Imię i nazwisko:... Numer indeksu:........................

Egzamin ze Wstępu do Procesów Stochastycznych, grupa I, 25 czerwca 2023

Część zadaniowa (40pkt)

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa I) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt. Można (i warto) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. W poniższych zadaniach (W_t) oznacza proces Wienera.

1. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością 5. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 zbieżne są następujące szeregi losowe
$$\text{a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+N_{\sqrt{k}}^4}, \qquad \text{b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{W_k}{1+N_{\sqrt{k}}^4}.$$

2. Niech f będzie funkcją z $[0,\infty)$ w $[0,\infty)$.
a) Wykazać, że istnieje proces gaussowski $G=(G_t)_{t\geqslant 0}$ o średniej $5t$ i funkcji kowariancji $\min\{f(t), f(s)\}$.
b) Wykazać, że proces G ma przyrosty niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy f jest niemalejąca.
c) Udowodnić, że proces G ma przyrosty niezależne i stacjonarne wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t) = at + b$ dla pewnych $a, b \geqslant 0$.

3. Martyngał $(M_t)_{t\geqslant 0}$ ma trajektorie prawostronnie ciągłe i spełnia warunek
$$\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}|M_t| \ln^3(e + |M_t|) < \infty.$$
Wykazać, że M_t jest zbieżny prawie na pewno i w L^1 przy $t\to\infty$.

4. Określmy
$$\tau = \inf\left\{t \geqslant 0 : W_t = \sqrt{1+t/5}\right\}, \qquad \sigma = \inf\left\{t\geqslant 0 : |W_t| = \sqrt{1+t/5}\right\}.$$
a) Wykazać, że τ oraz σ są skończone prawie na pewno.
b) Udowodnić, że $\mathbb{E}\tau = \infty$.
c) Obliczyć $\mathbb{E}\sigma$.

5. Funkcja przejścia procesu Markowa $(X_t)_{t\geqslant 0}$ spełnia $P_{s,t}(x, A) = P_{s,t}(-x, A)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ oraz zbioru $A \subset \mathbb{R}$ takiego, że $A = -A$. Udowodnić, że $(X_t^4)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Markowa i znaleźć jego funkcję przejścia.

6. Niech
$$\tau = \inf\{t > 0 : W_t = 3\}.$$
Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że na przedziale $[\tau, \tau+4]$ proces Wienera przyjmie wartość mniejszą od -5.

Obrócić kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!

Część testowa (20pkt)

1. (4pkt) Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością 2. Obliczyć

   a) $\mathbb{E}(N_5|N_2) =$

   b) $\mathbb{E}(N_2|N_5) =$

   c) $\mathbb{E}e^{3iN_3+iN_4} =$

2. (3pkt) Obliczyć

   a) $\mathbb{E}(W_5^2|W_2) =$

   b) $\mathbb{E}(W_3 - W_1|W_5) =$

3. (3pkt) Podać definicję momentu zatrzymania τ oraz σ-ciała $\mathcal{F}_\tau$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.

4. (2pkt) Uzupełnić sformułowanie nierówności maksymalnej dla prawostronnie ciągłych martyngałów $(M_t)_{t\geqslant 0}$

   $$\mathbb{E}\sup_{t\geqslant 0}|M_t|^p \leqslant \text{..} \text{ dla } p\text{............}$$

5. (2pkt) Sformułować równanie Chapmana-Kołmogorowa dla jednorodnych funkcji przejścia

   $P_{s+t}(x,\Gamma) =$

6. (4pkt) Dana jest jednorodna rodzina Markowa $((X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}})$ o gęstości przejścia $p_t(x,y)$. Wówczas dla $x \in \mathbb{R}$,

   a) $\mathbb{E}_x(e^{-2|X_2|}|X_1) =$

   b) $\mathbb{P}_x(X_3 > X_2 > 0) =$

7. (2pkt) Niech P^t będzie półgrupą generowaną przez proces Poissona z intensywnością 4. Wówczas dla $f\colon \mathbb{Z} \to [-1,1]$,

   $P^t f(5) =$

Imię i nazwisko:... Numer indeksu:.......................

