

Procesy Stochastyczne I, część druga

wersja 18 maja 2003

8 Procesy Markowa - podstawowe fakty i definicje

W tym i następnych rozdziałach jak zwykle $T \subset \mathbb{R}$, $(E, \mathcal{E})$ zaś jest przestrzenią mierzalną taką, że wszystkie zbiory jednoelementowe są mierzalne tzn. $\{x\} \in \mathcal{E}$ dla wszystkich $x \in E$.

Definicja 8.1 *Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \in T}$ jest procesem stochastycznym. Określamy następujące σ -ciała*

$$\mathcal{F}_{\geq t}^X := \sigma(X_s : s \geq t, s \in T), \quad \mathcal{F}_{\leq t}^X := \sigma(X_s : s \leq t, s \in T),$$

$$\mathcal{F}_{=t}^X := \sigma(X_t) \text{ oraz } \mathcal{F}_{[s,t]}^X := \sigma(X_u : s \leq u \leq t, u \in T).$$

Jeśli określenie procesu X wynika z kontekstu, będziemy pomijać górny indeks pisząc np. $\mathcal{F}_{\geq t}$ zamiast $\mathcal{F}_{\geq t}^X$.

Definicja 8.2 *Proces stochastyczny $(X_t)_{t \in T}$ o wartościach w $(E, \mathcal{E})$ nazywamy procesem Markowa, jeśli dla dowolnych $t \in T$, $A \in \mathcal{F}_{\geq t}^X$ i $B \in \mathcal{F}_{\leq t}^X$ zachodzi*

$$\mathbf{P}(A \cap B | \mathcal{F}_{=t}^X) = \mathbf{P}(A | \mathcal{F}_{=t}^X) \mathbf{P}(B | \mathcal{F}_{=t}^X).$$

Uwaga 8.1 Przypomnijmy, że $\mathbf{P}(A | \mathcal{F}) := \mathbf{E}(I_A | \mathcal{F})$, w szczególności $\mathbf{P}(A | \mathcal{F})$ jest zmienną losową $\mathcal{F}$ mierzalną przyjmującą p.n. wartości ze zbioru $[0, 1]$.

Uwaga 8.2 Z definicji wynika natychmiast, że proces $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa wtedy i tylko wtedy gdy proces $(X_{-t})_{t \in T}$ jest procesem Markowa.

Fakt 8.1 *Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie procesem stochastycznym, wówczas następujące warunki są równoważne*

- a) X jest procesem Markowa
- b) $\forall t \in T \quad \forall A \in \mathcal{F}_{\geq t}^X \quad \mathbf{P}(A | \mathcal{F}_{\leq t}^X) = \mathbf{P}(A | \mathcal{F}_{=t}^X) \text{ p.n.}$
- c) $\forall t \in T \quad \forall B \in \mathcal{F}_{\leq t}^X \quad \mathbf{P}(B | \mathcal{F}_{\geq t}^X) = \mathbf{P}(B | \mathcal{F}_{=t}^X) \text{ p.n.}$

Dowód. a) $\Rightarrow$ b): Niech $A \in \mathcal{F}_{\geq t}^X$ i $B \in \mathcal{F}_{\leq t}^X$, wtedy

$$\begin{aligned} \mathbf{E} I_A I_B &= \mathbf{E} \mathbf{E}(I_{A \cap B} | \mathcal{F}_{=t}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(I_A | \mathcal{F}_{=t}) \mathbf{E}(I_B | \mathcal{F}_{=t})) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(I_B \mathbf{E}(I_A | \mathcal{F}_{=t}) | \mathcal{F}_{=t})) = \mathbf{E}(I_B \mathbf{E}(I_A | \mathcal{F}_{=t})). \end{aligned}$$

Zmienna $\mathbf{E}(I_A | \mathcal{F}_{=t})$ jest $\mathcal{F}_{=t}^-$, a więc również $\mathcal{F}_{\leq t}$ -mierzalna, zatem powyższa równość (na mocy dowolności $B \in \mathcal{F}_{\leq t}^X$) implikuje, że

$$\mathbf{E}(I_A | \mathcal{F}_{\leq t}) = \mathbf{E}(I_A | \mathcal{F}_{=t}) \text{ p.n.}$$

b) $\Rightarrow$ a) Niech $C \in \mathcal{F}_{=t}$, wówczas

$$\begin{aligned} \mathbf{E}I_{A \cap B}I_C &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(I_{B \cap C}I_A|\mathcal{F}_{\leq t})) = \mathbf{E}(I_{B \cap C}\mathbf{E}(I_A|\mathcal{F}_{\leq t})) \\ &= \mathbf{E}(I_{B \cap C}\mathbf{E}(I_A|\mathcal{F}_{=t})) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(I_{B \cap C}\mathbf{E}(I_A|\mathcal{F}_{=t})|\mathcal{F}_{=t})) = \mathbf{E}(I_C\mathbf{E}(I_A|\mathcal{F}_{=t})\mathbf{E}(I_B|\mathcal{F}_{=t})). \end{aligned}$$

Zmienna $\mathbf{E}(I_A|\mathcal{F}_{=t})\mathbf{E}(I_B|\mathcal{F}_{=t})$ jest $\mathcal{F}_{=t}$ mierzalna, więc powyższa równość (na mocy dowolności $C \in \mathcal{F}_{=t}^X$) implikuje, że

$$\mathbf{E}(I_{A \cap B}|\mathcal{F}_{=t}) = \mathbf{E}(I_A|\mathcal{F}_{=t})\mathbf{E}(I_B|\mathcal{F}_{=t}) \text{ p.n..}$$

Równoważności warunków a) i c) dowodzimy w taki sam sposób. $\square$

Uwaga 8.3 Proces $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa wtedy i tylko wtedy gdy dla wszystkich $s_1, \dots, s_n, t, t_1, \dots, t_m \in T$ takich, że $s_1 \leq \dots \leq s_n \leq t \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$ oraz zbiorów $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m, \Delta_1, \dots, \Delta_n \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_m} \in \Gamma_m, X_{s_1} \in \Delta_1, \dots, X_{s_n} \in \Delta_n | X_t) \\ = \mathbf{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_m} \in \Gamma_m | X_t) \mathbf{P}(X_{s_1} \in \Delta_1, \dots, X_{s_n} \in \Delta_n | X_t) \text{ p.n..} \end{aligned}$$

Implikacja $\Rightarrow$ jest oczywista, a idea dowodu $\Leftarrow$ polega na tym, że rodzina zbiorów postaci $\{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_m} \in \Gamma_m\}$, $t \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m \in \mathcal{E}$ jest π -systemem generującym $\mathcal{F}_{\geq t}^X$.

Terminologia

Założmy, że $X = (X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa

- Jeśli $T \subset \mathbb{Z}$, to X nazywamy *łańcuchem Markowa*;
- Jeśli $T \subset \mathbb{Z}$ oraz E jest zbiorem conajwyżej przeliczalnym, to X nazywamy *dyskretnym łańcuchem Markowa*;
- Jeśli T jest przedziałem (najczęściej $[0, \infty)$), a E jest zbiorem conajwyżej przeliczalnym, to X nazywamy *łańcuchem Markowa z czasem ciągłym*.

W przypadku dyskretnych łańcuchów Markowa definiujemy macierze przejścia. Jaki jest ich odpowiednik dla procesów Markowa?

Definicja 8.3 Rodzinę funkcji $(P_{s,t}(x, \Gamma))_{s,t \in T, s \leq t, x \in E, \Gamma \in \mathcal{E}}$ nazywamy funkcją przejścia (funkcją prawdopodobieństwa przejścia, jądrem przejścia) jeśli zachodzą następujące trzy własności

- $\forall s, t \in T, s \leq t \forall x \in E$ $P_{s,t}(x, \cdot)$ jest miarą probabilistyczną na $(E, \mathcal{E})$;
- $\forall s, t \in T, s \leq t \forall \Gamma \in \mathcal{E}$ $x \mapsto P_{s,t}(x, \Gamma)$ jest funkcją mierzalną z $(E, \mathcal{E})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
- $\forall s \forall x \in E, \Gamma \in \mathcal{E}$ $P_{s,s}(x, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$.

Definicja 8.4 Jeśli $(P_{s,t}(\cdot, \cdot))$ jest funkcją przejścia, to mówimy, że $(P_{s,t})$ jest funkcją przejścia dla procesu Markowa $X = (X_t)$, jeśli

$$\forall s \leq t, s, t \in T \forall \Gamma \in \mathcal{E} \quad \mathbf{P}(X_t \in \Gamma | X_s) = P_{s,t}(X_s, \Gamma) \text{ p.n.}$$

Uwaga 8.4 Nieco nieformalnie można powyższą definicję zapisać jako

$$P_{s,t}(x, \Gamma) = \mathbf{P}(X_t \in \Gamma | X_s = x).$$

Przykład 1

Załóżmy, że E jest zbiorem przeliczalnym, wówczas w myśl naszych założeń $\mathcal{E}$ to wszystkie podzbiory E . Funkcja przejścia w tym przypadku jest wyznaczona przez *macierz przejścia* $P^{s,t}(x, y) = (p_{s,t}(x, y))_{x,y \in E}$, gdzie $p_{s,t}(x, y) := P_{s,t}(x, \{y\})$. Wtedy dla dowolnego $\Gamma \subset E$ mamy $P_{s,t}(x, \Gamma) = \sum_{y \in \Gamma} P_{s,t}(x, \{y\}) = \sum_{y \in \Gamma} p_{s,t}(x, y)$.

Macierz przejścia musi spełniać następujące dwa warunki:

- a) $\forall_{s \leq t} \forall_{x \in E} \sum_{y \in E} p_{s,t}(x, y) = 1$ oraz $\forall_{x,y \in E} p_{s,t}(x, y) \geq 0$ czyli $P^{s,t}$ jest macierzą stochastyczną;
- b) $P^{s,s} = \text{Id}$ czyli $p_{s,s}(x, y) = \delta_x(y)$.

Przykład 2

Załóżmy, że $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (lub $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$) Mówimy, że rodzina funkcji $(p_{s,t}(x, y))_{x,y \in E, s < t, s, t \in T}$ jest *gęstością przejścia* jeśli

$$\forall_{s < t, s, t \in T} \forall_{x \in E, \Gamma \in \mathcal{E}} P_{s,t}(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} p_{s,t}(x, y) dy.$$

Gęstość przejścia musi spełniać następujące dwa warunki:

- a) $\forall_{s < t} \forall_{x,y \in E} p_{s,t}(x, y) \geq 0, \int_E p_{s,t}(x, y) dy = 1$
- b) $\forall_{s < t} (x, y) \mapsto p_{s,t}(x, y)$ jest funkcją mierzalną z $(E \times E, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Proces Wienera jest procesem Markowa z gęstością przejścia

$$p_{s,t}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right).$$

Fakt 8.2 Załóżmy, że $(P_{s,t}(\cdot, \cdot))$ jest funkcją przejścia. Wówczas $X = (X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall_{s \leq t} \forall_{\Gamma \in \mathcal{E}} \mathbf{P}(X_t \in \Gamma | \mathcal{F}_{\leq s}^X) = P_{s,t}(X_s, \Gamma) \text{ p.n..} \quad (1)$$

Dowód. $\Rightarrow$: Na podstawie własności Markowa mamy

$$\mathbf{P}(X_t \in \Gamma | \mathcal{F}_{\leq s}^X) = \mathbf{P}(X_t \in \Gamma | X_s) = P_{s,t}(X_s, \Gamma) \text{ p.n.}$$

Zanim przejdziemy do dowodu przeciwnej implikacji sformułujemy lemat

Lemat 8.3 Jeśli zachodzi (1), to dla dowolnych indeksów $s = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ oraz funkcji mierzalnych $f_1, \dots, f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi

$$\mathbf{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) | \mathcal{F}_{\leq s}^X) = \varphi(X_s) \text{ p.n.,}$$

gdzie

$$\varphi(y_0) := \int_E \cdots \int_E f_1(y_1) \cdots f_n(y_n) P_{t_{n-1}, t_n}(y_{n-1}, dy_n) \cdots P_{t_0, t_1}(y_0, dy_1).$$

$\Leftarrow$: Zbiory $A \in \mathcal{F}_{\geq s}^X$ takie, że $\mathbf{P}(A|\mathcal{F}_{\leq s}^X) = \mathbf{P}(A|\mathcal{F}_{=s}^X)$ p.n. tworzą λ -system. Ponieważ σ -ciało $\mathcal{F}_{\geq s}^X$ jest generowane przez π -system zbiorów postaci $\{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}$, gdzie $t \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ oraz $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}$, wystarczy wykazać, że

$$\mathbf{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n | \mathcal{F}_{\leq s}) = \mathbf{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n | X_s) \text{ p.n.}$$

Stosując Lemat 8.3 dla funkcji $f_i = 1_{\Gamma_i}$, dostajemy, że dla pewnej funkcji φ , $\mathbf{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n | \mathcal{F}_{\leq s}) = \varphi(X_s)$ p.n., czyli

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n | X_s) &= \mathbf{E}(\varphi(X_s) | X_s) \\ &= \varphi(X_s) = \mathbf{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n | \mathcal{F}_{\leq s}). \square \end{aligned}$$

Dowód Lematu 8.3. Przeprowadzimy indukcję po n . Dla $n = 1$ musimy wykazać, że

$$\forall_{s \leq t_1} \mathbf{E}(f_1(X_{t_1}) | \mathcal{F}_{\leq s}^X) = \varphi(X_s), \quad (2)$$

gdzie $\varphi(x) = \int_E f_1(y_1) P_{s,t_1}(x, dy_1)$. Rozpatrzmy kilka przypadków:

i) Jeśli $f_1 = I_\Gamma$ to $\varphi(x) = P_{s,t_1}(x, \Gamma)$ czyli na mocy (1) mamy p.n.

$$\varphi(X_s) = P_{s,t_1}(X_s, \Gamma) = \mathbf{P}(X_{t_1} \in \Gamma | \mathcal{F}_{\leq s}) = \mathbf{E}(f_1(X_{t_1}) | \mathcal{F}_{\leq s}).$$

ii) Jeśli f_1 jest funkcją prostą to (2) wynika z liniowości obu stron i punktu i).
iii) Jeśli f_1 jest dowolną ograniczoną funkcją mierzalną to istnieje ciąg funkcji prostych g_n taki, że $\|f_1 - g_n\|_\infty \leq 1/n$, z punktu ii) wiemy, że (2) zachodzi dla funkcji g_n w miejsce f_1 i proste przejście graniczne wykazuje, że (2) jest spełnione dla f_1 .

