

Imię i nazwisko:.....

Egzamin z Procesów Stochastycznych II
grupa I, 19 stycznia 2004

Uwaga: W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t \geq 0}$ oznacza zawsze standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$.

Część zadaniowa

Pełne rozwiązania poniższych 5 zadań należy napisać na osobnych kartkach. Można powoływać się na wszystkie twierdzenia i fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Znajdź taki ciągły proces A o wahanu ograniczonym na każdym przedziale skończonym, żeby $(\sin(W_t) - A_t)_{t \geq 0}$ był martyngałem oraz $A_0 = 0$. Czy proces A jest wyznaczony jednoznacznie?
2. Znajdź taką miarę probabilistyczną $\mathbf{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F}_{\leq 1}^W)$, by proces $(W_t + 2t^4)_{0 \leq t \leq 1}$ był procesem Wienera względem $\mathbf{Q}$.
3. Jakie warunki musi spełniać ograniczony proces prognozowalny Y , by $X_t = \int_0^t Y_s dW_s$ był procesem Wienera?
4. Oblicz następującą granicę w L^1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} W_s^4 dW_s \right)^2.$$

5. Wykaż, że proces

$$X_t = e^{-3t+2W_t}$$

spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = X_t dt + 2X_t dW_t.$$

Czy równanie to może mieć inne rozwiązania?

Część Testowa

1. Niech $X = (X_t)_{0 \leq t \leq 1}$ będzie martyngałem lokalnym. Które z następujących warunków implikują, że X jest martyngałem (podkreśl właściwe odpowiedzi): $X_t \geq 0$ dla wszystkich t p.n., $|X_t| \leq C$ dla wszystkich t , gdzie C - skończona stała, $\mathbf{E} \sup_t |X_t| < \infty$, $X_t \geq 0$ dla wszystkich t p.n. oraz $\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}X_0$.
2. Przedstaw poniższą całkę stochastyczną w postaci nie zawierającej całek stochastycznych

$$\int_0^t W_s^{10} dW_s =$$

3. Niech $X_t = \int_0^t \sqrt{|W_s|} dW_s$. Oblicz $\mathbf{E}X_t =$ oraz $\text{Var}(X_t) =$
(Uwaga: $\mathbf{E}|g| = \sqrt{2/\pi}$ dla $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$).

4. Uzupełnij sformułowanie twierdzenia Levy'ego: Martynał lokalny $(X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy gdy

5. Podaj definicję przestrzeni $\mathcal{L}_T^2$.

6. Podaj definicję nawiasu skośnego $\langle M, N \rangle$ dla dwu martynałów lokalnych M i N .

7. Rozpatrzmy stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = \sin(X_t)dW_t + 2X_t dt, \quad X_0 = 1.$$

Równanie to ma (podkreśl prawidłowe odpowiedzi): słabe rozwiązanie, mocne rozwiązanie, rozwiązanie jednoznaczne w sensie trajektorii, rozwiązanie będące martynałem lokalnym.

8. Niech $M_t = \int_0^t e^{W_s} dW_s$. Czy M_t jest martynałem: tak/nie? Oblicz

$$\langle M \rangle_t =$$

oraz

$$\int_0^t e^{-W_s} dM_s =$$

9. Niech M będzie ciągłym martynałem lokalnym, $M_0 = 0$. Zapisz proces $Z = e^{M - \frac{1}{2}\langle M \rangle}$ w takiej postaci by było widać, że jest martynałem lokalnym

$$Z_t =$$

10. Proces dyfuzji X jest zadany przez równanie

$$dX_t = \cos(X_t)dW_t + 3X_t dt.$$

Niech A będzie operatorem infinitezmalnym dla X . Wtedy dla $f \in C_{zw}^2(\mathbb{R})$ mamy $Af(x) =$

11. Niech τ będzie momentem zatrzymania. Oblicz

$$\int_0^t s dW_{s \wedge \tau} =$$

Imię i nazwisko:.....

