Kolokwium ze Wstępu do Procesów Stochastycznych

9 maja 2024, grupa I

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć**. Rozwiązanie każdego zadania, z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi, należy napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa I). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i warto) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach. W poniższych zadaniach (W_t) oznacza proces Wienera.

1. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością 7. Obliczyć, w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$, granice

$$\text{a) } \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(N_t > at), \qquad \text{b) } \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(W_t > at).$$

2. Udowodnić, że $\limsup_{n\to\infty} |W_{n+5} - W_n| = \infty$ p.n.

3. Rozważmy scentrowany proces gaussowski $(X_t)_{t\geqslant 0}$ o funkcji kowariancji $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \ln(4(s\wedge t)+1)$.
   a) Czy ten proces ma niezależne przyrosty?
   b) Czy ten proces ma modyfikację ciągłą? Co można powiedzieć o hölderowskości jego trajektorii?
   c) Znaleźć wszystkie niemalejące funkcje $f, g\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takie, że proces $Y_t = g(t)X_{f(t)}$ jest procesem Wienera.

4. Rozważmy następujące procesy na $[0, \infty)$:

   a) $X_t = \sin t\, W_t + \ln(2t+1)$,

   b) $Y_t = (2W_t - W_{3t})1_{\{W_t \neq W_{3t}\}}$,

   c) $Z_t = (2W_t - W_{3t})1_{\{W_t \leqslant W_{3t}\}}$.

   Wskazać które z powyższych procesów są gaussowskie i dla wskazanych procesów obliczyć funkcje wartości oczekiwanej oraz kowariancji.

5. Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest całkowalny z kwadratem, ma niezależne przyrosty, $\mathbb{E}X_t = 5t$ oraz $\mathrm{Var}(X_t) = 3t$. Znaleźć funkcje $f, g\colon\ [0,\infty) \to \mathbb{R}$ takie, że $X_t^2 + f(t)X_t + g(t)$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces X.

6. Niech (N_t) będzie procesem Poissona z parametrem 4 oraz

$$\tau := \inf\{t \geqslant 0\colon\ N_t = 8\}.$$

   a) Udowodnić, że τ jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t^N)$ generowanej przez N.
   b) Wykazać, że τ jest skończony prawie na pewno.
   c) Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ znaleźć $\gamma \in \mathbb{R}$ takie, że proces $\exp(\alpha N_t + \gamma t)$ jest martyngałem.
   d) Obliczyć $\mathbb{E}e^{-2\tau}$.

Kolokwium ze Wstępu do Procesów Stochastycznych

9 maja 2024, grupa II

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć**. Rozwiązanie każdego zadania, z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi, należy napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa II). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i warto) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach. W poniższych zadaniach (W_t) oznacza proces Wienera.

1. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością 5. Obliczyć, w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$, granice

$$\text{a)}\ \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(N_t > at), \qquad \text{b)}\ \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(W_t > at).$$

2. Udowodnić, że $\limsup_{n\to\infty} |W_{n+9} - W_n| = \infty$ p.n.

3. Rozważmy scentrowany proces gaussowski $(X_t)_{t\geqslant 0}$ o funkcji kowariancji $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \ln(3(s\wedge t)+1)$.
   a) Czy ten proces ma niezależne przyrosty?
   b) Czy ten proces ma modyfikację ciągłą? Co można powiedzieć o hölderowskości jego trajektorii?
   c) Znaleźć wszystkie niemalejące funkcje $f, g\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takie, że proces $Y_t = g(t)X_{f(t)}$ jest procesem Wienera.

4. Rozważmy następujące procesy na $[0,\infty)$:

   a) $X_t = \cos t\, W_t + 2\ln(t+1)$,

   b) $Y_t = (W_t + 2W_{4t})1_{\{W_t \geqslant W_{4t}\}}$,

   c) $Z_t = (W_t + 2W_{4t})1_{\{W_t \neq W_{4t}\}}$.

   Wskazać które z powyższych procesów są gaussowskie i dla wskazanych procesów obliczyć funkcje wartości oczekiwanej oraz kowariancji.

5. Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest całkowalny z kwadratem, ma niezależne przyrosty, $\mathbb{E}X_t = 3t$ oraz $\mathrm{Var}(X_t) = 4t$. Znaleźć funkcje $f, g\colon\ [0,\infty) \to \mathbb{R}$ takie, że $X_t^2 + f(t)X_t + g(t)$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces X.

6. Niech (N_t) będzie procesem Poissona z parametrem 3 oraz

$$\tau := \inf\{t \geqslant 0\colon\ N_t = 7\}.$$

   a) Udowodnić, że τ jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t^N)$ generowanej przez N.
   b) Wykazać, że τ jest skończony prawie na pewno.
   c) Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ znaleźć $\gamma \in \mathbb{R}$ takie, że proces $\exp(\alpha N_t + \gamma t)$ jest martyngałem.
   d) Obliczyć $\mathbb{E}e^{-2\tau}$.