Przejdźmy teraz do dowodu kroku indukcyjnego - założmy, że teza lematu jest spełniona dla n funkcji, wykażemy ją dla $n + 1$ funkcji. Mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n+1}(X_{t_{n+1}}) | \mathcal{F}_{\leq s}) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n+1}(X_{t_{n+1}}) | \mathcal{F}_{\leq t_n}) | \mathcal{F}_{\leq s}) \\ &= \mathbf{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) \mathbf{E}(f_{n+1}(X_{t_{n+1}}) | \mathcal{F}_{\leq t_n}) | \mathcal{F}_{\leq s}). \end{aligned}$$

Na mocy udowodnionego już przypadku $n = 1$ mamy $\mathbf{E}(f_{n+1}(X_{t_{n+1}}) | \mathcal{F}_{\leq t_n}) = g_n(X_{t_n})$ p.n., gdzie $g_n(x) = \int_E f_{n+1}(y) P_{t_n, t_{n+1}}(x, dy)$ jest funkcją mierzalną. Stąd teza dla $n+1$ funkcji łatwo wynika z założenia indukcyjnego zastosowanego do funkcji $f_1, \dots, f_{n-1}, f_n g_n$. $\square$

Uwaga 8.5 Czasem stosuje się ogólniejszą definicję procesu Markowa. Założmy, że $P_{s,t}$ jest funkcją przejścia a $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ filtracją. Mówimy, że $(X_t, \mathcal{F}_t)$ jest procesem Markowa (albo, że X_t jest procesem Markowa względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$) z funkcją przejścia $P_{s,t}$, jeśli zachodzą następujące dwa warunki

- a) Proces (X_t) jest $(\mathcal{F}_t)$ -adaptowalny;
- b) $\forall_{\Gamma \in \mathcal{E}} \forall_{s \leq t} \mathbf{P}(X_t \in \Gamma | \mathcal{F}_s) = P_{s,t}(X_s, \Gamma)$ p.n..

9 Rodziny Markowa

W rozdziale tym zakładamy, że $(E, \mathcal{E})$ jest przestrzenią mierzalną, a $(P_{s,t})$ pewną funkcją przejścia.

W wielu zastosowaniach będziemy zajmować się nie jednym ustalonym procesem Markowa, lecz całą rodziną procesów posiadającą wspólną funkcję przejścia, ale różne rozkłady początkowe. Wygodniej jest jednak nie zmieniać samego procesu, a jedynie modyfikować przestrzeń probabilistyczną - motywuje to następującą, nieco techniczną definicję.

Definicja 9.1 *Zalóżmy, że dla każdego $t \in T$ jest określona funkcja $X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ oraz dla każdego $s \in T$ i $x \in E$, $\mathbf{P}_{s,x}$ jest miarą probabilistyczną na $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}^X)$. Jeśli spełnione są warunki:*

a) dla wszystkich $s \in T, x \in E$ proces stochastyczny $(X_t)_{t \geq s, t \in T}$ określony na $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}^X, \mathbf{P}_{s,x})$ jest procesem Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}$;

b) $\forall s \in T \forall x \in E \mathbf{P}_{s,x}(X_s = x) = 1$,

to parę $(X_t)_{t \in T}, (\mathbf{P}_{s,x})_{s \in T, x \in E}$ nazywamy rodziną Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}$.

Uwaga 9.1 Alternatywnie zamiast definiować wspólną rodzinę zmiennych X_t i różne miary probabilistyczne $\mathbf{P}_{s,x}$ można definiować wspólną miarę probabilistyczną $\mathbf{P}$ i rodzinę procesów Markowa $(X_t^{s,x})_{t \geq s, x \in E}$ taką, że $\mathbf{P}(X_s^{s,x} = x) = 1$.

Uwaga 9.2 Z udowodnionych poprzednio faktów warunek Markowa a) z Definicji 9.1 można wyrazić na kilka równoważnych sposobów np.

- i) $\forall t \geq s \forall x \in E \forall A \in \mathcal{F}_{\geq t}^X, B \in \mathcal{F}_{[s,t]}^X \mathbf{P}_{s,x}(A \cap B | X_t) = \mathbf{P}_{s,x}(A | X_t) \mathbf{P}_{s,x}(B | X_t) \mathbf{P}_{s,x}\text{-p.n.}$
 oraz $\forall s \leq t \leq u \forall x \in E \forall \Gamma \in \mathcal{E} \mathbf{P}_{s,x}(X_u \in \Gamma | X_t) = P_{t,u}(X_t, \Gamma) \mathbf{P}_{s,x}\text{-p.n.}$
 ii) $\forall s \leq t \leq u \forall x \in E \forall \Gamma \in \mathcal{E} \mathbf{P}_{s,x}(X_u \in \Gamma | \mathcal{F}_{[s,t]}^X) = P_{t,u}(X_t, \Gamma) \mathbf{P}_{s,x}\text{-p.n.}$

Lemat 9.1 *Zalóżmy, że $(X_t)_{t \in T}, (\mathbf{P}_{s,x})_{s \in T, x \in E}$ jest rodziną Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}$ wówczas*

a) $\forall x \in E \forall s \leq t \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \forall \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}$

$$\mathbf{P}_{s,x}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n | \mathcal{F}_{[s,t]}) = \varphi(X_t) \mathbf{P}_{s,x} \text{ p.n.},$$

gdzie

$$\varphi(y) = \int_{\Gamma_n} \dots \int_{\Gamma_1} P_{t,t_1}(y, dy_1) P_{t_1,t_2}(y_1, dy_2) \dots P_{t_{n-1},t_n}(y_{n-1}, dy_n).$$

W szczególności biorąc $s = t$ dostajemy

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_{s,x}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n) \\ &= \int_{\Gamma_n} \dots \int_{\Gamma_1} P_{t,t_1}(x, dy_1) P_{t_1,t_2}(y_1, dy_2) \dots P_{t_{n-1},t_n}(y_{n-1}, dy_n). \end{aligned}$$

b) $\forall s \in T \forall A \in \mathcal{F}_{\geq s}^X x \rightarrow \mathbf{P}_{s,x}(A)$ jest funkcją mierzalną z $(E, \mathcal{E})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Dowód. a) Pierwszy wzór wynika z Lematu 8.3 zastosowanego do procesu Markowa $(X_t)_{t \geq s}$ na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}, \mathbf{P}_{s,x})$ i funkcji $f_i = I_{\Gamma_i}$, $i = 1, \dots, n$. Drugi wzór z a) wynika z pierwszego, wystarczy tylko zauważyć, że $\mathbf{P}_{s,x}(X_s = x) = 1$.

b) Zbiory postaci $\{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}$, $s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}$ tworzą π -system generujący $\mathcal{F}_{\geq s}^X$. Ponadto dla $A = \{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}$ funkcja $x \rightarrow \mathbf{P}_{s,x}(A)$ jest mierzalna na mocy punktu a) oraz rodzina takich zbiorów A dla których funkcja $x \rightarrow \mathbf{P}_{s,x}(A)$ jest mierzalna jest λ -systemem. Teza wynika więc natychmiast z twierdzenia o $\pi - \lambda$ systemach. $\square$

Lemat 9.2 *Załóżmy, że $(X_t, \mathbf{P}_{s,x})$ jest rodziną Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}$, wówczas*

$$\forall s \leq t \forall x \in E \forall A \in \mathcal{F}_{\geq t}^X \quad \mathbf{P}_{s,x}(A | \mathcal{F}_{[s,t]}) = \mathbf{P}_{t, X_t(\omega)}(A) \quad \mathbf{P}_{s,x} - p.n..$$

Dowód. Ustalmy $A \in \mathcal{F}_{\geq t}^X$, na mocy Lematu 9.1 funkcja $x \rightarrow \mathbf{P}_{t,x}(A)$ jest mierzalna, stąd wynika mierzalność funkcji $\omega \rightarrow \mathbf{P}_{t, X_t(\omega)}(A)$ względem $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_{[s,t]}$. Wystarczy więc udowodnić

$$\forall B \in \mathcal{F}_{[s,t]} \quad \mathbf{P}_{s,x}(A \cap B) = \int_B \mathbf{P}_{t, X_t}(A) d\mathbf{P}_{s,x}. \quad (3)$$

Rodzina $\{A \in \mathcal{F}_{\geq t} \text{ spełniających (3)}\}$ jest λ -systemem. Z części a) Lematu 9.1 wynika, że zawiera ona π -system $\{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}$, $s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}$, a zatem zawiera i σ -ciało generowane przez ten system czyli $\mathcal{F}_{\geq t}^X$. $\square$

Fakt 9.3 *Para $(X_t, \mathbf{P}_{s,x})$ jest rodziną Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{P}_{s,x}(X_s = x) = 1$ oraz dla wszystkich $s \leq t$ i $A \in \mathcal{F}_{\geq t}^X$*

$$\mathbf{P}_{s,x}(A | \mathcal{F}_{[s,t]}) = P_{t, X_t(\omega)}(A) \quad \mathbf{P}_{s,x} - p.n. \quad \text{i} \quad \mathbf{P}_{s,x}(X_t \in \Gamma) = P_{s,t}(x, \Gamma).$$

Dowód. $\Rightarrow$: wynika z Lematu 9.2.

$\Leftarrow$: Przyjmując $A := \{X_u \in \Gamma\}$ oraz $s \leq t \leq u$ dostajemy

$$\mathbf{P}_{s,x}(A | \mathcal{F}_{[s,t]}) = \mathbf{P}_{t, X_t}(X_u \in \Gamma) = P_{t,u}(X_t, \Gamma) \quad \mathbf{P}_{s,x} - p.n.$$

i teza wynika z części ii) Uwagi 9. $\square$

9.1 Skończenie wymiarowe rozkłady procesów Markowa

W tej części odpowiemy na następujące dwa pytania:

Czy można za pomocą skończenie wymiarowych rozkładów rozpoznać procesy Markowa?

Jakie warunki musi spełniać funkcja przejścia by istniała rodzina Markowa z taką funkcją?

Fakt 9.4 Załóżmy, że $P_{s,t}$ jest ustaloną funkcją przejścia, $X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dla $t \in T$ oraz dla $s \in T, x \in E$ dane są rozkłady probabilistyczne $\mathbf{P}_{s,x}$ na $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}^X)$. Wówczas $(X_t, \mathbf{P}_{s,x})$ jest rodziną Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}$ wtedy i tylko wtedy gdy skończenie wymiarowe rozkłady (X_t) przy $\mathbf{P}_{s,x}$ dane są wzorem

$$\begin{aligned} & \forall_{s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n} \forall_{x \in E} \forall_{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}} \mathbf{P}_{s,x}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n) \\ &= \int_{\Gamma_n} \dots \int_{\Gamma_1} P_{s,t_1}(x, dy_1) P_{t_1,t_2}(y_1, dy_2) \dots P_{t_{n-1},t_n}(y_{n-1}, dy_n). \end{aligned}$$

Dowód. Implikacja " $\Rightarrow$ " była udowodniona wcześniej (Lemat 9.1), wystarczy więc udowodnić " $\Leftarrow$ ". Najpierw wykażemy, że dla dowolnej funkcji $f: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ mierzalnej i ograniczonej mamy

$$\begin{aligned} & \forall_{s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n} \mathbf{E}_{s,x} f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \\ & \int_E \dots \int_E f(y_1, \dots, y_n) P_{s,t_1}(x, dy_1) P_{t_1,t_2}(y_1, dy_2) \dots P_{t_{n-1},t_n}(y_{n-1}, dy_n). \end{aligned} \quad (4)$$

($\mathbf{E}_{s,x}$ oznacza wartość oczekiwaną względem $\mathbf{P}_{s,x}$.) Udowodnimy 4 w kilku krokach:

- i) $f = I_\Gamma$ - rodzina $\mathcal{A} := \{\Gamma \in \mathcal{E}^n: f = I_\Gamma \text{ spełnia (4)}\}$ jest λ -systemem zawierającym π -system $\{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n: \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}\}$, generującym $\mathcal{E}^n$, a zatem z lematu o $\pi - \lambda$ układach $\mathcal{A} = \mathcal{E}^n$.
- ii) Z liniowości (4) zachodzi dla dowolnych funkcji prostych.
- iii) Dowolną funkcję f mierzalną możemy jednostajnie aproksymować funkcjami prostymi i nietrudno zauważyć, że obie strony (4) dobrze się zachowują przy przejściu granicznym.

By zakończyć dowód faktu wystarczy wykazać, że zachodzi własność Markowa tzn. że dla wszystkich x, Γ i $s \leq t \leq u$ zachodzi $P_{s,x}$ -p.n. $\mathbf{P}_{s,x}(X_u \in \Gamma | \mathcal{F}_{[s,t]}) = P_{t,u}(X_t, \Gamma)$. Ponieważ zmienna $P_{t,u}(X_t, \Gamma)$ jest $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_{[s,t]}$ mierzalna, to wystarczy pokazać, że

$$\forall_{A \in \mathcal{F}_{[s,t]}} \mathbf{P}_{s,x}(A \cap \{X_u \in \Gamma\}) = \int_A P_{t,u}(X_t, \Gamma) dP_{s,x}. \quad (5)$$

Rodzina $\{A \in \mathcal{F}_{[s,t]}: A \text{ spełnia (5)}\}$ jest λ -systemem, wystarczy więc pokazać, że (5) zachodzi dla pewnego π -systemu generującego $\mathcal{F}_{[s,t]}$. Wykażemy zatem (5) dla $A = \{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}$, $s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t$. Zauważmy, że na mocy (4) zastosowanego do $f(x_1, \dots, x_n) = I_{\Gamma_1}(x_1) \dots I_{\Gamma_n}(x_n) P_{t,u}(x, \Gamma)$

$$\begin{aligned} & \int_A P_{t,u}(X_t, \Gamma) dP_{s,x} = \mathbf{E}_{s,x} f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \\ &= \int_E \dots \int_E I_{\Gamma_1}(y_1) \dots I_{\Gamma_n}(y_n) P_{t_n,u}(y_n, \Gamma) P_{s,t_1}(x, dy_1) P_{t_1,t_2}(y_1, dy_2) \dots P_{t_{n-1},t_n}(y_{n-1}, dy_n) \\ &= \int_\Gamma \int_{\Gamma_n} \dots \int_{\Gamma_1} P_{s,t_1}(x, dy_1) P_{t_1,t_2}(y_1, dy_2) \dots P_{t_{n-1},t_n}(y_{n-1}, dy_n) P_{t_n,u}(y_n, dz) \end{aligned}$$

$$= \mathbf{P}_{s,x}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n, X_u \in \Gamma) = \mathbf{P}_{s,x}(A \cap \{X_u \in \Gamma\}). \square$$

Uwaga 9.3 W przypadku procesów Markowa można w taki sam sposób udowodnić, że $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\begin{aligned} & \forall_{s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n} \forall_{x \in E} \forall_{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}} \mathbf{P}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n) \\ &= \int_{\Gamma_n} \dots \int_{\Gamma_1} \int_E d\mu_{X_s}(x) P_{s,t_1}(x, dy_1) P_{t_1,t_2}(y_1, dy_2) \dots P_{t_{n-1},t_n}(y_{n-1}, dy_n). \end{aligned}$$

