Kolokwium ze Wstępu do Analizy Stochastycznej

5 grudnia 2024, grupa I

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć**. Rozwiązanie każdego zadania, z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi, należy napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa I). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i warto) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach. W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ oznacza proces Wienera.

1. Znaleźć funkcje f i g takie, że $(5W_t^3 - W_t^2 + f(t)W_t + g(t))_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez W.

2. Martyngał $(M_t)_{t\geqslant 0}$ ma trajektorie ciągłe, $M_0 = 2$ oraz $\limsup_{t\to\infty} M_t = \infty$. Ponadto $(M_t^2 - t^{5/4})_{t\geqslant 0}$ też jest martyngałem. Niech $\tau = \inf\{t\colon |M_t| = 7\}$. Obliczyć $\mathbb{P}(M_\tau = 7)$ oraz $\mathbb{E}\tau^{5/4}$.

3. Martyngał $(M_t)_{t\geqslant 0}$, o prawostronnie ciągłych trajektoriach, jest zbieżny w L^1 przy $t \to \infty$. Wykazać, że proces $X_t = M_t \sin(M_t^2)$ jest zbieżny prawie na pewno i w L^1 przy $t \to \infty$.

4. Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ proces
$$X_t = \frac{W_t}{\sqrt{t}(\ln\ln(t+10))^\alpha}$$
jest zbieżny do zera przy $t \to \infty$
i) wg prawdopodobieństwa,
ii) w L^1,
iii) prawie na pewno?

5. Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest zadany wzorem
$$X_t := \int_0^t \sin(s)\mathrm{d}W_s.$$
i) Czy (X_t) ma przyrosty niezależne?
ii) Czy (X_t) ma przyrosty stacjonarne?
iii) Czy proces (X_t) ma modyfikację, której trajektorie są z prawdopodobieństwem 1 4/9-hölderowsko ciągłe na każdym przedziale skończonym?

6. Niech $\tau := \inf\{t > 0\colon\ W_t^2 = t + 8\}$.
i) Wykazać, że $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ oraz $\mathbb{E}\tau = \infty$.
ii) Obliczyć $\int_0^\tau W_s \mathrm{d}W_s$.

Kolokwium ze Wstępu do do Analizy Stochastycznej

5 grudnia 2024, grupa II

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć**. Rozwiązanie każdego zadania, z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi, należy napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa II). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i warto) korzystać z faktów omówionych na wykładzie i ćwiczeniach. W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ oznacza proces Wienera.

1. Znaleźć funkcje f i g takie, że $(3W_t^3 - 5W_t^2 + f(t)W_t + g(t))_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez W.

2. Martyngał $(M_t)_{t\geqslant 0}$ ma trajektorie ciągłe, $M_0 = 3$ oraz $\limsup_{t\to\infty} M_t = \infty$. Ponadto, $(M_t^2 - t^{4/3})_{t\geqslant 0}$ też jest martyngałem. Niech $\tau = \inf\{t\colon |M_t| = 5\}$. Obliczyć $\mathbb{P}(M_\tau = 5)$ oraz $\mathbb{E}\tau^{4/3}$.

3. Martyngał $(M_t)_{t\geqslant 0}$, o prawostronnie ciągłych trajektoriach, jest zbieżny w L^1 przy $t \to \infty$. Wykazać, że proces $X_t = M_t \cos(M_t^3)$ jest zbieżny prawie na pewno i w L^1 przy $t \to \infty$.

4. Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ proces
$$X_t = \frac{W_t}{\sqrt{t}(\ln\ln(t+10))^\alpha}$$
jest zbieżny do zera przy $t \to \infty$
i) prawie na pewno,
ii) wg prawdopodobieństwa,
iii) w L^1?

5. Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest zadany wzorem
$$X_t := \int_0^t \cos(s)\mathrm{d}W_s.$$
i) Czy (X_t) ma przyrosty stacjonarne?
ii) Czy (X_t) ma przyrosty niezależne?
iii) Czy proces (X_t) ma modyfikację, której trajektorie są z prawdopodobieństwem 1 3/7-hölderowsko ciągłe na każdym przedziale skończonym?

6. Niech $\tau := \inf\{t > 0\colon\ W_t^2 = t + 6\}$.
i) Wykazać, że $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ oraz $\mathbb{E}\tau = \infty$.
ii) Obliczyć $\int_0^\tau W_s \mathrm{d}W_s$.