Egzamin z Procesów Stochastycznych II
grupa II, 19 stycznia 2004

Uwaga: W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t \geq 0}$ oznacza zawsze standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$.

Część zadaniowa

Pełne rozwiązania poniższych 5 zadań należy napisać na osobnych kartkach. Można powoływać się na wszystkie twierdzenia i fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Oblicz następującą granicę w L^1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k/2n}^{(k+1)/2n} W_s^3 dW_s \right)^2.$$

2. Wykaż, że proces

$$X_t = e^{3t/2 - W_t}$$

spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = 2X_t dt - X_t dW_t.$$

Czy równanie to może mieć inne rozwiązania?

3. Znajdź taki ciągły proces A o wahaniu ograniczonym na każdym przedziale skończonym, żeby $(\cos(W_t) - A_t)_{t \geq 0}$ był martyngałem oraz $A_0 = 0$. Czy proces A jest wyznaczony jednoznacznie?
4. Jakie warunki musi spełniać ograniczony proces prognozowalny Y , by $X_t = \int_0^t Y_s dW_s$ był procesem Wienera?
5. Znajdź taką miarę probabilistyczną $\mathbf{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F}_{\leq 1}^W)$, by proces $(W_t + 5t^3)_{0 \leq t \leq 1}$ był procesem Wienera względem $\mathbf{Q}$.

Część Testowa

1. Niech τ będzie momentem zatrzymania. Oblicz

$$\int_0^t s^2 dW_{s \wedge \tau} =$$

2. Niech $M_t = \int_0^t e^{-W_s} dW_s$. Czy M_t jest martyngałem: tak/nie? Oblicz

$$\langle M \rangle_t =$$

oraz

$$\int_0^t e^{W_s} dM_s =$$

3. Niech $X = (X_t)_{0 \leq t \leq 1}$ będzie martyngałem lokalnym. Które z następujących warunków implikują, że X jest martyngałem (podkreśl właściwe odpowiedzi): $|X_t| \leq C$ dla wszystkich t , gdzie C - skończona stała, $\mathbf{E} \sup_t |X_t| < \infty$, $X_t \geq 0$ dla wszystkich t p.n., $X_t \geq 0$ dla wszystkich t p.n. oraz $\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}X_0$.

4. Niech M będzie ciągłym martyngałem lokalnym, $M_0 = 0$. Zapisz proces $Z = e^{M - \frac{1}{2}\langle M \rangle}$ w takiej postaci by było widać, że jest martyngałem lokalnym

$$Z_t =$$

5. Przedstaw poniższą całkę stochastyczną w postaci nie zawierającej całek stochastycznych

$$\int_0^t W_s^8 dW_s =$$

6. Niech $X_t = \int_0^t \sqrt{|W_s| + 1} dW_s$. Oblicz $\mathbf{E}X_t =$ oraz $\text{Var}(X_t) =$
(Uwaga: $\mathbf{E}|g| = \sqrt{2/\pi}$ dla $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$).

7. Podaj definicję nawiasu skośnego $\langle M, N \rangle$ dla dwu martyngałów lokalnych M i N .

8. Podaj definicję przestrzeni $\mathcal{L}_\infty^2$.

9. Proces dyfuzji X jest zadany przez równanie

$$dX_t = 2X_t dW_t + \cos(X_t) dt.$$

Niech A będzie operatorem infinitesimalnym dla X . Wtedy dla $f \in C_{zw}^2(\mathbb{R})$ mamy $Af(x) =$

10. Uzupełnij sformułowanie twierdzenia Levy'ego: Martyngał lokalny $(X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy gdy

11. Rozpatrzmy stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = 2 \sin(X_t) dW_t + X_t dt, \quad X_0 = 2.$$

Równanie to ma (podkreśl prawidłowe odpowiedzi): słabe rozwiązanie, mocne rozwiązanie, rozwiązanie będące martyngałem lokalnym, rozwiązanie jednoznaczne w sensie trajektorii.