9.2 Równanie Chapmana-Kołmogorowa

Założmy, że $(X_t, \mathbf{P}_{s,x})$ jest rodziną Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}$. Wówczas dla dowolnych $s \leq t \leq u$ dostajemy na mocy Faktu 9.4

$$\begin{aligned} P_{s,u}(x, \Gamma) &= \mathbf{P}_{s,x}(X_u \in \Gamma) = \mathbf{P}_{s,x}(X_t \in E, X_u \in \Gamma) \\ &= \int_{\Gamma} \int_E P_{s,t}(x, dy) P_{t,u}(y, dz) = \int_E P_{t,u}(y, \Gamma) P_{s,t}(x, dy). \end{aligned}$$

Motywuje to następującą definicję

Definicja 9.2 (Równanie Chapmana-Kołmogorowa) *Mówimy, że funkcja przejścia $P_{s,t}$ spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa, jeśli*

$$\forall_{s \leq t \leq u} \forall_{x \in E} \forall_{\Gamma \in \mathcal{E}} P_{s,u}(x, \Gamma) = \int_E P_{t,u}(y, \Gamma) P_{s,t}(x, dy).$$

Uwaga 9.4 a) W przypadku przeliczalnej przestrzeni fazowej E i macierzy przejścia $P^{s,t} = (p_{s,t}(x, y))_{x,y \in E}$ równanie Chapmana Kołmogorowa przyjmuje postać

$$\forall_{s \leq t \leq u} \forall_{x,z \in E} p_{s,u}(x, z) = \sum_{y \in E} p_{s,t}(x, y) p_{t,u}(y, z)$$

czyli $P^{s,u} = P^{s,t} P^{t,u}$.

b) W przypadku $E = \mathbb{R}^n$ i gęstości przejścia $p_{s,t}$ równanie Chapmana Kołmogorowa ma postać

$$\forall_{s < t < u} \forall_{x,z \in E} p_{s,u}(x, z) = \int_E p_{s,t}(x, y) p_{t,u}(y, z) dy \text{ dla p.w. } z \in \mathbb{R}^n.$$

Twierdzenie 9.5 *Założmy, że funkcja przejścia $(P_{s,t})$ spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa. Dla $s \in T$ i $x \in E$ określmy rodzinę miar probabilistycznych $(\mu_{t_1, \dots, t_n}^{s,x})_{s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n}$ wzorem*

$$\forall_{\Gamma \in \mathcal{E}^n} \mu_{t_1, \dots, t_n}^{s,x}(\Gamma) := \int_E \dots \int_E I_{\Gamma}(y_1, \dots, y_n) P_{s,t_1}(x, dy_1) P_{t_1,t_2}(y_1, dy_2) \dots P_{t_{n-1},t_n}(y_{n-1}, dy_n).$$

Wówczas dla wszystkich $s \in T$ i $x \in E$ miary $(\mu_{t_1, \dots, t_n}^{s,x})_{s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n}$ tworzą zgodną rodzinę miar probabilistycznych.

Dowód. Trzeba wykazać, że dla wszystkich $s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ oraz zbiorów $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}$

i) $\mu_{t_1, \dots, t_n}^{s,x}(E \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n) = \mu_{t_2, \dots, t_n}^{s,x}(\Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n)$

ii) $\mu_{t_1, \dots, t_n}^{s,x}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{i-1} \times E \times \Gamma_{i+1} \times \dots \times \Gamma_n) = \mu_{t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n}^{s,x}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{i-1} \times \Gamma_{i+1} \times \dots \times \Gamma_n)$

oraz

iii) $\mu_{t_1, \dots, t_n}^{s,x}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{n-1} \times E) = \mu_{t_1, \dots, t_{n-1}}^{s,x}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{n-1})$.

Warunek iii) jest oczywisty (odcałkowujemy względem dy_n), sprawdzimy ii) (i) się dowodzi analogicznie). Zauważmy wpraw, że dla dowolnej funkcji $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mierzalnej i ograniczonej zachodzi

$$\forall s \leq t \leq u \quad \int_E \int_E f(z) P_{s,t}(x, dy) P_{t,u}(y, dz) = \int_E f(z) P_{s,u}(x, dz). \quad (6)$$

Istotnie dla $f = I_\Gamma$, (6) to równanie Chapmana-Kołmogorowa, z liniowości obu stron otrzymujemy, że (6) zachodzi dla funkcji prostych, a stąd przez jednostajną aproksymację dla dowolnych funkcji mierzalnych ograniczonych.

Pokażmy więc ii). Stosując (6) dla

$$f(z) := I_{\Gamma_{i+1}}(z) \int_{\Gamma_n} \dots \int_{\Gamma_{i+2}} P_{t_{i+1}, t_{i+2}}(y_{i+1}, dy_{i+2}) \dots P_{t_{n-1}, t_n}(y_{n-1}, dy_n)$$

dostajemy

$$\begin{aligned} & \mu_{t_1, \dots, t_n}^{s,x}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{i-1} \times E \times \Gamma_{i+1} \times \dots \times \Gamma_n) \\ &= \int_{\Gamma_n} \dots \int_{\Gamma_{i+1}} \int_E \int_{\Gamma_{i-1}} \dots \int_{\Gamma_1} P_{s,t_1}(x, dy_1) P_{t_1,t_2}(y_1, dy_2) \dots P_{t_{n-1}, t_n}(y_{n-1}, dy_n) \\ &= \int_E \int_E \int_{\Gamma_{i-1}} \dots \int_{\Gamma_1} P_{s,t_1}(x, dy_1) \dots P_{t_{i-1}, t_i}(y_{i-1}, dy_i) f(y_{i+1}) P_{t_i, t_{i+1}}(y_i, dy_{i+1}) \\ &= \int_E \int_{\Gamma_{i-1}} \dots \int_{\Gamma_1} P_{s,t_1}(x, dy_1) P_{t_1, t_2}(y_1, dy_2) \dots P_{t_{i-1}, t_{i+1}}(y_{i-1}, dy_{i+1}) f(y_{i+1}) \\ &= \int_{\Gamma_n} \dots \int_{\Gamma_{i+1}} \int_{\Gamma_{i-1}} \dots \int_{\Gamma_1} P_{s,t_1}(x, dy_1) \dots P_{t_{i-1}, t_{i+1}}(y_{i-1}, dy_{i+1}) \dots P_{t_{n-1}, t_n}(y_{n-1}, dy_n) \\ &= \mu_{t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n}^{s,x}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{i-1} \times \Gamma_{i+1} \times \dots \times \Gamma_n). \square \end{aligned}$$

Twierdzenie 9.6 Niech $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, a $P_{s,t}$ będzie funkcją przejścia spełniającą równanie Chapmana-Kołmogorowa. Wówczas istnieje rodzina Markowa $(X_t, \mathbf{P}_{s,x})$ z funkcją przejścia $P_{s,t}$.

Dowód. Dla ustalonych $s \in T, x \in E$ rodzina miar $(\mu_{t_1, \dots, t_n}^{s,x})_{s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n}$ spełnia warunki zgodności, więc na mocy Twierdzenia 2.2 istnieje proces o skończonym wymiarowym rozkładach zadanych przez tę rodzinę. Co więcej z dowodu Twierdzenia 2.2 proces ten można skonstruować na przestrzeni $(\Omega_s, \mathcal{F}_s, \mathbf{P}_{s,x})$ takiej, że $\Omega_s = E^{T \cap [s, \infty)}$, $\mathcal{F}_s \mathcal{B}(E^{T \cap [s, \infty)})$ – sigma ciało zbiorów cylindrycznych, a $X_t(x) = x_t$ dla $x: T \cap [s, \infty) \rightarrow E$. Określmy $\Omega := E^T$, $X_t(x) = x_t$ dla

$x \in E^T$. Wówczas nietrudno zauważyć, że $\mathcal{F}_{\geq s}^X = E^{T \cap (-\infty, s)} \times \mathcal{B}(E^{T \cap [s, \infty)})$ tzn. jest to rodzina zbiorów

$$\{\{x: T \rightarrow E, x|_{T \cap [s, \infty)} \in A\}, A \in \mathcal{B}(E^{T \cap [s, \infty)})\}.$$

Określmy

$$\mathbf{P}_{s,x}(E^{T \cap (-\infty, s)} \times A) := \tilde{\mathbf{P}}_{s,x}(A) \text{ dla } A \in \mathcal{B}(E^{T \cap [s, \infty)}).$$

Wówczas $\mathbf{P}_{s,x}$ jest miarą probabilistyczną na $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}^X)$ i co więcej rozkłady skończenie wymiarowe X_t przy $\mathbf{P}_{s,x}$ są zadane przez $(\mu_{t_1, \dots, t_n}^{s,x})$. Zatem na podstawie Faktu 9.4 $(X_t, \mathbf{P}_{s,x})$ jest rodziną Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}$. $\square$

10 Jednorodne Rodziny Markowa

W tej części będziemy zakładać, że T jest jednym ze zbiorów $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_+$ lub $\mathbb{Z}$.

Definicja 10.1 Funkcję przejścia $P_{s,t}$ nazywamy jednorodną (w czasie), jeśli dla wszystkich $s, t, h \in T$, $s \leq t$ zachodzi $P_{s+h, t+h} = P_{s,t}$ czyli $P_{s,t}$ zależy tylko od $t - s$.

Uwaga 10.5 Dla jednorodnych funkcji przejścia $P_{s,t}$ można wprowadzić funkcję przejścia $P_t(x, \Gamma)$ zależną tylko od trzech parametrów taką, że $P_{s,t}(x, \Gamma) = P_{t-s}(x, \Gamma)$.

- Jednorodna funkcja przejścia $(P_t)_{t \in T, t \geq 0}$ musi spełniać następujące warunki:
- i) $\forall x \in E \forall t \ P_t(x, \cdot)$ jest miarą probabilistyczną na $(E, \mathcal{E})$;
 - ii) $\forall t \forall \Gamma \in \mathcal{E} \ x \rightarrow P_t(x, \Gamma)$ jest funkcją mierzalną z $(E, \mathcal{E})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
 - iii) $\forall x \in E, \Gamma \in \mathcal{E} \ P_0(x, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$.

Uwaga 10.6 Równanie Chapmana-Kołmogorowa dla jednorodnych funkcji przejścia ma postać

$$\forall s, t \forall x \in E \forall \Gamma \in \mathcal{E} \ P_{s+t}(x, \Gamma) = \int_E P_s(y, \Gamma) P_t(x, dy).$$

10.1 Operatory translacji

Definicja 10.2 Załóżmy, że $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem stochastycznym, $h \in T$ oraz dla każdego $\omega \in \Omega$ istnieje $\theta_h \omega \in \Omega$ taka, że

$$\forall t \in T \ X_t(\theta_h \omega) = X_{t+h}(\omega). \quad (7)$$

Wówczas θ_h nazywamy operatorem translacji. Dla $A \subset \Omega$ określamy $\theta_h^{-1}A := \{\omega: \theta_h \omega \in A\}$.

Uwaga 10.7 W definicji nie zakładamy żadnej mierzalności ani jednoznaczności operatora θ_h .

Uwaga 10.8 W wielu przypadkach naturalnym wyborem Ω jest E^T , proces X jest zaś określony jako $X_t(\omega) = \omega_t$ dla $\omega \in \Omega$ czyli $\omega: T \rightarrow \mathbb{R}$. Wówczas θ_h można określić wzorem $\theta_h \omega(t) = \omega(t+h)$.

Przykłady

- Jeśli $A = \{X_t \in \Gamma\}$, to $\theta_h^{-1}(A) = \{\omega: X_t(\theta_h \omega) \in \Gamma\} = \{\omega: X_{t+h}(\omega) \in \Gamma\}$
- Jeśli $B = \{X_t \leq 0 \text{ dla } t \geq t_0\}$, to $\theta_h^{-1}(B) = \{X_t \leq 0 \text{ dla } t \geq t_0 + h\}$.
- Jeśli $C = \{\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = 0\}$, to $\theta_h^{-1}(C) = \{\lim_{t \rightarrow \infty} X_{t+h} = 0\} = \{\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = 0\}$.

Fakt 10.1 a) Jeśli $A \in \mathcal{F}_{\geq s}^X$, to $\theta_h^{-1}A \in \mathcal{F}_{\geq s+h}^X$, co więcej $\theta_h^{-1}A$ nie zależy od wyboru funkcji spełniającej (7) oraz każdy zbiór $B \in \mathcal{F}_{\geq s+h}^X$ jest postaci $\theta_h^{-1}A$ dla pewnego $A \in \mathcal{F}_{\geq s}^X$.

b) Załóżmy, że Y jest zmienną losową $\mathcal{F}_{\geq s}^X$ -mierzalną. Wówczas zmienna losowa $\theta_h Y$ określona wzorem $\theta_h Y(\omega) := Y(\theta_h \omega)$ jest $\mathcal{F}_{\geq s+h}^X$ -mierzalna. Co więcej $\theta_h Y$ jest określona jednoznacznie, niezależnie od wyboru funkcji θ_h spełniającej (7).

Dowód. a) Rodzina $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{F}_{\geq s}^X: \theta_h^{-1}A \in \mathcal{F}_{\geq s+h}^X\}$ jest λ -systemem zawierającym π -system zbiorów postaci $\{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}$, $s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}$, gdyż $\theta_h^{-1}\{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\} = \{X_{t_1+h} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n+h} \in \Gamma_n\} \in \mathcal{F}_{\geq s+h}^X$. Stąd z lematu o $\pi - \lambda$ systemach $\mathcal{A} = \mathcal{F}_{\geq s}^X$. Podobnie pokazujemy, że jeśli $\tilde{\theta}_h$ inna funkcja spełniająca (7) to $\{A \in \mathcal{F}_{\geq s}^X: \theta_h^{-1}A = \tilde{\theta}_h^{-1}A\} = \mathcal{F}_{\geq s}^X$.

Rodzina $\{B \in \mathcal{F}_{\geq s+h}^X: B = \theta_h^{-1}A, A \in \mathcal{F}_{\geq s}^X\}$ jest λ -systemem zawierającym π -system zbiorów postaci $\{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}$, $s+h \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}$, który generuje σ -ciało $\mathcal{F}_{\geq s+h}^X$.

b) Z mierzalności Y wynika, że $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}_{\geq s}^X$, stąd na mocy a)

$$(\theta_h Y)^{-1}(A) = \{\omega: Y(\theta_h \omega) \in A\} = \theta_h^{-1}\{Y \in A\} \in \mathcal{F}_{\geq s+h}^X$$

czyli zmienna $\theta_h Y$ jest $\mathcal{F}_{\geq s+h}^X$ -mierzalna. Jeśli $\tilde{\theta}_h$ jest innym operatorem spełniającym (7), to znów na mocy punktu a)

$$Y(\theta_h \omega) = y \Rightarrow \omega \in \theta_h^{-1}\{Y = y\} = \tilde{\theta}_h^{-1}\{Y = y\} \Rightarrow Y(\tilde{\theta}_h \omega) = y$$

czyli $\theta_h Y = \tilde{\theta}_h Y$. $\square$

Fakt 10.2 Załóżmy, że $(X_t, \mathbf{P}_{s,x})$ jest rodziną Markowa z jednorodną funkcją przejścia, a θ_s jest operatorem translacji dla X . Wówczas dla $\mathbf{P}_{s,x}(\theta_s^{-1}B) = \mathbf{P}_{0,x}$ dla wszystkich $B \in \mathcal{F}_{\geq 0}^X$.

