mathbb{1}_{[0,\sigma_n]}Y \in \mathcal{L}_T^2$, a zatem $\mathbb{1}_{[0,\sigma_n]}(aX + bY) \in \mathcal{L}_T^2$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$. Stąd na mocy definicji otrzymujemy, że $\int_0^{t \wedge \sigma_n} (aX + bY) d\mathbb{W} = a \int_0^{t \wedge \sigma_n} X d\mathbb{W} + b \int_0^{t \wedge \sigma_n} Y d\mathbb{W}$ i biorąc granicę $n \rightarrow \infty$ $\int (aX + bY) d\mathbb{W} = a \int X d\mathbb{W} + b \int Y d\mathbb{W}$.

□

Fakt 3.29. (uogólnienie twierdzenia o zatrzymaniu całki stochastycznej)

Jeśli $X \in \Lambda_T^2$, to dla dowolnego momentu zatrzymania τ , $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X \in \Lambda_T^2$ oraz

$$\int_0^{t \wedge \tau} X d\mathbb{W} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}X d\mathbb{W}$$

Dowód.

Proces $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X$ jest prognozowalny jako iloczyn procesów prognozowalnych, stąd $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X \in \Lambda_T^2$. Proces $X \in \Lambda_T^2$, więc istnieje ciąg $\tau_n \nearrow T$ taki, że $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}_T^2$. Wtedy też $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}\mathbb{1}_{[0,\tau]}X \in \mathcal{L}_T^2$. Niech

$$M := \int X d\mathbb{W} \quad M^{(\tau)} := \int \mathbb{1}_{[0,\tau]}X d\mathbb{W}.$$

Na mocy definicji,

$$M_{t \wedge \tau_n} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X d\mathbb{W}, \quad M_{t \wedge \tau_n}^{(\tau)} = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}\mathbb{1}_{[0,\tau]}X d\mathbb{W}.$$

Z udowodnionego wcześniej twierdzenia o zatrzymaniu całki izometrycznej,

$$M_{t \wedge \tau \wedge \tau_n} = \int_0^T \mathbb{1}_{[0,\tau]}\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X d\mathbb{W} = M_{t \wedge \tau_n}^{(\tau)}.$$

Biorąc $n \rightarrow \infty$ dostajemy $M_t^\tau = M_{t \wedge \tau} = M_t^{(\tau)}$ czyli $M^\tau = M^{(\tau)}$.

□

Twierdzenie 3.30. (Nierówność Dooba)

Dla dowolnego procesu $X \in \Lambda_2^T$ oraz momentu zatrzymania $\tau \leq T$,

$$\mathbb{E} \sup_{t < \tau} \left(\int_0^t X d\mathbb{W} \right)^2 \leq 4\mathbb{E} \int_0^\tau X_s^2 ds (\leq \infty).$$

Dowód.

Weźmy $\tau_n \nearrow T$ takie, że $\mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X \in \mathcal{L}_T^2$. Mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{t < \tau} \left(\int_0^{t \wedge \tau_n} X d\mathbb{W} \right)^2 &= \mathbb{E} \sup_{t < \tau} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X d\mathbb{W} \right)^2 = \mathbb{E} \sup_{t < T} \left(\int_0^{t \wedge \tau} \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X d\mathbb{W} \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \sup_{t \leq T} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau]} \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X d\mathbb{W} \right)^2 \end{aligned}$$

($\mathbb{1}_{[0, T]} \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X \in M_T^{2, c}$, więc $t < T$ można zamienić na $t \leq T$). Na mocy nierówności Dooba dla martynałów,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{t \leq T} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0, T]} \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X d\mathbb{W} \right)^2 &\leq 4\mathbb{E} \left(\int_0^T \mathbb{1}_{[0, \tau]} \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X d\mathbb{W} \right)^2 \\ &= 4\mathbb{E} \int_0^T (\mathbb{1}_{[0, T]} \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} X_s)^2 ds = 4\mathbb{E} \int_0^{\tau \wedge \tau_n} X_s^2 ds \leq 4\mathbb{E} \int_0^\tau X_s^2 ds \end{aligned}$$