Egzamin ze Wstępu do Procesów Stochastycznych, grupa II, 25 czerwca 2023

Część zadaniowa (40pkt)

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa II) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt. Można (i warto) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. W poniższych zadaniach (W_t) oznacza proces Wienera.

1. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością 5. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 zbieżne są następujące szeregi losowe

$$\text{a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+N_{k^2}}, \qquad \text{b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{W_{5k}}{1+N_{k^2}}.$$

2. Niech f będzie funkcją z $[0,\infty)$ w $[0,\infty)$.
   a) Wykazać, że istnieje proces gaussowski $G=(G_t)_{t\geqslant 0}$ o średniej $2t$ i funkcji kowariancji $\min\{f(t),f(s)\}$.
   b) Wykazać, że proces G ma przyrosty niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy f jest niemalejąca.
   c) Udowodnić, że proces G ma przyrosty niezależne i stacjonarne wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t)=at+b$ dla pewnych $a,b\geqslant 0$.

3. Martyngał $(M_t)_{t\geqslant 0}$ ma trajektorie prawostronnie ciągłe i spełnia warunek

$$\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}|M_t|\ln^3(e+|M_t|)<\infty.$$

   Udowodnić, że M_t jest zbieżny prawie na pewno i w L^1 przy $t\to\infty$.

4. Określmy

$$\tau=\inf\left\{t\geqslant 0: W_t=\sqrt{1+t/5}\right\}, \qquad \sigma=\inf\left\{t\geqslant 0: |W_t|=\sqrt{1+t/5}\right\}.$$

   a) Wykazać, że τ oraz σ są skończone prawie na pewno.
   b) Udowodnić, że $\mathbb{E}\tau=\infty$.
   c) Obliczyć $\mathbb{E}\sigma$.

5. Funkcja przejścia procesu Markowa $(X_t)_{t\geqslant 0}$ spełnia $P_{s,t}(x,A)=P_{s,t}(-x,A)$ dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$ oraz zbioru $A\subset\mathbb{R}$ takiego, że $A=-A$. Wykazać, że $(X_t^4)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Markowa i znajdź jego funkcję przejścia.

6. Niech

$$\tau=\inf\{t>0: W_t=3\}.$$

   Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że na przedziale $[\tau,\tau+4]$ proces Wienera przyjmie wartość mniejszą od -5.

Obrócić kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!

Część testowa (20pkt)

1. (4pkt) Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością 2. Obliczyć

   a) $\mathbb{E}(N_6|N_4) =$

   b) $\mathbb{E}(N_4|N_6) =$

   c) $\mathbb{E}e^{2iN_2 - iN_3} =$

2. (3pkt) Obliczyć

   a) $\mathbb{E}(W_3^2|W_1) =$

   b) $\mathbb{E}(W_4 - W_2|W_6) =$

3. (2pkt) Uzupełnić sformułowanie nierówności maksymalnej dla prawostronnie ciągłych martyngałów $(M_t)_{t\geqslant 0}$

$$\mathbb{E}\sup_{t\geqslant 0}|M_t|^p \leqslant \text{...} \text{ dla } p\text{............}$$

4. (3pkt) Podać definicję momentu zatrzymania τ oraz σ-ciała $\mathcal{F}_\tau$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.

5. (2pkt) Sformułować równanie Chapmana-Kołmogorowa dla jednorodnych funkcji przejścia

   $P_{s+t}(x, \Gamma) =$

6. (4pkt) Dana jest jednorodna rodzina Markowa $((X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}})$ o gęstości przejścia $p_t(x, y)$. Wówczas dla $x \in \mathbb{R}$,

   a) $\mathbb{E}_x(e^{-2|X_2|}|X_1) =$

   b) $\mathbb{P}_x(X_3 > X_2 > 0) =$

7. (2pkt) Niech P^t będzie półgrupą generowaną przez proces Poissona z intensywnością $\lambda = 3$. Wówczas dla $f\colon \mathbb{Z} \to [-1, 1]$,

   $P^t f(4) =$