Dowód. Jeśli $B = \{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}$ to ze wzoru na skończenie wymiarowe rozkłady rodzin Markowa (Fakt 9.4) oraz z jednorodności funkcji przejścia dostajemy

$$\mathbf{P}_{s,x}(\theta_s^{-1}B) = \mathbf{P}_{s,x}(X_{t_1+s} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n+s} \in \Gamma_n) = \mathbf{P}_{0,x}(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n).$$

Ponadto rodzina $\{B \in \mathcal{F}_{\geq 0}^X : \mathbf{P}_{s,x}(\theta_s^{-1}B) = \mathbf{P}_{0,x}(B)\}$ tworzy λ -system i fakt wynika z lematu o $\pi - \lambda$ systemach. $\square$

Ponieważ każdy zbiór $A \in \mathcal{F}_{\geq s}^X$ można przedstawić w postaci $\theta_s^{-1}B$, $B \in \mathcal{F}_{\geq 0}^X$, więc rozkłady $\mathbf{P}_{s,x}$ są wyznaczone przez $\mathbf{P}_{0,x}$ i operator translacji. Motywuje to następującą definicję.

Definicja 10.3 Mówimy, że $(X_t, \mathbf{P}_x)$ jest jednorodną rodziną Markowa z funkcją przejścia P_t i operatorem translacji θ_s , jeśli

a) $\mathbf{P}_x$ jest miarą probabilistyczną na $\mathcal{F}_{\geq 0}^X$ taką, że

$$\forall t, h \in T, t, h \geq 0 \quad \mathbf{P}_x(X_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{F}_{\leq t}^X) = P_h(X_t, \Gamma);$$

b) $\mathbf{P}_x(X_0 = x) = 1$ dla wszystkich $x \in E$;

c) $X_t(\theta_s \omega) = X_{t+s}(\omega)$ dla wszystkich t, s i $\omega \in \Omega$.

Uwaga 10.9 Warunek a) Definicji 10.3 oznacza, że dla $x \in E$, proces X_t jest procesem Markowa na $(\Omega, \mathbf{P}_x)$ z funkcją przejścia P_t . Jak wiemy warunek ten ma wiele równoważnych postaci. W szczególności oznacza on, że skończenie wymiarowe rozkłady (X_t) są dane wzorem dla $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$

$$\mathbf{P}_x(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n) = \int_{\Gamma_n} \dots \int_{\Gamma_1} P_{t_1}(x, dy_1) P_{t_2-t_1}(y_1, dy_2) \dots P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1}, dy_n).$$

Twierdzenie 10.3 Załóżmy, że $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ (lub E jest porządną przestrzenią) oraz P_t jest jednorodną funkcją przejścia spełniającą równanie Chapmana-Kolmogorowa. Wówczas istnieje jednorodna rodzina Markowa $(X_t, \mathbf{P}_x)$ z funkcją przejścia P_t .

Dowód. Jest to wniosek z ogólniejszego Twierdzenia 9.6 dla przypadku niejednorodnego, wystarczy jedynie udowodnić istnienie operatora translacji. Ale z konstrukcji przeprowadzonej w dowodzie Twierdzenia 9.6 wynika, że możemy przyjąć $\Omega = E^T$ oraz $X_t(\omega) = \omega_t$ i wtedy operator translacji jest zadany wzorem $\theta_s \omega := \omega_{\cdot+h}$. $\square$

Uwaga 10.10 Własność Markowa można wyrazić w jeszcze jeden sposób za pomocą operatora translacji. Jeśli $(X_t, \mathbf{P}_x)$ jest jednorodną rodziną Markowa z operatorem translacji θ_s , to

$$\forall t \in T, x \in E \quad \forall B \in \mathcal{F}_{\geq 0} \quad \mathbf{P}_x(\theta_t^{-1}B | \mathcal{F}_{\leq t}) = \mathbf{P}_{X_t}(B).$$

Możemy to interpretować w ten sposób, że jeśli znamy zachowanie procesu X do chwili t , to dalej przebiega on tak jakby w chwili t startował (z losowego!) punktu $X_t(\omega)$.

11 Półgrupy operatorów związane z jednorodnymi procesami Markowa

Z każdym jednorodnym łańcuchem Markowa możemy związać pewną rodzinę przekształceń o ciekawych i ważnych własnościach - tzw. półgrupę operatorów. Zaczniemy jednak od definicji dwu przestrzeni Banacha.

Definicja 11.1 Załóżmy, że $(E, \mathcal{E})$ jest przestrzenią mierzalną. Przez $B(E)$ będziemy oznaczać przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych ograniczonych z E w $\mathbb{R}$, a przez $M(E)$ przestrzeń wszystkich miar (ze znakiem) na $(E, \mathcal{E})$, czyli addytywnych funkcji z $\mathcal{E}$ w $\mathbb{R}$. Kładziemy

$$\|f\| := \sup_{x \in E} |f(x)|, \quad f \in B(E)$$

oraz

$$\mu := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)| : A_i \in \mathcal{E}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \right\}, \quad \mu \in M(E).$$

Definicja 11.2 Załóżmy, że $(X_t, \mathbf{P}_x)$ jest jednorodnym procesem Markowa z funkcją przejścia P_t . Definiujemy operatory $P^t : B(E) \rightarrow B(E)$ wzorem

$$P^t f(x) = \mathbf{E}_x f(X_t) = \int_E f(y) P_t(x, dy), \quad t \geq 0.$$

Uwaga 11.1 Zauważmy, że operatory P^t wyznaczają funkcję przejścia, bo

$$P_t(x, \Gamma) = \mathbf{P}_x(X_t \in \Gamma) = \mathbf{E}_x I_\Gamma(X_t) = P^t I_\Gamma(x).$$

Fakt 11.1 Operatory $(P_t)_{t \geq 0}$ zdefiniowane powyżej spełniają następujące własności

- i) P^t są operatorami liniowymi;
- ii) P^t są kontrakcjami tzn. $\|P^t f\| \leq \|f\|$ dla $f \in B(E)$;
- iii) P^t są operatorami nieujemnymi tzn. $P^t f \geq 0$ dla $f \geq 0$;
- iv) $P^t \mathbf{1} = \mathbf{1}$, gdzie $\mathbf{1}$ oznacza funkcję stałą równą 1;
- v) $P^0 = \text{Id}$;
- vi) $P^{s+t} = P^s P^t$ dla $s, t \geq 0$.

Dowód. Punkty i), iii)-v) są oczywiste. Własność ii) wynika stąd, że

$$|P^t f(x)| = |\mathbf{E}_x f(X_t)| \leq \mathbf{E}_x |f(X_t)| \leq \mathbf{E} \|f\| = \|f\|.$$

Wreszcie by udowodnić vi) wykorzystamy udowodnione poprzednio konsekwencje równań Chapmana-Kołmogorowa

$$P^{s+t} f(x) = \int_E P_{s+t}(x, dz) f(z) = \int_E \int_E P_s(x, dy) P_t(y, dz) f(z)$$

$$= \int_E P_s(x, dy) \int_E P_t(y, dz) f(z) = \int_E P_s(x, dy) P^t f(y) = P^s P^t f(x). \square$$

Uwaga 11.2 Rodzinę operatorów liniowych $(P^t)_{t \geq 0}$ określonych na przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ taką, że $P^0 = \text{Id}$ oraz $P^{s+t} = P^s P^t$ nazywamy *półgrupą operatorów*.

Przykłady

a) Jeśli $(W_t, \mathbf{P}_x)$ jest procesem Wienera, to

$$P^t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2/2} dy = \mathbf{E} f(x + \sqrt{t} W_1).$$

b) W przypadku gdy E jest przeliczalna i $P^t = (p_t(x, y))$ jest macierzą przejścia, to każdą funkcję $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ można utożsamić z wektorem $[f(x_1), f(x_2), \dots]^T$ i wówczas $P^t f(x) = \sum_{y \in E} p_t(x, y) f(y)$ – mnożenie przez macierz P^t .

Uwaga 11.3 Można też określić P^t jako operatory na $M(E)$ wzorem

$$\nu P^t(\Gamma) := \int_E \nu(dx) P_t(x, \Gamma).$$

Wówczas

- i) P^t są operatorami liniowymi;
- ii) P^t są kontrakcjami tzn. $\|\nu P^t\| \leq \|\nu\|$ dla $\nu \in M(E)$;
- iii) P^t są operatorami nieujemnymi tzn. jeśli ν jest miarą nieujemną to νP^t też jest miarą nieujemną;
- iv) $\nu P^t(E) = \nu(E)$, w szczególności P^t przeprowadza miary probabilistyczne na miary probabilistyczne;
- v) $P^0 = \text{Id}$;
- vi) $P^{s+t} = P^s P^t$ dla $s, t \geq 0$.

Założmy, że ν jest miarą probabilistyczną, wówczas możemy określić $\mathbf{P}_\nu(A) = \int_E \mathbf{P}_x(A) d\nu(x)$. Wtedy $\mathbf{P}_\nu(X_0 \in \Gamma) = \nu(\Gamma)$ oraz $\nu P^t(\Gamma) = \mathbf{P}_\nu(X_t \in \Gamma)$ czyli νP^t to rozkład X_t , jeśli X_0 ma rozkład ν .

Uwaga 11.4 Każda miara $\nu \in M(E)$ wyznacza funkcjonal na $B(E)$ wzorem $\langle \nu, f \rangle := \int_E f(x) \nu(dx)$. Przy tym oznaczeniu zachodzi

$$\langle \nu, P^t f \rangle = \langle \nu P^t, f \rangle.$$

11.1 Fellerowskie rodziny Markowa

Przestrzeń $B(E)$ jest bardzo duża i niewygodna do zastosowań praktycznych. W szczególności na $B(E)$ jest bardzo dużo ciągłych funkcjonałów liniowych – dużo więcej niż miar na E (poza przypadkiem gdy E jest skończony). Dlatego o wiele wygodniej jest pracować z przestrzenią $C(E)$ – funkcji ciągłych na E . Z powodów technicznych zdecydujemy się na przestrzeń $C_0(E)$ – funkcji ciągłych znikających w nieskończoności.

Definicja 11.3 Załóżmy, że E jest przestrzenią metryczną (lub ogólniej topologiczną). Definiujemy

$$C_0(E) := \{f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ ciągłe takie, że } \forall \varepsilon > 0 \exists K \text{ zwarty } \forall x \notin K |f(x)| < \varepsilon\}.$$

Uwaga 11.5 Przestrzeń $C_0(E)$ jest przestrzenią Banacha z normą $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$. W szczególności mamy

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}.$$

Ogólnie $f \in C_0(E)$ nie implikuje, że $P^t f \in C_0(E)$. Motywuje to następującą definicję.

Definicja 11.4 Załóżmy, że E jest lokalnie zwartą przestrzenią metryczną, a $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ - σ -ciało borelowskich podzbiorów E . Jednorodną rodzinę Markowa $(X_t, \mathbf{P}_x)$ o wartościach w $(E, \mathcal{E})$ nazywamy rodziną fellerowską, jeśli $P^t f \in C_0(E)$ dla wszystkich t oraz $f \in C_0(E)$.

Uwaga 11.6 Warunek fellerowskości oznacza przede wszystkim, że dla $f \in C_0(E)$ funkcja $P^t f$ jest ciągła. Czyli $P^t f(x) \rightarrow P^t f(x_0)$ gdy $x \rightarrow x_0$ tzn.

$$\forall f \in C_0(E) \forall x \rightarrow x_0 \int_E P_t(x, dy) f(y) \rightarrow \int_E P_t(x_0, dy) f(y),$$

czyli miary $P_t(x, dy)$ słabo zbiegają do $P_t(x_0, dy)$ przy $x \rightarrow x_0$.

Uwaga 11.7 W dalszym ciągu będziemy rozważać tylko przypadek metryczny, najważniejsze przykłady to $E = \mathbb{R}^n$ lub E - przeliczalne (wtedy wszystkie funkcje na E są ciągłe, a $f \in C_0(E)$ oznacza, że $|f(x)| \geq \varepsilon$ jedynie dla skończonego wielu x). Jednak definicje i rezultaty, które będziemy formułować przenoszą się na przypadek dowolnych przestrzeni topologicznych lokalnie zwartych spełniających warunek Hausdorffa (tzn. takich, że każde dwa punktu są oddzielone zbiorami otwartymi).

Przykłady

a) Niech $E = \mathbb{R}$, $X_t = X_0 + t$ (deterministyczny ruch w prawo). X_t jest wówczas rodziną Markowa z funkcją przejścia $P_t(x, \Gamma) = \delta_{x+t}(\Gamma)$, a $P^t f(x) = f(x+t)$ i oczywiście $P^t: C_0(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ i spełniony jest warunek fellerowskości.

b) Niech $E = \mathbb{R}$, a funkcja przejścia jest zadana wzorem

$$P_t(x, \Gamma) = \begin{cases} \delta_{x+t}(\Gamma) & x > 0 \\ \delta_{x-t}(\Gamma) & x < 0 \\ \frac{1}{2}\delta_t(\Gamma) + \frac{1}{2}\delta_{-t}(\Gamma) & x = 0 \end{cases}.$$

Łatwo sprawdzić, że P_t spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa, więc istnieje rodzina Markowa $(X_t, \mathbf{P}_x)$ z funkcją przejścia P_t . Ponadto $\mathbf{P}_x(\forall t \geq 0 X_t = x+t) =$

1 dla $x > 0$, $\mathbf{P}_x(\forall_{t \geq 0} X_t = x - t) = 1$ dla $x < 0$ oraz $\mathbf{P}_0(X_t = t) = \mathbf{P}_0(X_t = -t) = 1/2$. Zatem

$$P^t f(x) = \mathbf{E}_x f(X_t) = \begin{cases} f(x+t) & x > 0 \\ f(x-t) & x < 0 \\ \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}f(-t) & x = 0 \end{cases},$$

czyli istnieje $f \in C_0(\mathbb{R})$ takie, że $P^t f \notin C_0(\mathbb{R})$, więc X_t nie jest rodziną fellerowską.

Naszym kolejnym celem jest podanie charakterystyki tych nieujemnych półgrup operatorów kontrakcji na $C_0(\mathbb{R})$, które pochodzą od rodzin Markowa. Przypomnijmy, że $P^t \mathbf{1} = \mathbf{1}$, ale, o ile E nie jest zwarta, to $\mathbf{1}$ nie należy do $C_0(E)$. Musimy więc zdefiniować odpowiedni warunek dla przestrzeni niezwartych.