Wykazaliśmy zatem, że

$$\mathbb{E} \sup_{t < \tau} \left(\int_0^{t \wedge \tau_n} X d\mathbb{W} \right)^2 \leq 4\mathbb{E} \int_0^\tau X_s^2 ds$$

Ponieważ

$$\sup_{t < \tau} \left(\int_0^{t \wedge \tau_n} X d\mathbb{W} \right)^2 = \sup_{t < \tau \wedge \tau_n} \left(\int_0^t X d\mathbb{W} \right)^2 \nearrow \sup_{t < \tau} \left(\int_0^t X d\mathbb{W} \right)^2,$$

więc teza wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej.

□

Uwaga 3.31.

$M = \int X d\mathbb{W}$ dla $X \in \Lambda_T^2$ nie musi być martynałem, nawet nie musi być $M_t \in L^1$. Ale jeśli $\forall_{t < T} \mathbb{E} \int_0^t X_s^2 ds < \infty$ to M jest martynałem, bo za τ_n możemy wziąć $\tau_n = t_n$, gdzie t_n jest ciągiem rosnącym zbieżnym do T , $M_{t \wedge \tau_n} = M_{t \wedge t_n} \in M_T^{2, c}$.

4 Całka względem ciągłych martyngałów

Oznaczenie 4.1.

$\mathcal{M}_T^{2,c}$ ciągłe martyngały takie, że $\sup_{t \leq T} \mathbb{E} M_t^2 < \infty$. $\mathcal{M}^{2,c}$ to są martyngały ciągłe takie, że $M_t^2 < \infty \forall t \leq T$ (jest to oczywiście szersza klasa).

Uogólnimy definicję $\int X d\mathbb{W}$ na $\int X dM$ dla $M \in \mathcal{M}^{2,c}$.

Twierdzenie 4.2. (rozkład Dooba-Meyera)

Dla $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ istnieje proces $\langle M \rangle$ o trajektoriach ciągłych, niemalejących, przyjmujący 0 w zerze taki, że $M^2 - \langle M \rangle$ jest martyngałem. Co więcej proces $\langle M \rangle$ jest wyznaczony jednoznacznie.

Dowód.

Pokażemy tylko jednoznaczność rozkładu. Załóżmy, że $M_t^2 - Y_t$ i $M_t^2 - Z_t$ dwa martyngały o ciągłych trajektoriach oraz Y_t, Z_t niemalejące, ciągłe. Trajektorie procesu $Y_t - Z_t$ mają wahanie skończone p.n., ponadto $Y_t - Z_t = (M_t^2 - Z_t) - (M_t^2 - Y_t)$ jest martyngałem ciągłym. Stąd (na podstawie zadania z * z ćwiczeń) $Y - Z \equiv 0$.

□

Przykład 4.3.

Dla procesu Wienera $\langle \mathbb{W} \rangle_t = t$. Ogólniej, pokazaliśmy, że $\langle \int X_s d\mathbb{W}_s \rangle_t = \int_0^t X_s^2 ds$ dla $X \in \mathcal{L}_T^2$.

Ponieważ dla wszystkich ω , $t \rightarrow \langle M \rangle_t(\omega)$ jest niemalejące, zatem ma wahanie skończone, czyli można określić miarę $d\langle M \rangle_t(\omega)$. Następną definicją jest naturalnym uogólnieniem definicji dla procesu Wienera.

Definicja 4.4.

Dla $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ określamy

$$\mathcal{L}_T^2(M) = \{X = (X_t)_{t \leq T} \text{ - prognozowalne takie, że } \mathbb{E} \int_0^T d\langle M \rangle_s < \infty\}.$$

$\mathcal{E}$ oznacza jak wcześniej klasę procesów elementarnych. Weźmy

$$\mathcal{E} \ni X = \xi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^n \xi_k \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}]},$$

gdzie $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{m+1} < T$, ξ_k - $\mathcal{F}_{t_k}$ mierzalne, ograniczone. Kładziemy

$$\int_0^t X dM := \sum_{k=1}^m \xi_k (M_{t_{k+1} \wedge t} - M_{t_k \wedge t}).$$

Fakt 4.5.

Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ oraz $X \in \mathcal{E}$. Wówczas $I(X) := \int X dM \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, $I(X)_0 = 0$ oraz

$$\|I(X)\|_T^2 = \mathbb{E} \left(\int_0^T X_s dM_s \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^T X_s^2 d\langle M \rangle_s = \|X\|_{\mathcal{L}_T^2(M)}^2.$$

Dowód.

Ciągłość $I(X)$, warunek $I(X)_0 = 0$ oraz to, że $I(X)_t \in L^2$ dla wszystkich t są oczywiste. Dla $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ mamy

$$I(X)_t = \xi_1(M_{t_2} - M_{t_1}) + \xi_2(M_{t_3} - M_{t_2}) + \dots + \xi_j(M_t - M_{t_{j+1}}).$$

Dla $t_j \leq t \leq s \leq t_{j+1}$ otrzymujemy zatem

$$\mathbb{E}(I(X)_s | \mathcal{F}_t) - I(X)_t = \mathbb{E}(\xi_j(M_s - M_t) | \mathcal{F}_t) = \xi_j(\mathbb{E}(M_s | \mathcal{F}_t) - M_t) = 0,$$

czyli $I(X)$ jest martyngałem. Ponadto

$$\mathbb{E}I(X)_T^2 = \sum_{k=1}^m \mathbb{E}[\xi_k^2(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2] + 2 \sum_{j < k} \mathbb{E}[\xi_{k-1}\xi_{j-1}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})] = \text{II} + \text{III}$$

Zauważmy, że dla $s < t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(M_t^2 - \langle M \rangle_t | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(\langle M \rangle_t | \mathcal{F}_s) - 2M_s \mathbb{E}(M_s | \mathcal{F}_s) + M_s^2 \\ &= M_s^2 - \langle M \rangle_s + \mathbb{E}(\langle M \rangle_t | \mathcal{F}_s) - M_s^2 = \mathbb{E}(\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s | \mathcal{F}_s) \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \text{II} &= \sum \mathbb{E}\xi_k^2 \mathbb{E}[(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 | \mathcal{F}_{t_k}] = \sum \mathbb{E}\xi_k^2 \mathbb{E}(\langle M \rangle_{t_{k+1}} - \langle M \rangle_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k}) = \\ &= \mathbb{E}\xi_k^2 (\langle M \rangle_{t_{k+1}} - \langle M \rangle_{t_k}) = \mathbb{E} \sum \int_{t_k}^{t_{k+1}} \xi_k^2 d\langle M \rangle_s = \mathbb{E} \int_0^T X_s^2 d\langle M \rangle_s. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\text{III} = 2 \sum_{j < k} \mathbb{E}[\xi_{k-1}\xi_{j-1}(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})\mathbb{E}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}})] = 0.$$

□

Tak jak dla procesu Wienera dowodzimy, że domknięcie $\mathcal{E}$ w przestrzeni $L^2([0, T] \times \Omega, d\langle M \rangle \otimes \mathbb{P})$ jest równe $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{L}_T^2(M)$. Izometrię $I(X)$ możemy przedłużyć do $\bar{\mathcal{E}}$, w ten sposób otrzymujemy izometryczną definicję całki $I(X) = \int X dM$ dla $X \in \mathcal{L}_T^2(M)$.

Podobnie jak dla $\int X dW$, izometryczną całkę stochastyczną $\int X dM$ rozszerzamy następnie do X należących do przestrzeni

$$\Lambda_T^2(M) = \{X \text{ prognozowalne} : \forall_{t < T} \int_0^t X^2 d\langle M \rangle_s < \infty \text{ p.n.} \}$$

Zajmiemy się teraz interpretacją procesu $\langle M \rangle$. Zaczniemy od udowodnienia dwóch faktów, które wykorzystamy później.

Lemat 4.6.

Niech ξ_n zmienne losowe oraz $A_k \in \mathcal{F}$ takie, że $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ i $\mathbb{P}(\bigcup A_n) = 1$. Załóżmy, że dla wszystkich k , zmienne $\xi_n \mathbb{1}_{A_k}$ zbiegają według prawdopodobieństwa (przy $n \rightarrow \infty$) do zmiennej η_k . Wówczas ξ_n zbiega według prawdopodobieństwa do zmiennej η takiej, że $\eta \mathbb{1}_{A_k} = \eta_k$ p.n. dla $k = 1, 2, \dots$

Dowód.

Dla $k \leq l$ mamy $\eta_l \mathbb{1}_{A_k} = \eta_k$ p.n., gdyż pewien podciąg $\xi_{n_s} \mathbb{1}_{A_l} \rightarrow \eta_l$ p.n., a zatem $\xi_{n_s} \mathbb{1}_{A_l} = \xi_{n_s} \mathbb{1}_{A_l} \mathbb{1}_{A_k} \rightarrow \eta_l \mathbb{1}_{A_k}$ p.n. (czyli również wg $\mathbb{P}$). Stąd istnieje zmienna losowa η taka, że $\eta \mathbb{1}_{A_k} = \eta_k$ p.n.

Szacujemy dla odpowiednio dużego n ,

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(A_k^c) + \mathbb{P}(|\xi_n \mathbb{1}_{A_k} - \eta \mathbb{1}_{A_k}| \geq \varepsilon),$$

gdyż $\mathbb{P}(A_k^c) \leq \varepsilon/2$ dla dużego k oraz przy ustalonym k , $\mathbb{P}(|\xi_n \mathbb{1}_{A_k} - \eta_k| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon/2$ dla dużych n .

□

Kolejny lemat pokazuje, że przy pewnych prostych założeniach można ze zbieżności według prawdopodobieństwa wyprowadzić zbieżność w L^1 .

Lemat 4.7.

Załóżmy, że $\xi_n \geq 0$, $\xi_n \rightarrow \xi$ według $\mathbb{P}$ oraz dla wszystkich n , $\mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi < \infty$. Wówczas $\xi_n \rightarrow \xi$ w L^1 .

Dowód.

Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\xi - \xi_n| &= \mathbb{E}(|\xi - \xi_n| - (\xi - \xi_n)) = 2\mathbb{E}(\xi - \xi_n)\mathbb{1}_{\{\xi \geq \xi_n\}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\mathbb{E}(\xi - \xi_n)\mathbb{1}_{\{\xi \geq \xi_n + \frac{\varepsilon}{4}\}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\mathbb{E}\xi\mathbb{1}_{\{\xi \geq \xi_n + \frac{\varepsilon}{4}\}}.\end{aligned}$$

Na mocy zbieżności według prawdopodobieństwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi \geq \xi_n + \varepsilon/4) = 0$. Ponadto $\mathbb{E}|\xi| = \mathbb{E}\xi < \infty$, zatem $\{\xi\}$ jest jednostajnie całkowalna, czyli $|\mathbb{E}\xi\mathbb{1}_A| \leq \varepsilon/2$ dla odpowiednio małego $\mathbb{P}(A)$. Stąd $\mathbb{E}\xi\mathbb{1}_{\{\xi \geq \xi_n + \varepsilon/4\}} \leq \varepsilon/2$ dla dużych n , a więc $\mathbb{E}|\xi - \xi_n| \leq \varepsilon$.

□

Niech $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ podział $[0, t]$ taki, że $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t$. Definiujemy wówczas

$$V_\Pi(M, t) := \sum_{i=1}^k (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2.$$

Możemy teraz sformułować twierdzenie pokazujące, iż $\langle M \rangle_t$ jest granicą $V_\Pi(M, t)$, dlatego też $\langle M \rangle$ nazywa się często *kwadratową wariacją* M .

Twierdzenie 4.8.

Założmy, że $M \in M^{2,c}$, $t < T$ oraz Π_n jest ciągiem podziałów $[0, t]$ takim, że $\text{diam}(\Pi_n) \rightarrow 0$. Wówczas $V_{\Pi_n}(M, t) \rightarrow \langle M \rangle_t$ w $L^1(\Omega, F)$.