Definicja 11.5 Załóżmy, że E jest σ -zwartą, lokalnie zwartą przestrzenią metryczną, a $T: C_0(E) \rightarrow C_0(E)$ jest nieujemnym operatorem liniowym kontrakcji. Powiemy, że T zachowuje jedynkę, jeśli dla dowolnego ciągu funkcji $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, $f_i \in C_0(E)$ takich, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ dla wszystkich $x \in E$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} T f_n(x) = 1$ dla wszystkich $x \in E$. Powiemy, że półgrupa operatorów P^t na $C_0(E)$ zachowuje jedynkę, jeśli każdy z operatorów P^t zachowuje jedynkę.

Uwaga 11.8 W przypadku gdy E jest zwarta T zachowuje jedynkę wtedy i tylko wtedy gdy $T\mathbf{1} = \mathbf{1}$. W przypadku ogólnym warunek ten oznacza, że T przedłuża się do operatora ciągłego z $C_\infty(E)$ w $C_\infty(E)$ (funkcje ciągłe z E w $\mathbb{R}$ mające granice w ∞) w taki sposób, że $T\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Twierdzenie 11.2 Załóżmy, że E jest lokalnie zwartą, σ -zwartą przestrzenią metryczną oraz $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. Niech ponadto $P^t: C_0(E) \rightarrow C_0(E)$, $t \geq 0$ będzie nieujemną półgrupą operatorów zachowujących jedynkę. Wówczas istnieje fellerowska jednorodna rodzina Markowa $(X_t, \mathbf{P}_x)$ dla której P^t jest półgrupą operatorów.

Dowód. Ustalmy $x \in E, t \geq 0$, wówczas przekształcenie $f \rightarrow P^t f(x)$ z $C_0(E)$ w $\mathbb{R}$ jest ciągłym nieujemnym funkcjonałem liniowym o normie równej 1. Stąd na podstawie twierdzenia Riesz o reprezentacji (Twierdzenie A.5) istnieje miara $P_t(x, \cdot)$ taka, że

$$P^t f(x) = \int_E f(y) P_t(x, dy).$$

Ponieważ $P^t \geq 0$ oraz $\|P^t\| = 1$, więc $P^t(x, \cdot)$ jest miarą probabilistyczną. Oczywiście $P_0(x, \Gamma) = \delta_0(\Gamma)$ (ponieważ $P^0 = \text{Id}$). By sprawdzić, że P_t jest funkcją przejścia wystarczy jeszcze tylko sprawdzić mierzalność przekształcenia $x \rightarrow P_t(x, \Gamma)$ dla $\Gamma \in \mathcal{E}$.

Założmy najpierw, że Γ jest zbiorem zwartym. Wtedy istnieje funkcja $f: E \rightarrow [0, 1]$ o zwartym nośniku taka, że $f = 1$ na zbiorze Γ i $f < 1$ poza zbiorem Γ (np. dla $E = \mathbb{R}^n$ możemy zdefiniować $f(x) := (1 - \text{dist}(x, \Gamma)) \vee 0$). Zauważmy, że f^n

też ma nośnik zwarty czyli należy do $C_0(E)$, $0 \leq f^n \leq 1$ oraz $f^n(x) \rightarrow I_\Gamma(x)$ dla wszystkich x przy $n \rightarrow \infty$. Zatem z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej otrzymujemy dla $x \in E$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P^t(f^n)(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f^n(y) P_t(x, dy) = \int_E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) \right) P_t(x, dy) \\ &= \int_E I_\Gamma(y) P_t(x, dy) = P_t(x, \Gamma). \end{aligned}$$

Stąd $x \rightarrow P_t(x, \Gamma)$ jest granicą punktową funkcji ciągłych, a więc jest funkcją mierzalną.

Niech $\mathcal{A} := \{\Gamma \in \mathcal{B}(E) : x \rightarrow P_t(x, \Gamma) \text{ mierzalne}\}$, wówczas nietrudno sprawdzić, że $\mathcal{A}$ jest λ -systemem. Jak już wiemy $\mathcal{A}$ zawiera π -system zbiorów zwartych, a więc z twierdzenia o $\pi - \lambda$ systemach σ -ciało generowane przez zbiory zwarte czyli $\mathcal{A} = \mathcal{B}(E)$. Wykazaliśmy zatem, że P_t jest funkcją przejścia.

Sprawdźmy teraz, że P_t spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa. Robimy to w podobny sposób co poprzednio - dla Γ zwartego i funkcji ciągłej f takiej jak powyżej mamy

$$\begin{aligned} \int_E P_{s+t}(x, dz) f^n(z) &= P^{s+t}(f^n)(x) = P^s P^t(f^n)(x) \\ &= \int_E P_s(x, dy) P^t(f^n)(y) = \int_E \int_E P_s(x, dy) P_t(y, dz) f^n(z). \end{aligned}$$

Biorąc granicę obu stron przy $n \rightarrow \infty$ i korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej dostajemy

$$\begin{aligned} P_{s+t}(x, \Gamma) &= \int_E P_{s+t}(x, dz) I_\Gamma(z) = \int_E \int_E P_s(x, dy) P_t(y, dz) I_\Gamma(z) \\ &= \int_E P_s(x, dy) P_t(y, \Gamma). \end{aligned}$$

Udowodniliśmy zatem, że λ -system

$$\mathcal{A} := \{\Gamma \in \mathcal{B}(E) : P_{s+t}(x, \Gamma) = \int_E P_s(x, dy) P_t(y, \Gamma)\}$$

zawiera π -system zbiorów zwartych, a więc z twierdzenia o $\pi - \lambda$ systemach $\mathcal{A} = \mathcal{B}(E)$ czyli P_t spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa.

Skoro zatem dana jest jednorodna funkcja przejścia P_t spełniająca równanie Chapmana-Kołmogorowa to wiemy, że istnieje jednorodny proces Markowa $(X_t, \mathbf{P}_x)$ mająca funkcję przejścia P_t , ale oznacza to, że

$$P^t f(x) = \int_E f(y) P_t(x, dy) = \mathbf{E}f(X_t),$$

czyli P^t jest półgrupą operatorów dla X_t . $\square$

11.2 Stacjonarne procesy Markowa

Definicja 11.6 *Proces stochastyczny $(X_t)_{t \in T}$ (gdzie $T = \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}$ lub $\mathbb{R}$) nazywamy stacjonarnym, jeśli dla wszystkich $h \in T$ proces $(X_{t+h})_{t \in T}$ ma ten sam rozkład co $(X_t)_{t \in T}$, czyli*

$$\forall_{t_1, \dots, t_n \in T} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}) \sim (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}).$$

Nasuwa się naturalne pytanie - kiedy jednorodny proces Markowa jest stacjonarny?

Definicja 11.7 *Niech $(X_t, \mathbf{P}_x)$ będzie jednorodnym procesem Markowa o wartościach w $(E, \mathcal{E})$ z funkcją przejścia P_t . Miarę μ na $(E, \mathcal{E})$ nazywamy miarą niezmienniczą odpowiadającą jednorodnej funkcji przejścia P_t (lub miarą niezmienniczą jednorodnej rodziny Markowa $(X_t, \mathbf{P}_x)$), jeśli*

$$\forall_t \forall_{\Gamma \in \mathcal{E}} \mu(\Gamma) = \int_E P_t(x, \Gamma) \mu(dx).$$

Uwaga 11.9 W przypadku, gdy μ jest miarą skończoną powyższa definicja oznacza, że $\mu = \mu P^t$ dla wszystkich t .

Przykłady

a) Na $E = \{0, 1\}$ określmy macierz przejścia

$$P^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 + 2e^{-t} & 2 - 2e^{-t} \\ 3 - 3e^{-t} & 2 + 3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Wówczas jedyną probabilistyczną miarą niezmienniczą dla P^t jest miara μ taka, że $\mu(\{0\}) = 3/5$, $\mu(\{1\}) = 2/5$.

b) Dla procesu Wienera nie istnieją skończone niezerowe miary niezmiennicze. Miarą niezmienniczą jest jednak w tym przypadku miara Lebesgue'a.

Fakt 11.3 a) *Jeśli $(X_t)_{t \in T}$ jest stacjonarnym procesem Markowa, to każdy jednowymiarowy rozkład μ_{X_t} tego procesu jest miarą niezmienniczą (taką samą dla wszystkich t).*

b) *Jeśli μ jest probabilistyczną miarą niezmienniczą dla funkcji przejścia P_t spełniającej równanie Chapmana-Kolmogorowa, E jest σ -zwartą przestrzenią metryczną $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$, to istnieje stacjonarny proces Markowa o funkcji przejścia P_t taki, że $\mu_{X_t} = \mu$ dla wszystkich t .*

Dowód. a) Wiemy, że $\mu_{X_t} P^s = \mu_{X_{t+s}} = \mu_{X_t}$ na mocy stacjonarności X .

b) Jeśli $(X_t, \mathbf{P}_x)$ jest rodziną Markowa o funkcji przejścia P_t to zdefiniujemy

$$\mathbf{P}_\mu(A) := \int_E \mathbf{P}_x(A) \mu(dx), \quad A \in \mathcal{F}_{\geq 0}^X.$$

Wówczas $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa na $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq 0}^X, \mathbf{P}_\mu)$ o funkcji przejścia P_t i rozkładzie początkowym μ . Co więcej

$$\mu_{X_t}(\Gamma) = \mathbf{P}_\mu(X_t \in \Gamma) = \int_E \mathbf{P}_x(X_t \in \Gamma) \mu(dx) = \int_E P_t(x, \Gamma) \mu(dx) = \mu(\Gamma)$$

oraz

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}_\mu(X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n) \\
&= \int_{\Gamma_n} \cdots \int_{\Gamma_1} \mu_{X_{t_1}}(dx_1) P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \\
&= \int_{\Gamma_n} \cdots \int_{\Gamma_1} \mu(dx_1) P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \\
&= \mathbf{P}_\mu(X_{t_1+h} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n+h} \in \Gamma_n). \square
\end{aligned}$$

12 Mocna własność Markowa

Wiemy, że jeśli znamy wartość procesu Markowa do chwili t , to dalsze zachowanie procesu odbywa się tak jakby proces startował w chwili t z losowego punktu $X_t(\omega)$. Często jednak znamy zachowanie się procesu do chwili losowej $\tau(\omega)$ - czy wówczas analogiczna własność jest prawdziwa?

Przykład.

Niech $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ będzie symetrycznym błędzeniem losowym po $\mathbb{Z}^3$. Wiadomo, że $|X_n| \rightarrow \infty$. Niech τ oznacza moment ostatniej wizyty X_n w punkcie 0 - wówczas $\tau < \infty$ p.n.. Ponadto $X_\tau(\omega) = 0$ oraz

$$\mathbf{P}(\exists_{n>\tau(\omega)} X_n = 0) = 0 \neq \mathbf{P}_0(\exists_{n>0} X_n = 0) > 0.$$

Powyższy przykład pokazuje, że nasze oczekiwania były zbyt optymistyczne - nawet w bardzo prostym przypadku nie możemy mieć postulowanej własności dla wszystkich τ . Jednak zwykle decydujemy o zatrzymaniu obserwacji na podstawie zachowania procesu, czyli naturalnie jest dodać założenie, że τ jest momentem zatrzymania. Przed sformułowaniem właściwej definicji sformułujemy techniczny fakt.

Fakt 12.1 *Niech $(X_t, \mathbf{P}_x)$ będzie jednorodną rodziną Markowa z funkcją przejścia (P_t) . Załóżmy, że $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ jest pewną filtracją taką, że $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{\geq 0}^X$ oraz X_t jest progresywnie mierzalny względem $\mathcal{F}_t$. Wówczas dla wszystkich $\Gamma \in \mathcal{E}$ funkcja $(t, x) \rightarrow P_t(x, \Gamma)$ jest mierzalna jako funkcja z $(T \times E, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{E})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

Dowód. Dla $T = \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{B}(\mathbb{Z}_+)$ to wszystkie podzbiory $\mathbb{Z}_+$ czyli funkcja $(n, x) \rightarrow f_n(x)$ jest mierzalna wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego n funkcja $x \rightarrow f_n(x)$ jest mierzalna. Zatem w tym przypadku nie mamy co dowodzić. Możemy więc przyjąć $T = \mathbb{R}_+$.

Określmy

$$A := \{(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : X_s(\omega) \in \Gamma\}.$$

Wówczas na podstawie progresywnej mierzalności X dostajemy

$$A \cap ([0, u] \times \Omega) = \{(s, \omega) : 0 \leq s \leq u, X_s(\omega) \in \Gamma\} \in \mathcal{B}([0, u]) \otimes \mathcal{F}_u \subset \mathcal{B}([0, u]) \otimes \mathcal{F}_{\geq 0}^X.$$

Stąd $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_{\geq 0}^X$. Zauważmy, że

$$P_t(x, \Gamma) = \mathbf{P}_x(X_t \in \Gamma) = \mathbf{P}_x(\omega: (t, \omega) \in A),$$

wystarczy zatem iż pokażemy, że dla wszystkich $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_{\geq 0}^X$ funkcja $(t, x) \rightarrow \mathbf{P}_x(\omega: (t, \omega) \in A)$ jest mierzalna.

Jeśli $A = C \times B$, $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $B \in \mathcal{F}_{\geq 0}^X$ to

$$\mathbf{P}_x(\omega: (t, \omega) \in A) = I_C(t) \mathbf{P}_x(B)$$

jest funkcją mierzalną jako iloczyn funkcji mierzalnych. Niech

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_{\geq 0}^X: (t, x) \rightarrow \mathbf{P}_x(\omega: (t, \omega) \in A) \text{ jest mierzalna}\},$$

wówczas $\mathcal{A}$ jest λ systemem zawierającym π -system zbiorów postaci $C \times B$, $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $B \in \mathcal{F}_{\geq 0}^X$, a zatem $\mathcal{A}$ zawiera σ ciało generowane przez powyższy π -system, czyli $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_{\geq 0}^X$. $\square$

Definicja 12.1 Niech $(X_t, \mathbf{P}_x)$ będzie jednorodną rodziną Markowa z funkcją przejścia (P_t) , $\mathcal{F}_t$ zaś filtracją taką, że dla wszystkich $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{\geq 0}^X$. Mówimy, że rodzina $(X_t, \mathbf{P}_x)$ jest mocno markowska (lub ma mocną własność Markowa) względem filtracji $\mathcal{F}_t$, jeśli zachodzą następujące warunki

- a) X_t jest progresywnie mierzalny względem $\mathcal{F}_t$;
- b) Dla każdego momentu Markowa τ i dla każdej funkcji mierzalnej $\eta = \eta(\omega)$ ze zbioru $\Omega_\tau := \{\tau < \infty\}$ o wartościach w $T \cup \{\infty\}$, która jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalna zachodzi

$$\forall x \in E, \Gamma \in \mathcal{E} \forall A \subset \Omega_\tau \cap \Omega_\eta := \{\tau, \eta < \infty\}, A \in \mathcal{F}_\tau$$

$$\mathbf{P}_x(A \cap \{X_{\tau+\eta} \in \Gamma\}) = \int_A P_\eta(X_\tau, \Gamma) \mathbf{P}_x(d\omega) = \mathbf{E}_x I_A P_\eta(X_\tau, \Gamma).$$

Uwaga 12.1 Całka w części b) definicji jest dobrze określona, gdyż zmienne η, X_τ są $\mathcal{F}_\tau$ -mierzalne, a funkcja $(t, x) \rightarrow P_t(x, \Gamma)$ jest, na podstawie faktu 12.1, mierzalna, czyli $P_\eta(X_\tau, \Gamma)$ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalna na zbiorze $\Omega_\tau \cap \Omega_\eta$.

Uwaga 12.2 Warunek b) często zapisuje się jako

$$\mathbf{P}_x(X_{\tau+\eta} \in \Gamma | \mathcal{F}_\tau) = P_\eta(X_\tau, \Gamma) \text{ } \mathbf{P}_x\text{-p.n. na zbiorze } \Omega_\tau \cap \Omega_\eta.$$

Uwaga 12.3 Warunek b) implikuje, że dla dowolnej funkcji mierzalnej ograniczonej f zachodzi

$$\mathbf{P}_x(f(X_{\tau+\eta}) | \mathcal{F}_\tau) = P^\eta f(X_\tau) \text{ } \mathbf{P}_x\text{-p.n. na zbiorze } \Omega_\tau \cap \Omega_\eta$$

czyli, że dla każdego $A \subset \Omega_\tau \cap \Omega_\eta$, $A \in \mathcal{F}_\tau$

$$\mathbf{E}_x f(X_{\tau+\eta}) I_A = \mathbf{E}_x P^\eta f(X_\tau) I_A.$$

Fakt 12.2 *Każdy jednorodny łańcuch Markowa $(X_n, \mathbf{P}_x)$ o dowolnej przestrzeni stanów $(E, \mathcal{E})$ jest procesem mocnomarkowskim względem filtracji $(\mathcal{F}_{\leq n}^X)$.*

Dowód. Warunek a) definicji jest spełniony, bo dla zbioru dyskretnego T progresywna mierzalność jest równoważna adaptowalności. Załóżmy więc, że τ, η, A są jak w części b) definicji. Mamy wówczas

$$\mathbf{P}_x(A \cap (X_{\tau+\eta} \in \Gamma)) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \mathbf{P}_x(A \cap (\tau = m, \eta = n, X_{n+m} \in \Gamma)) = I$$

oraz

$$\int_A P_\eta(X_\tau, \Gamma) \mathbf{P}_x(d\omega) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \int_{A \cap \{\tau=m, \eta=n\}} P_n(X_m, \Gamma) = II.$$

Z $\mathcal{F}_\tau$ -mierzalności A i η wynika, że $A \cap \{\tau = m\} \in \mathcal{F}_\tau$ czyli $B_{n,m} := A \cap \{\tau = m, \eta = n\} \in \mathcal{F}_{\leq m}^X$. Z własności Markowa $\mathbf{P}_x(X_{n+m} \in \Gamma | \mathcal{F}_{\leq m}) = P_n(X_m, \Gamma)$, $\mathbf{P}_x$ -p.n., więc

$$\mathbf{P}_x(X_{n+m} \in \Gamma \cap B_{n,m}) = \int_{B_{n,m}} P_n(X_m, \Gamma) \mathbf{P}_x(d\omega)$$

czyli każdy składnik sumy I jest równy odpowiedniemu składnikowi sumy II .

□

W analogiczny sposób wykazujemy

Fakt 12.3 *Niech $(X_t, \mathbf{P}_x)$ będzie dowolną rodziną Markowa oraz $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{\leq t}^X$. Wówczas warunek b) Definicji 12.1 jest spełniony jeśli τ i η przyjmują przeliczalnie wiele wartości.*

Podamy teraz prosty przykład zastosowania mocnej własności Markowa w przypadku dyskretnym

Wniosek 12.4 *Niech $X_0, X_1, \dots$ będzie dyskretnym łańcuchem Markowa z macierzą przejścia $(p_n(x, y))_{x,y \in E}$. Określmy*

$$f_n(x, y) = \mathbf{P}_x(X_n = y, X_1 \neq y, \dots, X_{n-1} \neq y)$$

prawdopodobieństwo, że startując z x pierwsza wizyta w y nastąpi w chwili n . Wówczas

$$p_n(x, y) = f_n(x, y) + f_{n-1}(x, y)p_1(x, y) + \dots + f_1(x, y)p_{n-1}(x, y).$$

Dowód. Niech $\tau := \inf\{n > 0: X_n = y\}$, $\eta := (n - \tau) \vee 0$, $\Gamma := \{y\}$ oraz $A := \{\tau \leq n\}$. Wówczas

$$\mathbf{P}_x(A \cap (X_{\tau+\eta} \in \Gamma)) = \mathbf{P}_x(A \cap (X_n = y)) = \mathbf{P}_x(X_n = y) = p_n(x, y)$$

oraz

$$\int_A P_\eta(X_\tau, \Gamma) = \sum_{k=1}^n \int_{\{\tau=k\}} P_{n-k}(X_k, \Gamma) = \sum_{k=1}^n \int_{\{\tau=k\}} p_{n-k}(x, y) d\mathbf{P}_x$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}_x(\tau = k) p_{n-k}(x, y) = f_n(x, y) + f_{n-1}(x, y) p_1(x, y) + \dots + f_1(x, y) p_{n-1}(x, y).$$

Czyli dowodzona teza natychmiast wynika z mocnej własności Markowa. $\square$

Przykład procesu Markowa bez mocnej własności Markowa

Niech $(W_t, \mathbf{P}_x)$ będzie procesem Markowa, zdefiniujmy proces X wzorem

$$X_t(\omega) := \begin{cases} W_t(\omega) & \text{jeśli } W_0(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{jeśli } W_0(\omega) = 0 \end{cases}.$$

Wówczas $(X_t, \mathbf{P}_x)$ jest rodziną Markowa z funkcją przejścia

$$P_t(x, \Gamma) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\Gamma} \exp(-\frac{(y-x)^2}{2t}) dy & \text{jeśli } x \neq 0 \\ \delta_0(\Gamma) & \text{jeśli } x = 0 \end{cases}.$$

Istotnie, P_t jest funkcją przejścia i wystarczy udowodnić, że

$$\forall_{t,x \geq 0} \mathbf{P}_x(X_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{F}_{\leq t}^X) = P_h(X_t, \Gamma) \mathbf{P}_x \text{ p.n..} \quad (8)$$

Jeśli $x \neq 0$, to $\mathbf{P}_x(X_t \equiv W_t) = \mathbf{P}_x(W_0 \neq 0) = 1$, czyli $\mathbf{P}_x(X_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{F}_{\leq t}^X) = \mathbf{P}_x(W_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{F}_{\leq t}^X) \mathbf{P}_x \text{ p.n..}$ Ponadto $\mathbf{P}_x(X_t = 0) = \mathbf{P}_x(W_t = 0) = 0$, więc $P_h(X_t, \Gamma) = \tilde{P}_h(W_t, \Gamma) \mathbf{P}_x \text{ p.n.,}$ gdzie $\tilde{P}_t$ jest funkcją przejścia dla procesu Wienera. Zatem (8) dla $x \neq 0$ wynika z własności Markowa dla procesu Wienera. Dla $x = 0$ mamy natomiast

$$\mathbf{P}_0(X_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{F}_{\leq t}^X) = \delta_0(\Gamma) = P_h(0, \Gamma) = P_h(X_t, \Gamma) \mathbf{P}_0 \text{ p.n..}$$

Pokażemy teraz, że X nie ma mocnej własności Markowa. Określmy

$$\tau := \inf\{t: X_t \in \Gamma\}, \quad \eta := (1 - \tau) \vee 0, \quad A := \{\tau \leq 1\}, \quad \Gamma := \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Wówczas dla $x \neq 0$

$$\mathbf{P}_x(A \cap \{X_{\tau+\eta} \in \Gamma\}) = \mathbf{P}_x(\tau \leq 1, X_1 \neq 0) = \mathbf{P}_x(\tau \leq 1) > 0$$

oraz

$$\int_A P_{\eta}(X_{\tau}, \Gamma) d\mathbf{P}_x = \int_{\tau \leq 1} P_{\eta}(0, \Gamma) d\mathbf{P}_x = 0. \square$$

Twierdzenie 12.5 *Załóżmy, że E jest lokalnie zwartą, σ -zwartą przestrzenią metryczną, a $(X_t, \mathbf{P}_x)_{t \geq 0}$ jest fellerowską rodziną Markowa o prawostronnie ciągłych trajektoriach. Wówczas X_t ma mocną własność Markowa względem $\mathcal{F}_{\leq t+}^X$ (czyli również względem $\mathcal{F}_{\leq t}^X$).*

Dowód. Najpierw zauważmy, iż wystarczy udowodnić, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ względem $\mathcal{F}_{\leq t+}^X$ oraz zmiennej losowej $\mathcal{F}_{\tau}$ mierzalnej $\eta: \Omega_{\tau} \rightarrow \mathbb{R}_+$ zachodzi

$$\forall_{f \in C_0(E)} \forall_{A \subset \Omega_{\tau} \cap \Omega_{\eta}, A \in \mathcal{F}_{\tau}} \mathbf{E}_x f(X_{\tau+\eta}) I_A = \mathbf{E}_x P^{\eta} f(X_{\tau}) I_A. \quad (9)$$

Istotnie, jeśli zachodzi (9) i $\Gamma \subset E$ jest zbiorem zwartym, to możemy znaleźć funkcję $f \in C_0(E)$ taką, że $f(x) = 1$ dla $x \in \Gamma$ oraz $0 \leq f(x) < 1$ dla $x \notin \Gamma$. Stosujemy wówczas (9) dla f^n w miejsce f , przechodzimy z n do nieskończoności i dostajemy

$$\forall \Gamma \subset E \text{ zwarty} \quad \mathbf{P}_x(A \cap \{X_{\tau+\eta} \in \Gamma\}) = \mathbf{E}_x P_\eta(X_\tau, \Gamma) I_A.$$

Stąd w zwykły sposób (przy użyciu twierdzenia o $\pi - \lambda$ układach) dowodzimy, że powyższy warunek zachodzi dla wszystkich $\Gamma \in \mathcal{B}(E)$ czyli X_t jest mocno markowski.

Tożsamość (9) udowodnimy w trzech krokach.

KROK I. Zmienne τ i η przyjmują przeliczalnie wiele wartości, τ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{\leq t}^X$, a η i A są $\mathcal{F}_{\leq \tau}^X$ mierzalne. Wówczas (9) zachodzi na mocy Faktu (12.3).

KROK II. Zmienna τ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{\leq t+}^X$, a η jest $\mathcal{F}_{\leq \tau+}^X$ mierzalna, ale przyjmuje jedynie przeliczalnie wiele wartości. Określmy $\tau_n := 2^{-n}(\lfloor 2^n \tau \rfloor + 1)$, wówczas $\tau_n > \tau$, τ_n przyjmuje tylko wartości $2^{-n}k$, $k = 1, 2, \dots$ oraz ∞ . Co więcej τ_n jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{\leq t}^X$ i $\mathcal{F}_{\leq \tau+}^X \subset \mathcal{F}_{\leq \tau_n}^X$. Zatem η oraz A są $\mathcal{F}_{\leq \tau}^X$ mierzalne i na mocy Kroku I,

$$\mathbf{E}_x f(X_{\tau_n+\eta}) I_A = \mathbf{E}_x P^n f(X_{\tau_n}) I_A.$$

Ponieważ $\tau_n \rightarrow \tau$ i $\tau_n > \tau$, więc na mocy prawostronnej ciągłości X dostajemy $f(X_{\tau_n+\eta}) I_A \rightarrow f(X_{\tau+\eta}) I_A$. Oszacowanie $|f(X_{\tau_n+\eta}) I_A| \leq \|f\|$ oraz twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej implikuje

$$\mathbf{E}_x f(X_{\tau_n+\eta}) I_A \rightarrow \mathbf{E}_x f(X_{\tau+\eta}) I_A.$$

Z drugiej strony dla wszystkich ω , $P^{n(\omega)} f \in C_0(E)$ (fellerowskość), czyli na zbiorze Ω_τ , $P^n f(X_{\tau_n}) \rightarrow P^n f(X_\tau)$. Zatem w podobny sposób co poprzednio dostajemy

$$\mathbf{E}_x P^n f(X_{\tau_n}) I_A \rightarrow \mathbf{E}_x P^n f(X_\tau) I_A.$$

KROK III. Zmienne τ i η spełniają tylko wymagane w definicji założenia. Określamy wówczas $\eta_n := 2^{-n}(\lfloor 2^n \eta \rfloor + 1)$ i zauważamy, że $\eta_n \rightarrow \eta$, $\eta_n \geq \eta$, $\sigma(\eta_n) \subset \sigma(\eta) \subset \mathcal{F}_{\leq \tau+}^X$. Zatem τ i η_n spełniają założenia Kroku II, czyli jak już wiemy

$$\mathbf{E}_x f(X_{\tau+\eta_n}) I_A = \mathbf{E}_x P^{\eta_n} f(X_\tau) I_A.$$

Ponadto z prawostronnej ciągłości $f(X_{\tau+\eta_n}) \rightarrow f(X_{\tau+\eta})$ i jak poprzednio twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej implikuje

$$\mathbf{E}_x f(X_{\tau+\eta_n}) I_A \rightarrow \mathbf{E}_x f(X_{\tau+\eta}) I_A.$$

Zauważmy wreszcie, że dla $f \in C_0(E)$, $x \in E$, funkcja $t \rightarrow P^t f(x)$ jest prawostronnie ciągła (bo $P^t f(x) = \mathbf{E}_x f(X_t) \rightarrow \mathbf{E}_x f(X_{t_0})$ przy $t \rightarrow t_0+$), zatem $P^{\eta_n} f(X_\tau) I_A \rightarrow P^\eta f(X_\tau) I_A$ i

$$\mathbf{E}_x P^{\eta_n} f(X_\tau) I_A \rightarrow \mathbf{E}_x P^\eta f(X_\tau) I_A. \square$$

Uwaga 12.4 W dowodzie twierdzenia nie korzystaliśmy z tego, że rozważane funkcje znikają w ∞ . Zamiast zatem założeń o fellerowskości X możemy zakładać, że P^t przeprowadza funkcje ciągle ograniczone na ciągle, a E jest dowolną przestrzenią metryczną.

12.1 *Mocna własność Markowa a operatory translacji*

Przypomnijmy, że operator translacji θ_t jest zdefiniowany wzorem

$$\forall_{s \in T} X_s(\theta_t \omega) = X_{s+t}(\omega). \quad (10)$$

Definicja 12.2 Jeśli $(\theta_t)_t$ jest operatorem translacji, a τ zmienną losową o wartościach w $T \cup \{\infty\}$, to definiujemy operator $\theta_\tau: \Omega_\tau \rightarrow \Omega$ wzorem $\theta_\tau \omega := \theta_{\tau(\omega)}(\omega)$. Dla podzbioru $A \subset \Omega$ i zmiennej losowej η definiujemy $\theta_\tau^{-1}A := \{\omega \in \Omega_\tau: \theta_\tau \omega \in A\}$ oraz $\theta_\tau \eta(\omega) := \eta(\theta_\tau \omega)$, $\omega \in \Omega_\tau$.

Przykłady

- $A = \{X_t \in \Gamma\}$, $\theta_\tau^{-1}(A) = \{\tau < \infty, X_{t+\tau} \in \Gamma\}$;
- $B = \{\forall_{t \geq 0} X_t \geq 0\}$, $\theta_\tau^{-1}(B) = \{\tau < \infty, \forall_{t \geq 0} X_{t+\tau} \geq 0\} = \{\tau < \infty, \forall_{t \geq \tau} X_t \geq 0\}$;
- $C = \{\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = 0\}$, $\theta_\tau^{-1}(C) = \{\tau < \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} X_{t+\tau} = 0\} = \{\tau < \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} X_t = 0\}$.

Fakt 12.6 Załóżmy, że X_t jest progresywnie mierzalny względem filtracji $\mathcal{F}_t$ zawartej w $\mathcal{F}_{\geq 0}^X$ i τ jest momentem zatrzymania. Wówczas

- Dla $A \in \mathcal{F}_{\geq 0}^X$, $\theta_\tau^{-1}A \in \mathcal{F}_{\geq 0}^X$ oraz $\theta_\tau^{-1}A$ nie zależy od wyboru funkcji θ_t spełniającej (10).
- Dla dowolnej zmiennej η , $\mathcal{F}_{\geq 0}^X$ mierzalnej, zmienna $\theta_\tau \eta$, określona na Ω_τ , jest $\mathcal{F}_{\geq 0}^X$ mierzalna oraz $\theta_\tau \eta$ nie zależy od wyboru funkcji θ_t spełniającej (10).

Dowód. Tak jak w dowodzie Faktu 10.1 wystarczy udowodnić punkt a) dla $A = \{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}$, ale wówczas $\theta_\tau^{-1}A = \{X_{t_1+\tau} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n+\tau} \in \Gamma_n\}$ nie zależy od wyboru θ_t . Progresywna mierzalność X implikuje mierzalność $X_{t+\tau}$, stąd $\theta_\tau^{-1}A \in \mathcal{F}_{\geq 0}^X$. $\square$

Fakt 12.7 Jeśli $(X_t, \mathbf{P}_x)$ ma mocną własność Markowa, to

$$\forall_{B \in \mathcal{F}_{\geq 0}^X} \mathbf{P}_x(\theta_\tau^{-1}B | \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{P}_{X_\tau}(B) \mathbf{P}_x \text{ p.n. na zbiorze } \Omega_\tau \quad (11)$$

(tzn. $\mathbf{P}_x(\theta_\tau^{-1}B \cap A) = \mathbf{E}_x \mathbf{P}_{X_\tau}(B) I_A$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}_\tau$, $A \subset \Omega_\tau$).

Dowód. Wystarczy (stosując twierdzenie o $\pi - \lambda$ układach) wykazać, że (11) zachodzi dla $B = \{X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}$, $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Wówczas $\theta_\tau^{-1}B = \{\tau < \infty, X_{t_1+\tau} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n+\tau} \in \Gamma_n\}$ oraz

$$\mathbf{P}_x(\theta_\tau^{-1}B | \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}_x(I_{\Gamma_1}(X_{t_1+\tau}) \cdots I_{\Gamma_n}(X_{t_n+\tau}) | \mathcal{F}_\tau),$$

$$\mathbf{P}_{X_\tau}(B) = \mathbf{E}_{X_\tau}(I_{\Gamma_1}(X_{t_1+\tau}) \cdots I_{\Gamma_n}(X_{t_n+\tau})).$$

Wystarczy zatem, że udowodnimy ogólniejszy fakt, że dla dowolnych funkcji mierzalnych ograniczonych $f_1, \dots, f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}_x(f_1(X_{t_1+\tau}) \cdots f_n(X_{t_n+\tau}) | \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}_{X_\tau}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n})) \mathbf{P}_x \text{ p.n. na zbiorze } \Omega_\tau. \quad (12)$$

Dla $n = 1$, (12) wynika z mocnej własności Markowa (dla $\eta = t_1$). By wykazać krok indukcyjny zauważmy, że na mocy przypadku $n = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x(f_1(X_{t_1+\tau}) \cdots f_n(X_{t_n+\tau}) | \mathcal{F}_\tau) &= \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_x(f_1(X_{t_1+\tau}) \cdots f_n(X_{t_n+\tau}) | \mathcal{F}_{t_{n-1}+\tau}) | \mathcal{F}_\tau) \\ &= \mathbf{E}(f_1(X_{t_1+\tau}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}+\tau}) \mathbf{E}_x(f_n(X_{t_n+\tau}) | \mathcal{F}_{t_{n-1}+\tau}) | \mathcal{F}_\tau) \\ &= \mathbf{E}(f_1(X_{t_1+\tau}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}+\tau}) g(X_{t_{n-1}+\tau}) | \mathcal{F}_\tau), \end{aligned}$$

gdzie $g(x) = \mathbf{E}_x f_n(X_{t_n-t_{n-1}})$. Zatem na mocy założenia indukcyjnego mamy $\mathbf{P}_x$ p.n. na zbiorze Ω_τ

$$\mathbf{E}_x(f_1(X_{t_1+\tau}) \cdots f_n(X_{t_n+\tau}) | \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}_{X_\tau}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) g(X_{t_{n-1}})).$$

Ale dla dowolnego $y \in E$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_y(f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n})) &= \mathbf{E}_y(f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) \mathbf{E}_y(f_n(X_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_{n-1}})) \\ &= \mathbf{E}_y(f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) g(X_{t_{n-1}})), \end{aligned}$$

na mocy własności Markowa. $\square$

Uwaga 12.5 Przy założeniach powyższego faktu, dla dowolnej zmiennej Y ograniczonej i $\mathcal{F}_{\geq 0}^X$ mierzalnej

$$\mathbf{E}_x(\theta_\tau Y | \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}_{X_\tau} Y \mathbf{P}_x \text{ p.n. na zbiorze } \Omega_\tau. \quad (13)$$

Dowód. Dla $Y = I_B$, (13) wynika z (11), stąd otrzymujemy tezę dla funkcji prostych, a przez jednostajną aproksymację dla dowolnych zmiennych mierzalnych ograniczonych. $\square$

Wniosek 12.8 (Prawo Zero Jedynkowe Blumenthala) *Jeśli $(X_t, \mathbf{P}_x)$ ma mocną własność Markowa względem $\mathcal{F}_{\leq t+}^X$, to dla dowolnego $B \in \mathcal{F}_{\leq 0+}^X$ i $x \in E$ zachodzi $\mathbf{P}_x(B) \in \{0, 1\}$.*

Dowód. Niech $\tau = 0$ i $B \in \mathcal{F}_{\leq 0+}^X$, korzystając z mocnej własności Markowa i Faktu 12.7 dostajemy

$$\mathbf{P}_x(B) = \mathbf{P}_x(B \cap \theta_0^{-1} B) = \mathbf{E}_x \mathbf{P}_{X_0}(B) I_B = \mathbf{E}_x \mathbf{P}_x(B) I_B = \mathbf{P}_x(B)^2. \square$$

13 Operatory infinitesimalne

W części tej pokażemy, że z każdą półgrupą operatorów da się związać pewien operator zdefiniowany na liniowej (zazwyczaj niedomkniętej) podprzestrzeni. Operator taki nazywamy operatorem infinitesimalnym bądź generatorem półgrupy, gdyż na ogół jednoznacznie wyznacza on półgrupę. Zobaczymy też związki między własnościami półgrup oraz ich generatorów.

Zacznijmy od ogólnej definicji.

Definicja 13.1 *Załóżmy, że $(F, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha, a $(P^t)_{t \geq 0}$ jest półgrupą ograniczonych operatorów liniowych na F (tzn. $P^t: F \rightarrow F$ liniowe ograniczone, $P^{t+s} = P^t P^s$, $P^0 = \text{Id}$). Definiujemy wówczas*

$$D_A := \{f \in F: \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{P^t f - f}{t} \text{ istnieje w } F\}$$

oraz

$$Af := \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{P^t f - f}{t}, \quad f \in D_A.$$

Operator A określony na zbiorze D_A nazywamy operatorem infinitesimalnym (generatorem) półgrupy P^t , a D_A dziedziną generatora A .

Fakt 13.1 *Zbiór D_A jest podprzestrzenią liniową F , a $A: D_A \rightarrow F$ jest liniowy.*

Dowód. Jest to natychmiastowa konsekwencja liniowości granicy, $\square$

Przykłady

1. Załóżmy, że $A: F \rightarrow F$ jest ograniczonym operatorem liniowym, a

$$P^t := e^{tA} = \text{Id} + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots$$

Wtedy $P^0 = \text{Id}$,

$$\|P^t\| \leq 1 + t\|A\| + \frac{t^2 \|A\|^2}{2!} + \frac{t^3 \|A\|^3}{3!} + \dots = e^{t\|A\|}$$

i nieco żmudny, choć standardowy rachunek pokazuje, że $P^{t+s} = P^t P^s$ czyli P^t jest półgrupą ograniczonych operatorów liniowych na F . Mamy

$$\frac{P^t f - f}{t} = Af + \frac{t}{2!} A^2 f + \frac{t^2}{3!} A^3 f + \dots,$$

czyli

$$\left\| \frac{P^t f - f}{t} - Af \right\| \leq \frac{t}{2!} \|A\|^2 \|f\| + \frac{t^2}{3!} \|A\|^3 \|f\| + \dots$$

$$\leq t\|A\|^2 \|f\| (1 + t\|A\| + t^2\|A\|^2 + \dots) = \frac{t\|A\|^2 \|f\|}{1 - t\|A\|} \rightarrow 0 \text{ przy } t \rightarrow 0+.$$

Zatem $D_A = F$ oraz generatorem e^{tA} jest A .

2. Dla jednorodnych rodzin Markowa $(X_t, \mathbf{P}_x)$ z przestrzenią stanów E naturalnym wyborem F jest $B(E)$ lub $C_0(E)$ dla rodzin fellerowskich. Wówczas $P^t f(x) = \mathbf{E}_x f(X_t)$ oraz

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{E}_x f(X_t) - f(x)}{t}.$$

2a) Niech $X_t = X_0 + t$ deterministyczny ruch w prawo. Wówczas dla $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'_+(x) \text{ (pochodna prawostronna w } x\text{)}$$

oraz

$$D_A = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \text{ zbiega jednostajnie do funkcji z } B(E)\}.$$

Niech $f \in D_A$, wówczas dla $t \leq t_0$, $\|t^{-1}(f(x+t) - f(x)) - Af(x)\| \leq 1$, czyli

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| \leq t + t\|Af\| \rightarrow 0 \text{ gdy } t \rightarrow 0+.$$

Stąd łatwo wynika, że f jest funkcją ciągłą, a zatem Af jest granicą jednostajną funkcji ciągłych, czyli też jest funkcją ciągłą. Nietrudno stąd wywnioskować, że

$$D_A = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ różniczkowalne, o pochodnej ciągłej i ograniczonej}\}$$

oraz $Af(x) = f'(x)$ dla $f \in D_A$.

2b) Dla procesu Wienera $(W_t, \mathbf{P}_x)$ można udowodnić, że D_A zawiera $C_u^{(2)}(\mathbb{R})$ - zbiór funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalnych ograniczonych o pierwszych dwu pochodnych ograniczonych i jednostajnie ciągłych oraz $Af = \frac{1}{2}f''(x)$ dla $f \in C_u^{(2)}(\mathbb{R})$.

Ogólniej dla d wymiarowego procesu Wienera $C_u^{(2)}(\mathbb{R}) \subset D_A$ oraz $Af = \frac{1}{2}\Delta f$ dla $f \in C_u^{(2)}(\mathbb{R}^n)$.

Uwaga 13.6 Dokładne wyznaczenie D_A bywa bardzo trudnym (często beznadziejnym) zadaniem.

13.1 Podprzestrzeń F_0 , C_0 -półgrupy

W dalszej części będziemy rozważać jedynie półgrupy kontrakcji tzn. takie, że $\|P^t f\| \leq \|f\|$ dla wszystkich $f \in F$.

Definicja 13.2 Dla półgrupy P^t operatorów na przestrzeni Banacha F określamy

$$F_0 := \{f \in F: \lim_{t \rightarrow 0+} \|P^t f - f\| = 0\}.$$

Fakt 13.2 Załóżmy, że $P^t: F \rightarrow F$ jest półgrupą kontrakcji, $A: D_A \rightarrow F$ jest zaś jej generatorem. Wówczas

- a) F_0 jest domkniętą liniową podprzestrzenią F (czyli $(F_0, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha),
- b) Dla $f \in F_0$ funkcja $t \rightarrow P^t f$ jest ciągła na $[0, \infty)$, w szczególności $P^t F_0 \subset F_0$,
- c) $D_A \subset F_0$ oraz $AD_A \subset F_0$ (tzn. jeśli $f \in D_A$, to $f, P^t f \in F_0$).

Dowód. a) Liniowość F_0 jest oczywista, trzeba wykazać domkniętość. Niech $f_n \in F_0$ takie, że $f_n \rightarrow f \in F$, wtedy

$$\|P^t f - f\| \leq \|P^t f - P^t f_n\| + \|P^t f_n - f_n\| + \|f_n - f\| \leq \|P^t f_n - f_n\| + 2\|f_n - f\|.$$

Dla $\varepsilon > 0$ dobierzmy n takie, że $\|f_n - f\| \leq \varepsilon/3$ i t_0 takie, że $\|P^t f_n - f_n\| \leq \varepsilon/3$ dla $t \leq t_0$. Wówczas $\|P^t f - f\| \leq \varepsilon$ dla $t \leq t_0$, czyli $\|P^t f - f\| \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0+$, więc $f \in F_0$.

b) Mamy dla $s \leq t$

$$\|P^t f - P^s f\| = \|P^s(P^{t-s} f - f)\| \leq \|P^{t-s} f - f\|,$$

skąd łatwo wynika jednostajna ciągłość $t \rightarrow P^t f$ dla $f \in F_0$.

c) Niech $f \in D_A$, wtedy $t^{-1}(P^t f - f)$ jest funkcją zbieżną przy $t \rightarrow 0+$, a zatem ograniczoną w otoczeniu zera, czyli $\|t^{-1}(P^t f - f)\| \leq M$ dla $t \leq t_0$. Stąd $\|P^t f - f\| \leq Mt \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0+$, więc $f \in F_0$. Z liniowości F_0 i punktu b), również $t^{-1}(P^t f - f) \in F_0$ dla $t > 0$, a zatem $Af = \lim_{t \rightarrow 0+} t^{-1}(P^t f - f) \in F_0$ z domkniętości F_0 . $\square$

Fakt 13.3 Niech P^t będzie półgrupą kontrakcji oraz $f \in D_A$. Wówczas $P^t f \in D_A$ dla wszystkich t , funkcja $t \rightarrow P^t f$ jest różniczkowalna w sposób ciągły oraz

$$\frac{d}{dt} P^t f = AP^t f = P^t Af.$$

Co więcej

$$P^t f = f + \int_0^t AP^s f ds = f + \int_0^t P^s Af ds.$$

Dowód. Ustalmy $f \in D_A$, wtedy

$$\frac{P^{t+h} f - P^t f}{h} = \frac{P^h P^t f - P^t f}{h} = P^t \left(\frac{P^h f - f}{h} \right).$$

Zatem z ciągłości P^t

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P^{t+h} f - P^t f}{h} = P^t \left(\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P^h f - f}{h} \right) = P^t Af,$$

czyli $P^t f \in D_A$ oraz $AP^t f = P^t Af$, pokazaliśmy też, że $\lim_{h \rightarrow 0+} h^{-1}(P^{t+h} f - P^t f) = P^t Af$. Musimy jeszcze policzyć lewostronną pochodną P^t czyli

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{P^{t+h} f - P^t f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P^{t-h} f - P^t f}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P^t f - P^{t-h} f}{h}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \left\| \frac{P^t f - P^{t-h} f}{h} - P^t A f \right\| &= \left\| P^{t-h} \left(\frac{P^h f - f}{h} - A f \right) \right\| + \left\| P^{t-h} (A f - P^h A f) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{P^h f - f}{h} - A f \right\| + \|A f - P^h A f\| \rightarrow 0 \text{ przy } h \rightarrow 0+, \end{aligned}$$

bo $f \in D_A$ oraz $A f \in F_0$. Zatem wykazaliśmy, że $\lim_{h \rightarrow 0+} h^{-1}(P^{t+h} f - P^t f) = P^t A f$ czyli rzeczywiście $\frac{d}{dt} P^t f = P^t A f = A P^t f$. Ciągłość pochodnej wynika stąd, że $A D_A \subset F_0$. Wreszcie ostatnia część faktu wynika z podstawowego twierdzenia analizy matematycznej. $\square$

Uwaga 13.7 Jeśli $F_0 = F$ to półgrupę nazywamy C_0 półgrupą. Dla C_0 półgrup można udowodnić, że D_A jest gęste w F oraz, że generator jednoznacznie wyznacza półgrupę tzn. jeśli P^t i T^t dwie C_0 półgrupy o tym samym generatorze $A: D_A \rightarrow F$ to $P^t = T^t$ dla wszystkich t .

Fakt 13.4 (Zasada maksimum) Niech P^t będzie półgrupą generowaną przez jednorodny proces Markowa $(X_t, \mathbf{P}_x)$. Wówczas jeśli $f \in B(E)$ ma wartość największą w punkcie x (tzn. $f(y) \leq f(x)$ dla wszystkich $y \in E$) oraz $f \in D_A$ to $A f(x) \leq 0$.

Dowód. Mamy $P^t f(x) = \mathbf{E}_x f(X_t) \leq \mathbf{E}_x f(x) = f(x)$ czyli

$$A f(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} (P^t f(x) - f(x)) \leq 0. \square$$

13.2 Rezolwenta

Definicja 13.3 Rezolwentą półgrupy P^t nazywamy rodzinę operatorów

$$R_\lambda f := \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t f dt.$$

Uwaga 13.8 Całka na $R_\lambda f$ jest dobrze określona i absolutnie zbieżna dla $\lambda > 0$ i $f \in F_0$. Istotnie, wówczas funkcja $t \rightarrow e^{-\lambda t} P^t f$ jest ciągła, więc możemy ją całkować po przedziałach skończonych. Ponadto

$$\int_0^\infty \|e^{-\lambda t} P^t f\| dt \leq \|f\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \lambda^{-1} \|f\|,$$

zatem całka jest zbieżna oraz $\|R_\lambda f\| \leq \lambda^{-1} \|f\|$.

Uwaga 13.9 Jeśli P^t jest półgrupą na $B(E)$ wyznaczoną przez jednorodną rodzinę Markowa $(X_t, \mathbf{P}_x)$ oraz proces X_t jest progresywnie mierzalny względem $\mathcal{F}_{\leq t}^X$ to $R_\lambda f(x)$ jest dobrze określona dla wszystkich $f \in B(E)$, $x \in E$. Istotnie jeśli P_t jest funkcją przejścia dla X_t to jak wykazaliśmy w Fakcie 12.1 funkcja $(t, x) \rightarrow P_t(x, \Gamma)$ jest mierzalna na $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$. Stąd funkcja $(t, x) \rightarrow P_t f$ jest mierzalna dla $f = I_\Gamma$, czyli również dla f funkcji prostych, a przez

jednostajną aproksymację dla dowolnych $f \in B(E)$. W szczególności funkcja $t \rightarrow e^{-\lambda t} P^t f$ jest mierzalna dla $f \in B(E)$, $x \in E$. Ponadto

$$\int_0^\infty |e^{-\lambda t} P^t f(x)| dt \leq \|f\|_\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \lambda^{-1} \|f\|,$$

czyli rzeczywiście $R_\lambda f(x)$ jest dobrze określona oraz $\|R_\lambda f\| \leq \lambda^{-1} \|f\|$.

Przykład

Dla procesu Wienera mamy

$$\begin{aligned} R_\lambda f(x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) f(y) dy dt \\ &= \int_0^\infty f(y) \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t} - \lambda t\right) dt = \int_0^\infty f(y) \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|} dy, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystaliśmy nietrywialną tożsamość całkową. Zatem

$$R_\lambda f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^\infty f(y) e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|} dy.$$

Fakt 13.5 Zachodzi następujące równanie rezolwenty dla $\lambda, \mu > 0, \lambda \neq \mu$

$$R_\mu R_\lambda = R_\lambda R_\mu = (\mu - \lambda)^{-1} (R_\lambda - R_\mu).$$

Dowód. Mamy

$$P^h R_\lambda f = P^h \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t f dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^{t+h} f dt = e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda s} P^s f ds$$

oraz

$$\begin{aligned} R_\lambda R_\mu f &= \int_0^\infty e^{-\mu t} P^t R_\lambda f = \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_t^\infty e^{-\lambda s} P^s f ds dt \\ &= \int_0^\infty P^s f e^{-\lambda s} \int_0^s e^{(\lambda-\mu)t} dt ds = \frac{1}{\lambda - \mu} \int_0^\infty P^s f e^{-\lambda s} (e^{(\lambda-\mu)s} - 1) ds \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu} \int_0^\infty P^s f (e^{-\mu s} - e^{-\lambda s}) ds = \frac{1}{\lambda - \mu} (R_\mu f - R_\lambda f). \square \end{aligned}$$

Uwaga 13.10 Można udowodnić, że jeśli $\int_0^\infty e^{-\lambda t} g(t) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(t) dt$ dla wszystkich $\lambda > 0$ oraz g i h są funkcjami ograniczonymi, to $g(t) = h(t)$ dla p.w. t . W szczególności jeśli g i h są ciągłe to $g \equiv h$. Biorąc $f \in F_0$ i $\varphi \in F^*$ widzimy, że $\varphi(R_\lambda f) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi(P^t f)$ oraz funkcja $t \rightarrow \varphi(P^t f)$ jest ciągła. Stąd dostajemy, że rezolwenta wyznacza półgrupę na F_0 . W szczególności jeśli E jest lokalnie zwarta i σ -zwarta, a proces X_t fellerowski taki, że $C_0(E) \subset F_0$, to rezolwenta wyznacza $P^t f$ dla $f \in C_0(E)$, a zatem również funkcję przejścia dla X_t .

Fakt 13.6 Załóżmy, że P^t jest półgrupą kontrakcji na F . Wówczas

a) R_λ rozpatrywany jako odwzorowanie na F_0 jest operatorem odwrotnym do $\lambda \text{Id} - A$ określonego na D_A . Dokładniej

$$f \in F_0 \Rightarrow R_\lambda f \in D_A \text{ i } (\lambda \text{Id} - A)R_\lambda f = f$$

oraz

$$f \in D_A \Rightarrow \lambda f - Af \in D_A \text{ i } R_\lambda(\lambda \text{Id} - A)f = f.$$

b) Jeśli $f \in F_0$, to $\lambda R_\lambda f \rightarrow f$ przy $\lambda \rightarrow \infty$. W szczególności D_A jest gęste w F_0 .

Dowód. a) Niech $f \in F_0$, wtedy dla $h \rightarrow 0+$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(P^h R_\lambda f - R_\lambda f) &= \frac{1}{h}(e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda t} P^t f dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t f dt) \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t f dt - e^{\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} P^t f dt \rightarrow \lambda R_\lambda f - f, \end{aligned}$$

bo $P^t f \rightarrow f$ przy $t \rightarrow 0+$. Zatem jeśli $f \in F_0$, to $R_\lambda f \in D_A$ oraz $A R_\lambda f = \lambda R_\lambda f - f$, czyli $(\lambda \text{Id} - A)R_\lambda f = f$.

Weźmy teraz $f \in D_A$, wiemy już, że $Af \in F_0$, całkując przez części dostajemy

$$\begin{aligned} R_\lambda A f &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t A f dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt}(P^t f) dt \\ &= e^{-\lambda t} P^t f|_0^\infty - \int_0^\infty P^t f (e^{-\lambda t})' dt = -f + \lambda R_\lambda f, \end{aligned}$$

czyli $R_\lambda(\lambda \text{Id} - A)f = f$.

b) Mamy

$$\lambda R_\lambda f - f = \lambda \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} (P^t f - f) dt + \lambda \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} (P^t f - f) dt,$$

zatem

$$\begin{aligned} \|\lambda R_\lambda f - f\| &\leq \sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|P^t f - f\| \int_0^\varepsilon \lambda e^{-\lambda t} dt + \lambda \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} \|P^t f - f\| dt \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|P^t f - f\| + 2\|f\| \lambda_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} dt = \sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|P^t f - f\| + 2\|f\| e^{-\lambda \varepsilon}. \end{aligned}$$

Pierwszy składnik powyższej sumy dąży do zera przy $\varepsilon \rightarrow 0+$, bo $f \in F_0$, a drugi dąży do zera dla ustalonego $\varepsilon > 0$ przy $\lambda \rightarrow \infty$. Czyli istotnie $\lambda R_\lambda f \rightarrow f$ przy $\lambda \rightarrow \infty$, a ponieważ $\lambda R_\lambda f \in D_A$, więc D_A jest gęste w F_0 . $\square$

Uwaga 13.11 Widzimy zatem, że operator A wyznacza rezolwentę na F_0 , a zatem również i półgrupę P^t na F_0 .

13.3 Twierdzenie Hille'a-Yosida

W tej części odpowiemy na pytanie jakie warunki musi spełniać operator A , by być generatorem półgrupy kontrakcji.

Twierdzenie 13.7 (Hille, Yosida) *Operator liniowy A o dziedzinie D_A w przestrzeni F jest generatorem C_0 półgrupy kontrakcji P^t na F wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są warunki*

- a) *zbiór D_A jest gęsty w F ;*
 - b) *dla wszystkich $\lambda > 0$ istnieje operator $(\lambda \text{Id} - A)^{-1}$ określony wszędzie na F ;*
 - c) *dla wszystkich $\lambda > 0$, $\|(\lambda \text{Id} - A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$.*
- W przypadku gdy $F \subset B(E)$ tzn. F jest ppodprzestrzenią funkcji ograniczonych mierzalnych na F , to dodatkowo zachodzi*
- d) *Półgrupa P^t jest dodatnia wtedy i tylko wtedy gdy $(\lambda \text{Id} - A)^{-1}$ jest dodatnie dla wszystkich $\lambda > 0$.*
 - e) *Dla wszystkich t , $P^t \mathbf{1} = \mathbf{1}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{1} \in D_A$ oraz $A\mathbf{1} = 0$.*

Dowód. Udowodnimy jedynie implikację " $\Rightarrow$ ", gdyż dowód przeciwnych implikacji jest nieco bardziej skomplikowany i przekracza ramy tego wykładu. Wcześniej jednak już udowodniliśmy, że dla C_0 półgrupy kontrakcji $(\lambda \text{Id} - A)^{-1} = R_\lambda$, $\|R_\lambda\| \leq \lambda^{-1}$ oraz D_A jest gęsty w F . Pozostaje więc wykazać odpowiednią część warunków d) i e). Jeśli P^t jest dodatnia i $f \geq 0$, to $P^t f \geq 0$, zatem $(\lambda \text{Id} - A)^{-1} f = R_\lambda f \geq 0$. Jeśli zaś $P^t \mathbf{1} = \mathbf{1}$ dla wszystkich t , to oczywiście $A\mathbf{1} = 0$. $\square$

Uwaga 13.12 W przypadku gdy $F = C(E)$ i E jest przestrzenią zwartą, to warunki b) c) Twierdzenia 13.7 można równoważnie wyrazić jako

- b') $\forall \lambda > 0 \forall f \in C(E) \exists F \in C(E) \lambda F - AF = f$;
- c') spełniona jest zasada maksimum.

Dowód. Wykażemy tylko, że warunki b') i c') implikują b) i c). Zaczniemy od wykazania, że rozwiązanie równania z b') jest jednoznaczne - jeśli $\lambda F - AF = f = \lambda G - AG$ oraz $F \neq G$, to bez straty ogólności możemy założyć, że $F(x) > G(x)$ dla pewnego $x \in E$. Na mocy zwartości E istnieje punkt $x_0 \in E$ taki, że $F(x_0) - G(x_0) = \max_{x \in E} (F(x) - G(x))$. Z zasady maksimum wnioskujemy, że $\lambda(F - G)(x_0) = A(F - G)(x_0) \leq 0$, co daje sprzeczność, czyli zachodzi b).

Niech $f \in C(E)$ oraz $F := (\lambda \text{Id} - A)^{-1} f$, czyli $f = (\lambda \text{Id} - A)F$. Załóżmy, że $\|f\| \leq 1$ i niech $x_0 \in f$ będzie takie, że $F(x_0) = \max_x F(x)$. Wówczas na mocy zasady maksimum $AF(x_0) \leq 0$, ale $AF(x_0) = \lambda F - f \geq \lambda F(x_0) - 1$, zatem $F(x_0) \leq \lambda^{-1}$. Wykazaliśmy więc, że $\max_{x \in E} F(x) \leq \lambda^{-1}$. Analogicznie, rozpatrując zasadę maksimum dla $-F$ dowodzimy, że $\max_{x \in E} (-F(x)) \leq \lambda^{-1}$, więc $\max_{x \in E} |F(x)| \leq \lambda^{-1}$, czyli $\|F\| \leq \lambda^{-1} \|f\|$, co dowodzi punktu c). $\square$